Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 39

EXALG390 – EXALG399

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx

Novembre 2011

EXALG390 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

Déterminer les valeurs du paramètre réel m, pour que l'équation

$$(m-2)x^4 - 2(m+3)x^2 + (m-1) = 0 \qquad (1)$$

possède 4 racines (dans $\mathbb{R}$) toutes différentes de 0.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Pour que l'équation : $(m-2)\,y^2 - 2(m+3)\,y + (m-1) = 0$ possède deux distinctes strictement positives, il faut et il suffit que

$$\begin{cases} \Delta = 4(9m+7) > 0 \\ m-2 \neq 0 \\ \text{Produit des racines : } \dfrac{m-1}{m-2} > 0 \\ \text{Somme des racines : } \dfrac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases}$$

Ce qui donne le tableau :

m		-3		$-\frac{7}{9}$		1		2	
Δ	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	|	$+$
S	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	|	$+$

On en déduit : $m > 2$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Remarquez d'abord qu'il est nécessaire que $\boldsymbol{m \neq 2}$, sinon l'équation serait du second degré et elle ne pourrait donc pas avoir plus que deux racines réelles.

Posons : $y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$ avec $y > 0$

Alors : $(m-2)y^2 - 2(m+3)y + (m-1) = 0$
(2)

Calcul du discriminant de l'équation en y :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(m+3)^2 - 4(m-2)(m-1) \\ &= 4(m^2 + 6m + 9 - m^2 + 3m - 2) \\ &= 4(9m+7) \end{aligned}$$

(Remarque : je ne calcule *jamais* un Δ', même si b est pair, par économie de formules !)

Pour que l'équation en y possède deux racines réelles et différentes, il faut que $\Delta > 0$ et donc que

$$\boldsymbol{m > -\tfrac{7}{9}}$$
(3)

Dans ce cas (et toujours avec $m \neq 2$), les solutions de l'équation en y sont :

$$y_{1,2} = \frac{2(m+3) \pm 2\sqrt{9m+7}}{2(m-2)} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{m+3+\sqrt{9m+7}}{m-2} \\ y_2 = \dfrac{m+3-\sqrt{9m+7}}{m-2} \end{cases}$$

Discussion :

Pour que l'équation bicarrée en x possède quatre racines réelles, il faut que les deux racines y_1 et y_2 de l'équation en y soient toutes les deux strictement positives.

(a) La racine $\boldsymbol{y_1}$

$$y_1 = \frac{m+3+\sqrt{9m+7}}{m-2}$$

Avec la condition (3), le numérateur est toujours positif. Par conséquent :

$$y_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m} > 2 \qquad (4)$$

(b) La racine $\boldsymbol{y_2}$

$$y_2 = \frac{m+3-\sqrt{9m+7}}{m-2}$$

Calculons les racines du numérateur :

$$\begin{aligned} m+3-\sqrt{9m+7} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m+3 = \sqrt{9m+7} \\ &\quad\quad \text{Avec } m > -\tfrac{7}{9}\text{, les deux membres sont positifs.} \\ &\Leftrightarrow \quad m^2+6m+9 = 9m+7 \\ &\Leftrightarrow \quad m^2-3m+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (m-1)(m-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad m \in \{1\,,2\} \end{aligned}$$

La condition (4) pour que $y_1 > 0$ était $m > 2$. Sous cette même condition, le numérateur et le dénominateur de y_2 sont tous les deux positifs, et on a donc également que $y_2 > 0$.

Conclusion :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation bicarrée (1) possède quatre solutions réelles (différentes) est que $\boldsymbol{m} > 2$.

Les solutions sont alors $x_1 = +\sqrt{y_1}$, $x_2 = -\sqrt{y_1}$, $x_3 = +\sqrt{y_2}$, $x_4 = -\sqrt{y_2}$.

