Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 35

EXALG350 – EXALG359

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juin 2010

EXALG350 – FACS, ULB, Bruxelles - juillet 2009.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Le calcul des différents déterminants donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{vmatrix} = m(m-2)(m+2) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1-m \\ 0 & -1 & 2 \\ m+2 & -m & 3 \end{vmatrix} = m(m+2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1-m \\ 1+m & 0 & 2 \\ 2 & m+2 & 3 \end{vmatrix} = -m(m+2)(m+3) \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+2 \\ 1+m & -1 & 0 \\ 2 & -m & m+2 \end{vmatrix} = -m(m+2)^2$$

1er cas : $m = 0$

Le système devient : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4-3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ Système simplement indéterminé

2ème cas : $m = 2$

Le système devient : $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 3x-y+2z=0 \\ 2x-2y+3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-y+2z=8 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$ Système impossible.

3ème cas : $m = -2$

Le système devient : $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 3x-y+2z=0 \\ 2x-2y+3z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ Système simplement indéterminé

Dans les autres cas : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{m-2} \\ y = -\dfrac{m+3}{m-2} \\ z = -\dfrac{m+2}{m-2} \end{cases}$

---

20 juin 2010

EXALG351 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2\ln(x+4)\geq\ln(2-x)$

CE : $\begin{cases} x<2 \\ x>-4 \end{cases} \rightarrow x\in\,]-4;2\,[$

$$2\ln(x+4)\geq\ln(2-x)\rightarrow 2\ln(x+4)-\ln(2-x)\geq 0\rightarrow\frac{(x+4)^2}{2-x}\geq 1\rightarrow\frac{(x+4)^2}{2-x}-1\geq 0$$

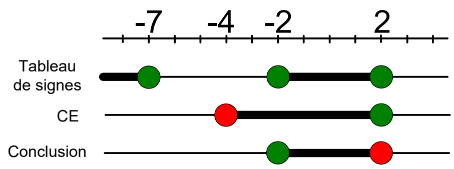
$$\rightarrow\frac{(x+4)^2-(2-x)}{2-x}\geq 0\rightarrow\frac{x^2+9x+14}{2-x}\geq 0\rightarrow\frac{(x+2)(x+7)}{2-x}\geq 0$$

<u>Tableau de signes</u>

		-7		-2		2	
$(x+2)(x+7)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\dfrac{(x+2)(x+7)}{2-x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\rightarrow x\in\,\leftarrow;-7\,]\cup[\,-2;2\,]$

En combinant avec les CE : $\rightarrow \boxed{x\in[\,-2;2\,[}$



Résolu le 22 juin 2010

EXALG352 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Déterminez les valeurs réelles des paramètres a, b, c pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a+1 & a+3 & a-2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c+1 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible.}$$

Calculer A^{-1} lorsque $a = b = c = 0$

---

1) Déterminons les valeurs pour lesquelles la matrice n'est pas inversible. Ces valeurs correspondent à un déterminant nul :

$$\begin{vmatrix} a+1 & a+3 & a-2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix} \overset{L_1 = L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c+2 & a+b+c+2 & a+b+c+2 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-2 & b+1 & b+3 \\ c+3 & c-2 & c-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1}}{=} (a+b+c+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-2 & 3 & 5 \\ c+3 & -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 19(a+b+c+2)$$

Le déterminant sera nul si $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = -\alpha - \beta - 2 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Pour toutes autres de ces valeurs, la matrice est inversible.

