Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 38

EXALG380 – EXALG389

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 2010

EXALG380 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{a,-a-1\}$ l'inéquation paramètrique

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x+1}{x+a+1}\geq 0$$

où $a\in[\ 0;+\infty\ [$

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x+1}{x+a+1}\geq 0\Rightarrow\frac{x^2+ax+x+x^2+x-ax-a}{(x-a)(x+a+1)}\geq 0\Rightarrow\frac{2x^2+2x-a}{(x-a)(x+a+1)}\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{2\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}\right)}{(x-a)(x+a+1)}\geq 0$$

Pour construire un tableau de signe, il faut déterminer la position respective des racines des différents facteurs l'un par rapport à l'autre.

Il est immédiat que a et $\dfrac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$ sont ≥ 0 et que $-a-1$ et $\dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}$ sont ≤ 0

Déterminons la position de a et $\dfrac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$.

Pour cela considérons la fonction : $f(a)=a+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{1+2a}}{2}$.

$f(0)=0$ et $f'(a)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1+2a}}$ qui est toujours positif puisque $a\in[\ 0,\infty\ [$

Nous en déduisons que quelque soit la valeur de a, nous avons $\dfrac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}\leq a$

Considérons maintenant la fonction : $g(a)=-a-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1+2a}}{2}$.

$g(0)=0$ et $g'(a)=-1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+2a}}$ qui est toujours négatif puisque $a\in[\ 0,\infty\ [$

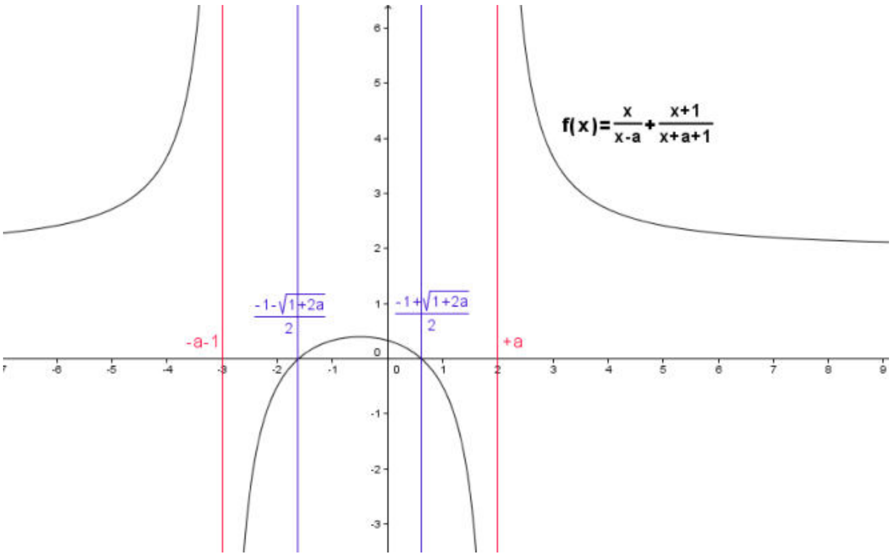
Nous en déduisons que quelque soit la valeur de a, nous avons $-a-1\leq\dfrac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}$

Nous pouvons alors construire le tableau de signe suivant

		$-a-1$		$\frac{-1-\sqrt{1+2a}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}$		a	
$2x^2+2x-a$	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$(x-a)(x+a+1)$	+	0	−	−	−	−	−	0	+
$\frac{2x^2+2x-a}{(x-a)(x+a+1)}$	+	/	−	0	+	0	−	/	+

Conclusion :

$$\boxed{a\in[\ 0,\infty\ [\Rightarrow x\in]-\infty,-a-1[\cup\left[\frac{-1-\sqrt{1+2a}}{2},\frac{-1+\sqrt{1+2a}}{2}\right]\cup]a,+\infty[}$$



27 septembre 2010

EXALG381 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles de a et b pour que $(a+bi)^3$ soit un réel strictement supérieure à 8. Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions.