Remarque :

Si nous voulions établir le tableau des signes de y_2 en fonction de m, il faudrait d'abord calculer la limite de cette racine pour $m \to 2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to 2}\frac{m+3-\sqrt{9m+7}}{m-2} &= \lim_{m\to 2}\frac{\left(m+3-\sqrt{9m+7}\right)\left(m+3+\sqrt{9m+7}\right)}{(m-2)\left(m+3+\sqrt{9m+7}\right)}\\
&= \lim_{m\to 2}\frac{(m^2+6m+9)-(9m+7)}{(m-2)\left(m+3+\sqrt{9m+7}\right)}\\
&= \lim_{m\to 2}\frac{(m-2)(m-1)}{(m-2)\left(m+3+\sqrt{9m+7}\right)}\\
&= \lim_{m\to 2}\frac{m-1}{m+3+\sqrt{9m+7}}\\
&= \frac{2-1}{2+3+\sqrt{25}}=\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

On trouve alors :

m	$-\frac{7}{9}$		1		2	
Num	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
Dén	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y_2	$-$	$-$	0	$+$	$+\frac{1}{10}$	$+$

et donc : $y_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > 1$

Le 12 novembre 2011. Modifié le 15 mai 2012.

EXALG391 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la double inéquation suivante:

$$x^2 + 8x - 34 < 2 - x < \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$$x_{1,2} = \frac{1}{4}(-5 \pm 7) = \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x \in \left]-\infty\,;\, -3\right] \cup \left[+\frac{1}{2}\,;\, +\infty\right[} \qquad (1)$$

Inéquation de droite :

$$2 - x < \sqrt{2x^2 + 5x - 3} \qquad (2)$$

(a) Si $x > 2$, alors le membre de gauche est négatif et celui de droite positif. L'inégalité est donc satisfaite, et l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ fait partie de la solution de l'inéquation de droite (2).

(b) Si $x \leq 2$ et $x \notin \left]-3\,;\frac{1}{2}\right[$:

Les deux membres sont positifs ; on peut donc les élever au carré en maintenant le sens de l'inégalité :

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 < 2x^2 + 5x - 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x - 7 > 0$$

$\Delta = 81 + 28 = 109$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{109}$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-9 \pm \sqrt{109}\right) = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} + 9\right) \cong -9{,}72 \\ x_2 = +\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} - 9\right) \cong +0{,}72 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty\,;\, -\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} + 9\right)\right[\cup \left]+\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} - 9\right);\, +2\right]$$

En tenant compte de (a), (b) et la CE, la solution de l'inéquation de droite (2) est :

$$S_1 = \left]-\infty\,;\, -\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} + 9\right)\right[\cup \left]+\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} - 9\right);\, +\infty\right[$$

Inéquation de gauche :

$$x^2 + 8x - 34 < 2 - x \qquad (3)$$

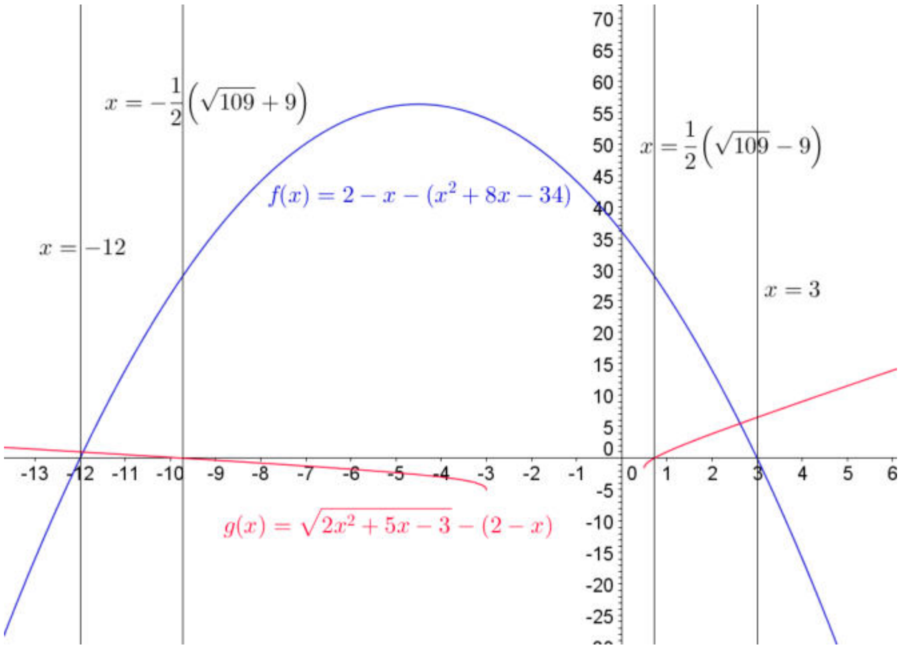
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 12)(x - 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in S_2 =]-12\,;\, +3[$$

Solution de la double inéquation :

$$\boldsymbol{S = S_1 \cap S_2 = \left]-12\,;\, -\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} + 9\right)\right[\cup \left]+\frac{1}{2}\left(\sqrt{109} - 9\right);\, +3\right[}$$



Le 12 novembre 2011

EXALG392 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

Blanche termine ses humanités et convainc ses sœurs, Charlotte et Maïté, de faire avec elle un job d'étudiante pendant l'été. Les trois sœurs parviennent à se faire embaucher dans un garage pour travailler comme mécaniciennes durant quatre semaines pendant l'été.