2) $a = b = c = 0 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice des cofacteurs est : $\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 1 \\ 1 & 7 & 11 \\ 11 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

La matrice adjointe est la transposée de la matrice des cofacteurs :

$\operatorname{Adj}(A) = (\operatorname{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 \\ 11 & 7 & 1 \\ 1 & 11 & 7 \end{pmatrix}$. Le déterminant vaut : $\det(A) = 38$

Et donc : $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{Adj}(A)}{\det(A)} = \dfrac{1}{38}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 \\ 11 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/38 & 1/38 & 11/38 \\ 11/38 & 7/38 & 1/38 \\ 1/38 & 1/38 & 7/38 \end{pmatrix}$

Résolu le 22 juin 2010

EXALG353 – FACS, ULB, Bruxelles - septembre 2009.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \quad (m \in \mathbb{R}) \\ mx + y - m^3 z = -1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Calculons les déterminants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(m^2+1) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ -1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m^2(1-m)^2(1+m)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & -1 & -m^3 \end{vmatrix} = m(m+1)^2(m-1)^2 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+m)(m-1)(1+m^2)$$

<u>1er cas : $m = 0$</u>

Le système devient : $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ Système impossible.

<u>2ème cas : $m = -1$</u>

Le système devient : $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Système simplement indéterminé.

<u>3ème cas : $m = 1$</u>

Le système devient : $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Système simplement indéterminé.

<u>Dans les autres cas :</u>

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(m-1)(m+1)}{m^2+1} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{(m+1)(m-1)}{m^2+1} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{m}$$

Le 22 juin 2010

EXALG354 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Vous faites une descente de la Lesse en kayak et vous avez pique-niqué sur la berge à midi. Vous reprenez la descente à 13h. L'esprit un peu engourdi par la digestion, ce n'est qu'après 2 kilomètres de descente que vous vous apercevez que vous avez oublié votre appareil photo sur la berge où vous avez mangé. Vous décidez de remonter en pagayant à contre courant pour récupérer votre appareil. Vous atteignez votre lieu de pique-nique à 17h, soit 4h après l'avoir quitté. Heureusement, l'appareil est toujours là.
Calculez votre vitesse moyenne par rapport à l'eau si on suppose que :
- la vitesse du courant est de 2km/h
- votre vitesse par rapport à l'eau est la même que vous ramiez dans le sens du courant ou à contre-courant.

Soit $V_K =$ la vitesse du kayak, $V_E =$ la vitesse de l'eau (2 km/h), $t_D =$ le temps de descente, et t_R le temps de remontée. La distance parcourue pour la descente et la remontée est de 2 km. Le kayak et l'eau sont en MRU.

$$\to \begin{cases} (V_K + V_E)t_D = 2 \text{ (Pour la descente, les vitesses d'additionnent)} \\ (V_K - V_E)t_R = 2 \text{ (Pour la remontée, les vitesses se soustraient)} \\ t_D + t_R = 4 \quad \text{(Le temps total de descente et de remontée est de 4 h)} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} t_D = \dfrac{2}{V_K + 2} \\ t_R = \dfrac{2}{V_K - 2} \\ \dfrac{2}{V_K + 2} + \dfrac{2}{V_K - 2} = 4 \end{cases} \quad \to V_K^2 - V_K - 4 = 0 \to V_K = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \simeq 2.562 \text{ km/h}$$

Et les temps sont : $t_D = \dfrac{2}{4.562} = 0.44$ h et $t_R = \dfrac{2}{0.562} = 3.56$ h

Pendant la descente, la vitesse du kayak par rapport à l'eau est de $V_K^D = 2.562$ km/h.

Pendant la remontée, la vitesse du kayak par rapport à l'eau est de $V_K^R = -2.562$ km/h.

La vitesse moyenne du kayak par rapport à l'eau pour l'ensemble du périple est alors :

$$V_{moy} = \frac{V_K^D.t_D + V_K^R.t_R}{t_D + t_R} = \frac{2.562 \times 0.44 - 2.562 \times 3.56}{4} = \boxed{-2 \text{ km/h}}$$

Méthode alternative

Dans un premier temps considérons que l'origine des positions x est le lieu du pique-nique.

Imaginons un bouchon B qui suit exactement le mouvement de l'eau.

A l'instant $t = 0$, le bouchon B et le kayak k se trouvent en position $x = 0$.