$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a^3 - 3ab^2 > 8 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = 0 \Rightarrow b\left(\sqrt{3}a+b\right)\left(\sqrt{3}a-b\right)=0 \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $b = 0 \Rightarrow a^3 > 8 \Rightarrow a > 2$

<u>2ème cas</u> : $b = -\sqrt{3}a$

Ce qui se représente par une droite passant par l'origine et de pente $m = -\sqrt{3}$

On remplace dans (1) : $a^3 - 9a^3 > 8 \Rightarrow a < -1$

<u>3ème cas</u> : $b = +\sqrt{3}a$

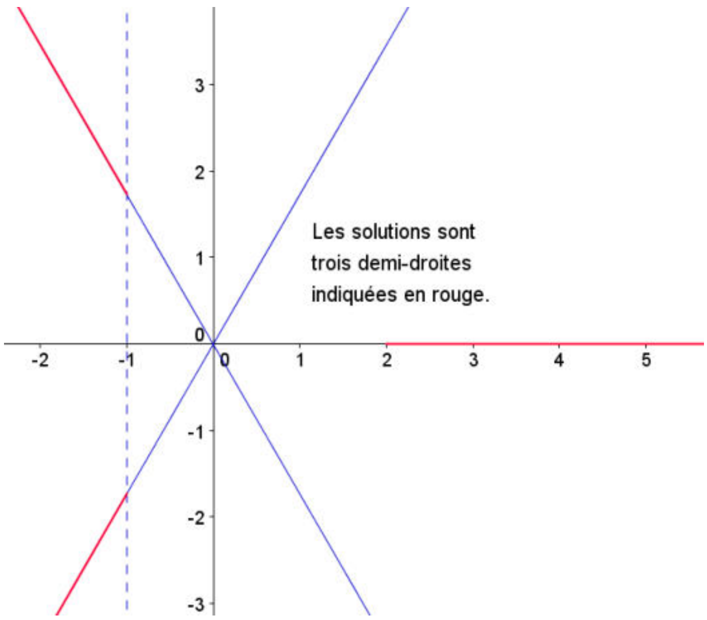
Ce qui se représente par une droite passant par l'origine et de pente $m = +\sqrt{3}$

On remplace dans (1) : $a^3 - 9a^3 > 8 \Rightarrow a < -1$

<u>Conclusion</u> :

$$\begin{cases} b = 0 \quad \text{avec } a > 2 \\ b = \pm 1 \text{ avec } a < -1 \end{cases}$$

Ce qui correspond à trois demi-droites. Voir figure ci-dessous.



---

26 décembre 2010

EXALG382 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m, telle que

$$\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Remarquons que le dénominateur est toujours positif car son discriminant est négatif.

Nous pouvons donc éliminer le dénominateur.

$$\Rightarrow \frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3 \Rightarrow x^2-mx+1-3x^2-3x-3<0 \Rightarrow 2x^2+(m+3)x+2>0$$

Comme le coefficient du x^2est positif, ce trinôme sera toujours positif si son discriminant est ≤ 0

$$\Rightarrow \Delta=(m+3)^2-16=(m-1)(m+7)\leq 0$$

Ce qui donne les solutions : $\boxed{m\in\left]-7,1\right[}$

Le 26 décembre 2010

EXALG383 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Factoriser au maximum le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow[C_2=C_2-C_3]{C_1=C_1-C_3} \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -b-c-a & 2b \\ c+a+b & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1+L_2+L_3} (a+b+c)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^3\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

Le 13 juillet 2010

EXALG384 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} x + y + (m^2-1)z = -m \\ mx + y + 2(m-1)z = -m \\ (1+m)x - my + (m+1)z = m^2+3m+3 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

La résolution de cet exercice nécessite des calculs longs et fastidieux.
On peut raisonnablement se poser la question de l'intérêt de ces difficultés.
A moins, d'une erreur dans l'énoncé........?