Le comptable du garage établit ensuite les factures sur base des heures prestées par les trois mécaniciennes. La première semaine, les heures facturées s'élèvent à 61 en tout, pour l'entretien de deux voitures, trois camionnettes et cinq camions. La seconde semaine, le nombre total d'heures prestées s'élève à 76 pour quatre camionnettes, quatre camions et un certain nombre de voitures (le comptable ne parvient pas à lire combien sur la fiche de travail). La troisième semaine le travail se poursuit et 51 heures sont facturées pour six voitures, cinq camionnettes et un camion. Et la quatrième et dernière semaine, 63 heures sont prestées par les trois sœurs pour l'entretien de quatre voitures, sept camionnettes et deux camions.

Sachant que Blanche, Charlotte et Maïté ont travaillé au même rythme pendant les quatre semaines, le comptable voudrait savoir combien de voitures ont été entretenues la seconde semaine. Par ailleurs, le chef d'atelier veut améliorer la planification du travail de son équipe et souhaite savoir combien d'heures sont nécessaires pour l'entretien d'une voiture, d'une camionnette et d'un camion. Pouvez-vous aider le comptable et le chef d'atelier ? Justifiez vos réponses.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Appelons : x = nombre d'heures nécessaires pour l'entretien d'une voiture ;
y = nombre d'heures nécessaires pour l'entretien d'une camionnette ;
z = nombre d'heures nécessaires pour l'entretien d'un camion ;
n = nombre de voitures entretenues la 3e semaine.

Les données se traduisent alors comme suit :

1e semaine : $2x + 3y + 5z = 61$ (1)

2e semaine : $nx + 4y + 4z = 76$ (2)

3e semaine : $6x + 5y + z = 51$ (3)

4e semaine : $4x + 7y + 2z = 63$ (4)

Résolution :

(a) Calcul de x, y, z par la résolution du système linéaire 3×3 formé par les équations (1), (3), (4) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z & = & 61 \\ 6x + 5y + z & = & 51 \\ 4x + 7y + 2z & = & 63 \end{cases} \left|\begin{array}{l} +3 \\ -1 \\ \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} +2 \\ \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y+5z & = & 61 \\ 4y+14z & = & 132 \\ -y+\ \ 8z & = & 59 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ +1 \\ +4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y+5z & = & 61 \\ 4y+14z & = & 132 \\ 46z & = & 368 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \frac{368}{46} = 8 \\ y = \frac{1}{4}(132 - 14.8) = 5 \\ x = \frac{1}{2}(61 - 3.5 - 5.8) = 3 \end{array}\right.$$

(b) Calcul de *n* par l'équation (2) :

$$3n + 4.5 + 4.8 = 76 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{1}{3}(76 - 20 - 32) = 8$$

Réponses :

L'entretien d'une voiture prend **3 h** ; l'entretien d'une camionnette prend **5 h** ; l'entretien d'un camion prend **8 h**.

La seconde semaine, **8 voitures** ont été entretenues.

Le 12 novembre 2011

EXALG393 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 2.

On considère l'équation que voici, dans laquelle p et q sont des paramètres complexes $($et i est l'unité imaginaire$)$:

$$z^4 + (1-2i)z^3 + pz^2 - (1+2i)z + q = 0 \qquad (1)$$

Déterminer la condition sur p et q, c'est $-$ à $-$ dire le couple (p, q), de telle manière que cette équation possède une racine double $($c'est $-$ à $-$ dire deux racines confondues$)$ en $z = i$. Ensuite, pour le couple (p, q) ainsi obtenue, calculer les autres racines (complexes) de l'équation.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

(a) Déterminer le couple (p, q) :

Notons le polynôme complexe comme :

$$P(z) \equiv z^4 + (1-2i)z^3 + pz^2 - (1+2i)z + q$$

Si $z = i$ est une racine double de $P(z)$, alors on a en même temps que $P(i) = 0$ et que $P'(i) = 0$. L'expression pour la dérivée du polynôme est :

$$P'(z) = 4z^3 + 3(1-2i)z^2 + 2pz - (1+2i)$$

Alors, $z = i$ est une racine double de $P(z)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P(i) = 0 \\ P'(i) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i(1-2i) - p - i(1+2i) + q = 0 \\ -4i - 3(1-2i) + 2ip - (1+2i) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2i + q - p = 0 \\ -4 + 2ip = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ip = 2 \\ q = p + 2i - 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} p = -2i \\ q = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $z = i$ est une racine double de $P(z)$ si et seulement si $(p, q) = (-2i\,, -1)$.