A l'instant $t = 4$ h, le bouchon B est en position $x = 4 \times 2 = 8$ km, mais le kayak est revenu en $x = 0$.

Prenons maintenant, B comme origine des positions x'.

Les positions du kayak sont dans ce nouveau repère : $\begin{cases} t = 0 \rightarrow x'_{initial} = 0 \\ t = 4 \rightarrow x'_{final} = -8 \text{ km} \end{cases}$.

Par définition, une vitesse moyenne est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{x'_{final} - x'_{initial}}{\Delta t} = \frac{-8-0}{4} = -2 \text{ km/h}$$

Le 5 juillet 2010

EXALG355 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Rechercher la solution x et y du système suivant :

$$\begin{cases} (1+i)x & +2y & = & 1-i \\ x & -iy & = & i \end{cases}$$

où $i^2 = -1$. Notez que x et y peuvent être des nombres complexes.

Utilisons la méthode de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -i-1 \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1-i & 2 \\ i & -i \end{vmatrix} = -3i-1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2i-2$$

Ce qui donne :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3i-1}{-i-1} = \frac{-3i-1}{-i-1}.\frac{i-1}{i-1} = \frac{3-i+3i+1}{2} = 2+i$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2i-2}{-i-1} = \frac{2i-2}{-i-1}.\frac{i-1}{i-1} = \frac{-2-2i-2i+2}{2} = -2i$$

Conclusion $\boxed{S : \left\{ (2+i; -2i) \right\}}$

Le 5 juillet 2010

EXALG356 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Soit l'équation

$$\left(2m-1\right)x^2-\left(m+2\right)x+2m=0$$

de racines x_1 et x_2. Déterminez les valeurs du paramètres réel m qui permettent de vérifier

$$0<x_1<x_2.$$

Pour avoir deux solutions réelles, distinctes et positives, nous avons les conditions suivantes :

$a)$ Produit des racines positif : $\dfrac{2m}{2m-1}>0 \quad \to m\in -\infty;0\,[\cup]\,\dfrac{1}{2};+\infty$

$b)$ Somme des racines positives : $\dfrac{m+2}{2m-1}>0 \to m\in -\infty;-2\,[\cup]\,\dfrac{1}{2};+\infty$

Enfin, il faut que le delta de l'équation soit positif :

$$\left(m+2\right)^2-4\left(2m-1\right).2m=-15m^2+12m+4>0$$

Les solutions de cette équation sont : $m=\dfrac{+6\pm\sqrt{6^2+15\times 4}}{-15}=\begin{cases} m_1=\dfrac{-6-4\sqrt{6}}{-15}\simeq 1.0532 \\ m_2=\dfrac{-6+4\sqrt{6}}{-15}\simeq -0.253\end{cases}$

Il faut donc : $\dfrac{6-4\sqrt{6}}{15}<m<\dfrac{6+4\sqrt{6}}{+15}$

Avec les conditions précitées, nous concluons :

$$\boxed{m\in\left]\frac{1}{2};\frac{6+4\sqrt{6}}{+15}\right[}$$

Le 5 juillet 2010

EXALG357 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Résoudre dans les réels le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4y & = & 4 \\ x+2y & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4y^2+4y=4 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

La première des équations représente une ellipse et la deuxième une droite.

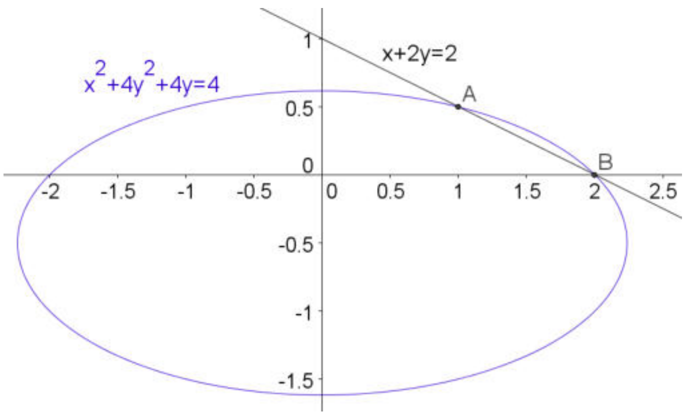
Il est facile de calculer l'intersection de cette droite et de cette ellipse.