Calculons le Δ du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m^2-1 \\ m & 1 & 2(m-1) \\ 1+m & -m & m+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{C_2=C_2-C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ m & 1-m & m-2 \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2=L_2-L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix} = (1-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ -1 & 1 & m \\ 1+m & -1-2m & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3=L_3+L_2} (1-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ -1 & 1 & m \\ m & -2m & m \end{vmatrix} = m(1-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ -1 & 1 & m \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3-L_1]{L_2=L_2+L_1} m(1-m)\begin{vmatrix} 1 & 0 & m^2-2 \\ 0 & 1 & m^2+m-2 \\ 0 & -2 & 3-m^2 \end{vmatrix} = m(1-m)\begin{vmatrix} 1 & m^2+m-2 \\ -2 & 3-m^2 \end{vmatrix}$$

$$= m(1-m)(m^2+2m-1)$$

Les valeurs remarquables à considérer sont donc : $m=0$, $m=1$, $m=1\pm\sqrt{2}$

1er cas : $m=0$

Le système devient : $\begin{cases} x+y-z=0 \\ +y-2z=0 \\ x+z=3 \end{cases} \xrightarrow{L_1-L_2} \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=3 \end{cases}$ système impossible

2ème cas : $m=1$

Le système devient :

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=-1 \\ 2x-y+2z=7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Posons } z=\lambda} \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y=7-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2-\dfrac{2}{3}\lambda \\ y=-3+\dfrac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$ système simplement indéterminé

3ème cas : $m=-1-\sqrt{2}$

Le système devient :

$$\begin{cases} x+y+2\left(1+\sqrt{2}\right)z=1+\sqrt{2} & (1) \\ -\left(1+\sqrt{2}\right)x+y-2\left(2+\sqrt{2}\right)z=1+\sqrt{2} & (2) \\ -\sqrt{2}x+\left(1+\sqrt{2}\right)y-\sqrt{2}z=3-\sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & \rightarrow x+y+2\left(1+\sqrt{2}\right)z=1+\sqrt{2} & (4) \\ (1)-(2) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x+2\left(3+2\sqrt{2}\right)z=0 & (5) \\ \left(1-\sqrt{2}\right)\times(3) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x-y+\left(2-\sqrt{2}\right)z=5-4\sqrt{2} & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4)+(6) & \rightarrow \left(3-\sqrt{2}\right)x+\left(4+\sqrt{2}\right)z=6-3\sqrt{2} & (7) \\ (5) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x+2\left(3+2\sqrt{2}\right)z=0 & (8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(4-\sqrt{2}\right)\times(7) & \rightarrow \left(14-7\sqrt{2}\right)x+14z=30-8\sqrt{2} & (9) \\ \left(3-2\sqrt{2}\right)\times(8) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x+2z=0 & (10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{7}\times(9) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x+2z=\dfrac{30-8\sqrt{2}}{7} \\ (10) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x+2z=0 \end{cases}$$ Système impossible

4ème cas : $m=-1+\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x+y+2\left(1-\sqrt{2}\right)z=1-\sqrt{2} & (1) \\ \left(-1+\sqrt{2}\right)x+y+2\left(-2+\sqrt{2}\right)z=1-\sqrt{2} & (2) \\ \sqrt{2}x+\left(1-\sqrt{2}\right)y+\sqrt{2}z=3+\sqrt{2} & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & \rightarrow x+y+2\left(1-\sqrt{2}\right)z=1-\sqrt{2} & (4) \\ (1)-(2) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x+2\left(3-2\sqrt{2}\right)z=0 & (5) \\ \left(1+\sqrt{2}\right)\times(3) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x-y+\left(2+\sqrt{2}\right)z=5-\sqrt{2} & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (4)+(6) & \rightarrow \left(3+\sqrt{2}\right)x+\left(4-\sqrt{2}\right)z=6-2\sqrt{2} & (7) \\ (5) & \rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)x+2\left(3-2\sqrt{2}\right)z=0 & (8) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(4+\sqrt{2}\right)\times(7) & \rightarrow \left(14+7\sqrt{2}\right)x+14z=20-2\sqrt{2} & (9) \\ \left(3+2\sqrt{2}\right)\times(8) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x+2z=0 & (10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{7}\times(9) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x+2z=\frac{20-2\sqrt{2}}{7} \\ (10) & \rightarrow \left(2+\sqrt{2}\right)x+2z=0 \end{cases}$$