(b) Calcul des racines pour $(p, q) = (-2i\,, -1)$.

L'équation devient :

$$P(z) \equiv z^4 + (1-2i)z^3 - 2iz^2 - (1+2i)z - 1 = 0 \qquad (2)$$

Le polynôme est divisible par $(z-i)^2 = z^2 - 2iz - 1$. La division euclidienne donne comme quotient un autre trinôme du second degré en z, dont le coefficient de z^2 est $+1$, et dont le terme indépendant est également $+1$. La seule inconnue est le coefficient complexe de z :

$$\begin{aligned}
P(z) &= (z^2 - 2iz - 1)(z^2 + az + 1) \\
&= z^4 + az^3 + z^2 \\
&\qquad -2iz^3 - 2iaz^2 - 2iz \\
&\qquad\qquad -z^2 \qquad - az - 1 \\
&= z^4 + (a-2i)z^3 - 2iaz^2 - (a+2i)z - 1
\end{aligned}$$

Comparaison avec (2) montre que $a = 1$.

Les deux autres racines complexes de l'équation (2) sont donc les racines de l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Calcul de ces racines : $\Delta = 1 - 4 = -3$ $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}$ $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

L'ensemble des racines de l'équation (2) est donc : $\boldsymbol{S = \left\{ i\, , i\, , -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\, , -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}}$

Le 12 novembre 2011

EXALG394 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante:

$$\log\left(\sqrt{2x+3}\right)+\frac{1}{2}\log(5x+8)-\log(7)=\frac{1}{2}\log(5) \qquad (1)$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $2x+3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{3}{2}=-1{,}5$

$5x+8>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{8}{5}=-1{,}6$

$\Rightarrow \boldsymbol{x>-\frac{3}{2}}$

Sous cette condition, on peut transformer l'équation comme suit :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}.\log(2x+3)+\tfrac{1}{2}.\log(5x+8)=\tfrac{1}{2}.\log(5)+\tfrac{1}{2}.\log(49)\\
&\Leftrightarrow \quad \log\big((2x+3)(5x+8)\big)=\log(5.49)\\
&\Leftrightarrow \quad (2x+3)(5x+8)=5.49\\
&\Leftrightarrow \quad 10x^2+31x+24=245\\
&\Leftrightarrow \quad 10x^2+31x-221=0
\end{aligned}$$

$\Delta=31^2+4.10.221=9801$

$\sqrt{\Delta}=99$

$$x_{1,2}=\frac{1}{20}(-31\pm 99)=\begin{cases} x_1=\frac{68}{20}=\frac{17}{5} \\ x_2=-\frac{130}{20}=-\frac{13}{2} \quad \text{à rejeter}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in \boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{\frac{17}{5}}\right\}$$

Le 12 novembre 2011

EXALG395 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{(1-x)}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $x^6 - 3x^3 + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^3-1)^2 \geq 0$ Toujours vrai !

La base est comprise entre 0 et 1 ; l'équation est donc équivalente à :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^6 - 3x^3 + 1} > 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(x^3-1)^2} > 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & |x^3 - 1| > 1 - x \end{aligned} \tag{1}$$

La fonction valeur absolue dans le membre de gauche est égale à :

$$|x^3 - 1| = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Il faut donc résoudre deux inéquations différentes, selon que $x \geq 1$ ou $x \leq 1$.

(a) $x \geq 1$:

L'inéquation (1) devient :

$$\begin{aligned} & x^3 - 1 > 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 + x - 2 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}_{>0} > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x - 1 > 0 \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $x \geq 1$, la solution est donc $S_1 =]1\,;\,+\infty[$.