$x=2-2y \to (2-2y)^2+4y^2+4y=4 \to 8y^2-4y=0 \to 4y(2y-1)=0$

1) $y=0 \to x=2$

2) $y=\frac{1}{2} \to x=1$

Conclusion $\boxed{S:\left\{(2,0);\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}}$



Le 5 juillet 2010

EXALG358 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Résoudre et discuter en fonction du paramètre m le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2my + (2m-1)z = 2m+1 \\ 3x + 2y + 2mz = 3 \\ (2m-1)x + 2my + (2m+1)z = 2m-1 \end{cases}$$

Le calcul des Δ donne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 2m-1 \\ 3 & 2 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 2m+1 \end{vmatrix} = 8m^2(m-2) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2m+1 & m & 2m-1 \\ 3 & 2 & 2m \\ 2m1 & 2m & 2m+1 \end{vmatrix} = 4m(1-2m)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m+1 & 2m-1 \\ 3 & 3 & 2m \\ 2m-1 & 2m-1 & 2m+1 \end{vmatrix} = 2m(4m^2-8m-2) \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & 2m+1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2m-1 & 2m & 2m-1 \end{vmatrix} = 4m(m+1)$$

<u>1er cas : $m=0$</u>.

Le sytème devient : $\begin{cases} x-z=1 \\ 3x+2y=3 \\ -x+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\frac{3}{2}(1-\lambda) \\ z=1+\lambda \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

<u>2ème cas : $m=2$</u>

Le système devient :

$$\begin{cases} x+4y+3z=5 & (1) \\ 3x+2y+4z=3 & (2) \\ 3x+4y+3z=3 & (3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2)-3(1): -10y-5z=-12 \\ (3)-(2) \ : 2y+z=0 \end{cases}$$ Système impossible.

<u>Dans les autres cas :</u>

$$\boxed{x = \frac{1-2m}{2m(m-2)} \quad ; \quad y = \frac{4m^2-8m-3}{4m(m-2)} \quad ; \quad z = \frac{m+1}{2m(m-2)}}$$

Le 6 aout 2009

EXALG359 – Polytech, Umons, Mons, Présentation examen admission 2009-2010.

Déterminez tous les polynômes $P(x)$ vérifiant pour tout x la relation

$$P(2x)=P'(x).P''(x)$$

où P' et P'' désignenet respectivement les dérivées première et seconde du polynôme P.

Remarque : commencez par déterminez le degré n du polynôme $P(x)$ qui vérifie la relation précitée.

Soit m le degré de $P(x)$. Le degré de $P'(x)$ est donc de $m-1$ et celui de $P''(x)$ de $m-2$.

Alors si $P(2x)=P'(x).P''(x) \to m=m-1+m-2 \to m=3$.

$P(x)$ est donc de la forme : $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Nous pouvons maintenant écrire :

$$a(2x)^3+b(2x)^2+c(2x)+d=(3ax^2+2bx+c)(6ax+2b)$$
$$=18a^2x^3+18abx^2+(6ac+4b^2)x+2bc$$

Par identification : $\begin{cases}18a^2=8a\\18ab=4b\\6ac+4b^2=2c\\2bc=d\end{cases} \to \begin{cases}a=\dfrac{4}{9}\ (\text{ou } a=0 : \text{à rejeter})\\b=0\\c=0\\d=0\end{cases}$

Conclusion : $\boxed{P(x)=\frac{4}{9}x^3}$

Le 6 aout 2010