Système impossible

Dans les autres cas

$$\begin{cases} x+y+\left(m^2-1\right)z=-m & (1)\\ mx+y+2\left(m-1\right)z=-m & (2)\\ \left(1+m\right)x-my+\left(m+1\right)z=m^2+3m+3 & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (1)-(2) & \rightarrow (1-m)x+\left[(m-1)(m+1)-2(m-1)\right]z=0 & (4)\\ (2)+\dfrac{1}{m}\times(3) & \rightarrow \left(m+\dfrac{1+m}{m}\right)x+\left(2m-2+\dfrac{m+1}{m}\right)z=-m+\dfrac{m^2+3m+3}{m} & (5)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{1}{m-1}\times(4) & \rightarrow -x+(m-1)z=0 & (6)\\ (5) & \rightarrow \dfrac{m^2+m+1}{m}x+\dfrac{2m^2-m+1}{m}z=\dfrac{3m+3}{m} & (7)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (6) & \rightarrow x=(m-1)z & (8)\\ m\times(7) & \rightarrow \left(m^2+m+1\right)x+\left(2m^2-m+1\right)z=3m+3 & (9)\end{cases}$$

Injectons (8) dans (9): $z=\dfrac{3m+3}{m\left(m^2+2m-1\right)}$ (10)

puis (10) dans (6): $x=\dfrac{3(m+1)(m-1)}{m\left(m^2+2m-1\right)}$ (11)

et finalement (10) et (11) dans (1):

$$y=-m-\frac{3(m+1)(m-1)}{m\left(m^2+2m-1\right)}-\frac{3(m+1)\left(m^2-1\right)}{m\left(m^2+2m-1\right)}=-\frac{m^4+5m^3+5m^2-3m-6}{m\left(m^2+2m-1\right)}$$

Résumé

1) $m=0$ système impossible

2) $m=1$ système simplement indéterminé

3) $m=-1\pm\sqrt{2}$ système impossible

4) dans les autres cas : $\begin{cases} x=\dfrac{3(m+1)(m-1)}{m\left(m^2+2m-1\right)}\\ y=-\dfrac{m^4+5m^3+5m^2-3m-6}{m\left(m^2+2m-1\right)}\\ z=\dfrac{3m+3}{m\left(m^2+2m-1\right)}\end{cases}$

Le 25 octobre 2009

EXALG385 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\log_{10}(7x-9)^2+2\log_{10}(3x-4)=2$$

$$CE:\begin{cases} x\neq \dfrac{9}{7} \\ 3x-4>0\Rightarrow x>\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow x>\dfrac{4}{3}$$

L'équation devient successivement

$$\log_{10}\left[(7x-9)^2(3x-4)^2\right]=\log_{10}10^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (7x-9)^2(3x-4)^2-10^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(7x-9)(3x-4)-10\right]\left[(7x-9)(3x-4)-10\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (21x-55x+26)(21x-55x+46)=0$$

<u>1er cas</u> : $21x-55x+26=0\Rightarrow x=\dfrac{+55\pm\sqrt{55^2-4\times21\times26}}{42}=\begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{13}{21} \text{ à rejeter}\end{cases}$

<u>2ème cas</u> : $21x-55x+46=0\Rightarrow \Delta=55^2-4\times21\times46=-839<0$ Pas de solution.

<u>Conclusion</u> $\boxed{S:\{2\}}$

Le 26 décembre 2010

EXALG386 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b telles que le polynôme

$$P(x) = ax^5 + bx^3 + a^2x + b^2$$

soit divisible par $(x+1)^2$

Appliquons deux fois Horner pour effectuer deux fois par $x+1$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & a & & b & & a^2 & b^2 \\
-1 & & -a & a & -a-b & a+b & -a^2-a-b \\
\hline
 & a & -a & a+b & -a-b & a^2+a+b & b^2-a^2-a-b \\
-1 & & -a & 2a & -3a-b & 4a+2b & \\
\hline
 & a & -2a & 3a+b & -4a-2b & a^2+5a+3b &
\end{array}$$

Le polynôme sera divisible si :

$$\begin{cases} b^2 - a^2 - a - b = 0 \\ a^2 + 5a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow b^2 + 4a + 2b = 0 \Rightarrow a = -\frac{2b+b^2}{4}$$