(b) $x \leq 1$:

L'inéquation (1) devient :

$$\begin{aligned} & 1 - x^3 > 1 - x \\ \Leftrightarrow \quad & -x^3 > -x \\ \Leftrightarrow \quad & x^3 < x \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^2-1) < 0 \end{aligned}$$

Tableau des signes :

x		-1		0		1
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Dans l'intervalle $x \leq 1$, la solution est donc $S_2 =]-\infty\,;\,-1[\ \cup\ ]0\,;1[$

La solution de l'inéquation (1), et donc aussi de l'inéquation exponentielle, est l'union des deux solutions partielles :

$$\boldsymbol{S} = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty\,;\,-\mathbf{1}\right[\cup \left]\mathbf{0}\,;\mathbf{1}\right[\cup \left]\mathbf{1}\,;\,+\infty\right[$$

Le 26 décembre 2010

EXALG396 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 2.

Pendant leurs examens, Amandine et son frère Benoît, se détendent régulièrement en jouant ensemble. Ce jour-là, ils choisissent un jeu coopératif et jouent trois parties consécutives (les points sont remis à zéro après chaque partie).
Au terme de chaque partie, ils comptent les points de chaque joueur et constatent que :
Pour la première partie, le triple du produit de leurs points égale 24 fois la somme de leurs points.
Pour la seconde partie, le quintuple du produit de leurs points égale 24 fois la somme de leurs points.
Pour la troisième partie, le triple du produit de leurs points égale 12 fois la somme de leurs points.
Par ailleurs, ils notent qu'Amandine a gagné le même nombre de points à la première et à la troisième partie alors que Benoît a gagné le même nombre de points à la deuxième et à la troisième partie. De plus, ils constatent que le nombre de points d'Amandine à la seconde partie égale le nombre de points de Benoît à la première.
Sachant que le but d'un jeu coopératif est de maximiser la somme des points des deux joueurs, quelle a étéla meilleure des trois parties ? Quels ont été les scores ?
Justifiez en donnant le détail de votre raisonnement.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Appelons : a_1 = score d'Amandine à la 1e partie ;
b_1 = score de Benoît à la 1e partie ;
a_2 = score d'Amandine à la 2e partie ;
b_2 = score de Benoît à la 2e partie ;
a_3 = score d'Amandine à la 3e partie ;
b_3 = score de Benoît à la 3e partie.

Les données concernant les scores des trois parties se traduisent alors comme :

$$3a_1b_1 = 24(a_1 + b_1) \quad (1)$$
$$5a_2b_2 = 24(a_2 + b_2) \quad (2)$$
$$3a_3b_3 = 12(a_3 + b_3) \quad (3)$$

Les autres données indiquent que, parmi les 6 variables, il n'y en a que 3 indépendantes, que nous allons représenter comme x, y et z :

$$x = a_1 = a_3$$
$$y = b_2 = b_3$$
$$z = b_1 = a_2$$

En remplaçant les scores dans les équations (1)-(3) par x, y et z, et après simplification, on trouve :

$$\begin{cases} xz &= 8(x+z) & (4) \\ yz &= \frac{24}{5}(y+z) & (5) \\ xy &= 4(x+y) & (6) \end{cases}$$

Résolution

Multiplions l'équation (4) par y : $xyz = 8xy + 8yz$

Multiplions l'équation (6) par z : $xyz = 4xz + 4yz$

Retranchons-les : $0 = 8xy + 4yz - 4xz$

Simplifions : $2xy + yz - xz = 0$

Remplaçons dans cette dernière équation les produits xy, yz et xz par les membres de droite des équations (4)-(6) :

$$2.4(x+y) + \frac{24}{5}(y+z) - 8(x+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x + 8y + \frac{24}{5}y + \frac{24}{5}z - 8x - 8z = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{64}{5}y = \frac{16}{5}z$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y = z$$

Remplaçons ensuite ce résultat dans l'équation (5) :

$$y.4y = \frac{24}{5}(y+4y)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4y^2 = 24y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y(y-6) = 0$$

Puisque $y \neq 0$, il s'en suit que

$$y = 6 \quad \text{et} \quad z = 4y = 24$$

Dans (4) :

$$24x = 8(x+24)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x = x + 24$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 12$$

Réponse

Au 1er jeu, le score d'Amandine était **12** et celui de Benoît **24** ; la somme des points était 36.

Au 2nd jeu, le score d'Amandine était **24** et celui de Benoît **6** ; la somme des points était 30.

Au 3e jeu, le score d'Amandine était **12** et celui de Benoît **6** ; la somme des points était 18.

La meilleure des trois parties était donc **la première**.

Le 12 novembre 2011

EXALG397 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ la double inéquation suivante :

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-5} > \frac{1}{x-3}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $x \in \mathbb{R}\backslash\{1,3,5\}$

Inéquation de droite :

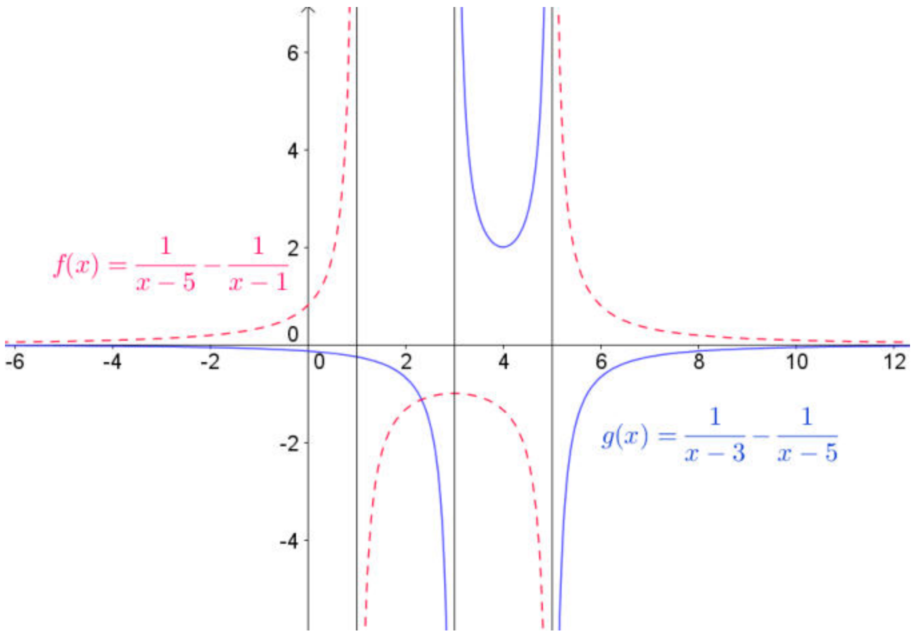
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-5} > \frac{1}{x-3} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-3-x+5}{(x-5)(x-3)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2}{(x-5)(x-3)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-5)(x-3) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in S_1 =]-\infty\,;3[\, \cup\,]5\,;\,+\infty[
\end{aligned}$$

Inéquation de gauche :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-5} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-5-x+1}{(x-1)(x-5)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-4}{(x-1)(x-5)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-5) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in S_2 =]1\,;5[
\end{aligned}$$

Solution de la double inéquation :

$$\boldsymbol{S} = S_1 \cap S_2 =]\mathbf{1}\,;\mathbf{3}[$$



Le 12 novembre 2011

EXALG398 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} y^{(x^2+7x+12)} = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

en détaillant bien votre raisonnement.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $y \in \mathbb{R}_0^+ \backslash \{1\}$

La première équation devient :

$$y^{(x^2+7x+12)} = 1 = y^0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 7x + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)(x+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3, -4\}$$

Pour chacune des deux solutions pour x, on calcule la valeur correspondante de y de la 2e équation. L'ensemble des solutions du problème est alors :

$$S = \{(-3; 9), (-4; 10)\}$$

Le 12 novembre 2011

EXALG399 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2011.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a, si elle(s) existe(nt),
le polynôme (dans $\mathbb{R}$)

$$P(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

est-il divisible par $(x-a)^2$? Justifier votre réponse.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La condition nécessaire et suffisante pour que $P(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$, est que $P(x)$ et $P'(x)$ soient divisibles par $x-a$, et donc que :

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \end{cases}$$

La dérivée de $P(x)$ est :

$$P(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

Les deux conditions deviennent donc

$$\begin{cases} P(a) = 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{a^3}{6} + \dfrac{a^2}{2} + a + 1 = 0 \\ P'(a) = 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{a^2}{2} + a + 1 = 0 \end{cases}$$

En retranchant les deux équations, on trouve :

$$\frac{a^3}{6} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Mais, $a = 0$ n'est ***pas*** une solution de la deuxième équation (qui n'a pas de solutions réelles) !

Par conséquent, **il n'existe aucun *a* réel qui satisfait les conditions du problème**.

Remarque

Personnellement, je ne trouve pas cet exercice d'un niveau d'examen d'entrée…

Le 12 novembre 2011