On remplace dans la deuxième équation :

$$\left(-\frac{2b+b^2}{4}\right)^2 + 5\left(-\frac{2b+b^2}{4}\right) + 3b = 0$$

$$\Rightarrow b\left(b^3 + 4b^2 - 16b + 8\right) = 0$$

$$\Rightarrow b(b-2)\left(b^2 + 6b - 4\right) = 0$$

$$\Rightarrow b(b-2)\left(b+3+\sqrt{13}\right)\left(b+3-\sqrt{13}\right) = 0$$

On a alors :

a	b	$P(x)$
0	0	Solution triviale à rejeter
-2	2	$-2x^5 + 2x^3 + 4x + 4 = (x+1)^2\left(-2x^3 + 4x^2 - 4x + 4\right)$
$-4-\sqrt{13}$	$-3-\sqrt{13}$	$-\left(4+\sqrt{13}\right)x^5 - \left(3+\sqrt{13}\right)x^3 + \left(29+8\sqrt{13}\right)x + 22 + 6\sqrt{13}$ $= (x+1)^2\left(-\left(4+\sqrt{13}\right)x^3 + \left(8+2\sqrt{13}\right)x^2 - \left(15+4\sqrt{13}\right)x + 22 + 6\sqrt{13}\right)$
$-4+\sqrt{13}$	$-3+\sqrt{13}$	$-\left(4-\sqrt{13}\right)x^5 - \left(-3+\sqrt{13}\right)x^3 + \left(29-8\sqrt{13}\right)x + 22 - 6\sqrt{13}$ $= (x+1)^2\left(-\left(4-\sqrt{13}\right)x^3 + \left(8-2\sqrt{13}\right)x^2 - \left(15-4\sqrt{13}\right)x + 22 - 6\sqrt{13}\right)$

Le 14 février 2011

EXALG387 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Déterminer toutes les valeurs réelles du paramètre m pour lesquelles la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3m+1 & m-1 & m^2+1 \\ -5-m & 2m-2 & 2m \\ 2+2m & -m^2+1 & m+1 \end{pmatrix}$$

est inversible

Les valeurs pour lesquelles la matrice n'est pas inversible correspondent à son delta nul.

$$\begin{vmatrix} 3m+1 & m-1 & m^2+1 \\ -5-m & 2m-2 & 2m \\ 2+2m & -m^2+1 & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)(m-1)\begin{vmatrix} 3m+1 & 1 & m^2+1 \\ -5-m & 2 & 2m \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3=L_3+L_1]{L_2=L_2-2L_1}(m+1)(m-1)\begin{vmatrix} 3m+1 & 1 & m^2+1 \\ -7-7m & 0 & 2m-2m^2-2 \\ 3m+3 & 0 & m^2+2 \end{vmatrix}$$

$$=-(m+1)(m-1)\begin{vmatrix} -7(m+1) & 2m-2m^2-2 \\ 3(m+1) & m^2+2 \end{vmatrix}=-(m+1)^2(m-1)\begin{vmatrix} -7 & 2m-2m^2-2 \\ 3 & m^2+2 \end{vmatrix}$$

$$=-(m+1)^2(m-1)(-m^2-6m-8)=(m+1)^2(m-1)(m+2)(m+4)$$

<u>Conclusion</u>

La matrice A est inversible pour tout $m \in \backslash\{-1;1;-2;-4\}$

Pour information, la matrice inverse est :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{(m+2)(m+4)} & -\dfrac{m^2+2}{(m+1)(m+2)(m+4)} & -\dfrac{2m^2-2m+2}{(m+1)^2(m+2)(m+4)} \\ \dfrac{5}{(m-1)(m+2)(m+4)} & -\dfrac{2m-1}{(m+1)(m+2)(m+4)} & -\dfrac{m^3+11m^2+3m+5}{(m-1)(m+1)^2(m+2)(m+4)} \\ \dfrac{1}{(m+2)(m+4)} & \dfrac{3}{(m+2)(m+4)} & \dfrac{7}{(m+1)(m+2)(m+4)} \end{pmatrix}$$

EXALG388 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel *m*, le système

$$\begin{cases} -mx & - & \left(m^2+m\right)y & + & z & = & m^2+m \\ x & + & \left(-m+1\right)y & - & mz & = & -1 \\ -mx & + & \left(m^2+1\right)y & + & z & = & -m-1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Calculons le Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -m & -m^2-m & 1 \\ 1 & -m+1 & -m \\ -m & m^2+1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+L_1} \begin{vmatrix} -m & -m^2-m & 1 \\ 1 & -m+1 & -m \\ 0 & 2m^2+m+1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(2m^2+m+1\right)\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = \left(2m^2+m+1\right)\left(m-1\right)\left(m+1\right)$$

<u>1er cas : $m=1$</u>

Le système devient : $\begin{cases} -x-2y+z=2 \\ x-z=-1 \\ -x+2y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+2z=4 \\ x-z=-1 \end{cases}$ Système impossible

<u>2ème cas : $m=-1$</u>

Le système devient : $\begin{cases} x+z=0 \\ x+2y+z=-1 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$ Système impossible

Dans les autres cas :

$$\begin{cases} -mx - \left(m^2+m\right)y + z = m^2+m & (1) \\ x + \left(-m+1\right)y - mz = -1 & (2) \\ -mx + \left(m^2+1\right)y + z = -m-1 & (3) \end{cases}$$

En faisant $(1)-(3)$, on trouve : $y = -\dfrac{(m+1)^2}{2m^2+m+1}$.

On remplace dans (1) et (2)

$$\begin{cases} -mx + z = m^2 + m - \dfrac{m(m+1)^3}{2m^2+m+1} & (4) \\ x - mz = -1 - \dfrac{(m+1)^2(1-m)}{2m^2+m+1} & (5) \end{cases}$$

En faisant $(4)+m\times(5)$, on trouve :

$$\left(1-m^2\right)z = m^2 - \frac{m(m+1)^3}{2m^2+m+1} - \frac{m(m+1)^2(1-m)}{2m^2+m+1}$$

Après simplification : $z = \dfrac{m^2(3m+1)}{\left(2m^2+m+1\right)(m-1)(m+1)}$

Injectons y et z dans 2 :

$$x = -1 + (-m+1)\frac{(m+1)^2}{2m^2+m+1} + \frac{m^3(3m+1)}{\left(2m^2+m+1\right)(1-m)(m+1)}$$

$$= -\frac{m^2\left(m^3-2m+3\right)}{\left(2m^2+m+1\right)(1-m)(m+1)}$$

Conclusion

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{m^2\left(m^3-2m+3\right)}{\left(2m^2+m+1\right)(1-m)(m+1)} \\ y = -\dfrac{(m+1)^2}{2m^2+m+1} \\ z = \dfrac{m^2(3m+1)}{\left(2m^2+m+1\right)(m-1)(m+1)} \end{cases}}$$

EXALG389 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011, série 1.

Déterminer toutes lesracines (réelles ou complexes) de l'équation complexe en z :

$$iz^2 + (5 - 2i)z + 50 = 0 \qquad (1)$$

où i est l'unité (la particule) imaginaire (ou encore $i^2 = -1$).

(Réponse(s) sous la forme $(a + bi)$ ou (r, φ) au choix.)

Solution proposée par Jan Franc Broeckx

Malgré que ce ne soit pas strictement nécessaire, il est toutefois plus facile pour l'écriture finale de la solution de multiplier l'équation (1) par – i, de sorte que le coefficient de z^2 devienne unité :

$$(1) \Leftrightarrow z^2 - (2 + 5i)z - 50i = 0 \qquad (2)$$

Calcul du discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2 + 5i)^2 + 200i \\ &= 4 + 20i - 25 + 200i \\ &= -21 + 220i \end{aligned}$$

Calcul des racines carrées du discriminant :

$$\begin{aligned} \sqrt{\Delta} = a + bi \quad &\Leftrightarrow \quad (a + bi)^2 = -21 + 220i \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = -21 \\ 2ab = 220 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} (a^2 - b^2)^2 = 441 \\ 4a^2b^2 = 48400 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad (a^2 + b^2)^2 = 48841 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 221 \\ a^2 - b^2 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 10 \\ b = \pm 11 \end{cases} \\ &\text{et} \quad a \text{ et } b \text{ ont le même signe} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \pm(10 + 11i) \end{aligned}$$

Calcul des solutions de l'équation du second degré :

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\big(+(2 + 5i) \pm (10 + 11i)\big) = \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(12 + 16i) = 6 + 8i \\ z_2 = \frac{1}{2}(-8 - 6i) = -4 - 3i \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boldsymbol{S = \{6 + 8i\,, -4 - 3i\}}$$

Le 8 septembre 2010