

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 4

EXALG040 – EXALG049

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG040 - Liège, juillet 1997

Résoudre l'équation :

$$Z^2 = |Z|^2 + i\sqrt{2}|Z|$$

Suggestion : Rechercher  $|Z|$  en égalant les modules des deux membres. En déduire la forme trigonométrique des solutions. Pour obtenir les formes algébriques, noter que  $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$

---

A l'exercice EXALG037, on montre que :  $|Z^2| = |Z|^2$ .

De même, on montre facilement que  $|Z^3| = |Z|^3$ .

Egalons les modules des deux membres :

$$|Z^3| = \sqrt{|Z|^4 + 2|Z|^2} \rightarrow |Z|^3 = |Z|\sqrt{|Z|^2 + 2}$$

1)  $|Z| = 0 \rightarrow a = b = 0$  Solution triviale

$$2) |Z|^2 = \sqrt{|Z|^2 + 2} \rightarrow |Z|^4 - |Z|^2 - 2 = 0$$

$$\rightarrow |Z|^2 = \frac{1 \pm 3}{2} = 2 \quad (\text{On ne retient que la solution } > 0)$$

$$\rightarrow |Z| = \sqrt{2}$$

L'équation de départ devient :

$$Z^3 = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right)$$

$$\rightarrow Z = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right)$$

a) si  $k = 0$

$$\begin{aligned}Z_1 &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right) \\&= \sqrt{2} \left( \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} + i \left( \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} \right) \right) \\&= \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\&= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} i (\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

b) si  $k = 1$

$$\begin{aligned}Z_1 &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) \right) = \\&= \sqrt{2} \left( \cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\&= -1 + i\end{aligned}$$

c) si  $k = 2$

$$\begin{aligned}Z_1 &= \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) \right) \\&= \sqrt{2} \left( \cos\frac{17\pi}{12} + i \sin\frac{17\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \left( -\sin\frac{17\pi}{12} - i \cos\frac{17\pi}{12} \right) \\&= -\sqrt{2} \left( \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right) \\&= -\sqrt{2} \left( \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} + i \left( \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} \right) \right) \\&= -\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\&= -\frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} i (1 + \sqrt{3})\end{aligned}$$

# EXALG041 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1996

Résoudre l'équation :

$$Z^3 = -|Z| \quad Z \in \mathbb{C}$$

---

## Solution proposée par Hugues VERMEIREN

Conseil : Ne jamais oublier que  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ .

$Z = 0$  est une solution évidente. Supposons donc que  $Z \neq 0$ :

- En prenant le module des deux membres, on obtient:

$$|Z^3| = |Z| \iff |Z| (|Z|^2 - 1) = 0 \iff |Z| = 1 \text{ car } Z \neq 0.$$

- L'équation se réécrit donc  $Z^3 = -1$ , dont les solutions sont les racines cubiques de  $-1$ .
- Les solutions sont donc

$$Z_0 = 0, \quad Z_1 = -1, \quad Z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad Z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Autre manière de raisonner...

- Elevons au carré les deux membres de l'équation:

$$\begin{aligned} Z^3 = -|Z| &\implies Z^6 = |Z|^2 \\ &\implies Z^6 = Z \cdot \bar{Z} \\ &\implies Z^5 = \bar{Z} \end{aligned}$$

- Si  $Z$  est solution et si  $\alpha = \arg Z$ , on a donc

$$\begin{aligned} 5\alpha = -\alpha \pmod{2\pi} &\iff 6\alpha = 0 \pmod{2\pi} \\ &\iff 6\alpha = 2k\pi \\ &\iff \alpha = \frac{k\pi}{3} \end{aligned}$$

- En élevant au carré, on ramasse (parfois) des solutions parasites. Les solutions se trouvent parmi les complexes :  $z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) car  $|Z| = 1$ .  
On vérifie alors que seules les valeurs  $k = 1, 3, 5$  fournissent une solution non nulle.

## Solution proposée par Jacques COLLOT

On voit immédiatement que 0 et  $-1$  sont deux solutions de l'équation

Si  $Z = -1$

$$Z^3 = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi)$$

$$\rightarrow Z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$a) k = 0 \rightarrow Z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) k = 1 \rightarrow Z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = -1$$

$$c) k = 2 \rightarrow Z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

Modifié le 6 septembre 2018 (Hugues VERMEIREN)

## EXALG042 – Compléments.

En utilisant les nombres complexes :  
Exprimer en fonction de  $\cos \phi$

$$\cos 2\phi \quad \cos 3\phi \quad \cos 4\phi$$

Démontrer la relation suivante :

$$\cos^4 \phi = \frac{1}{8} \cos 4\phi + \frac{1}{2} \cos 2\phi + \frac{3}{8}$$

---

### Rappel

Si  $Z = \cos \phi + i \sin \phi$  est un nombre complexe,  
son conjugué est  $\bar{Z} = \cos \phi - i \sin \phi$

On déduit facilement les formules suivantes :

$$\cos \phi = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{Z - \bar{Z}}{2}$$

$$Z \cdot \bar{Z} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$Z^n = \cos n\phi + i \sin n\phi \quad \text{et} \quad \bar{Z}^n = \cos n\phi - i \sin n\phi$$

$$\cos n\phi = \frac{Z^n + \bar{Z}^n}{2} \quad \text{et} \quad \sin n\phi = \frac{Z^n - \bar{Z}^n}{2}$$

A ne pas confondre avec :

$$\cos^n \phi = \left( \frac{Z + \bar{Z}}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n \phi = \left( \frac{Z - \bar{Z}}{2} \right)^n$$

A)  $\cos 2\varphi$

$$\begin{aligned}\cos 2\varphi &= \frac{Z^2 + \bar{Z}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2\varphi + 2i \cos\varphi \sin\varphi - \sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 2i \cos\varphi \sin\varphi - \sin^2\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1\end{aligned}$$

B)  $\cos 3\varphi$

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \frac{Z^3 + \bar{Z}^3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\cos^3\varphi + 3i \cos^2\varphi \sin\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi - i \sin^3\varphi \\ &\quad + \cos^3\varphi - 3i \cos^2\varphi \sin\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi + i \sin^3\varphi) \\ &= \frac{1}{2}(2\cos^3\varphi - 6(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\end{aligned}$$

C)  $\cos 4\varphi$

$$\begin{aligned}\cos 4\varphi &= \frac{Z^4 + \bar{Z}^4}{2} \\ Z^4 &= \cos^4\varphi + 4i \cos^3\varphi \sin\varphi - 6\cos^2\varphi \sin^2\varphi - 4i \cos\varphi \sin^3\varphi + \sin^4\varphi \\ \bar{Z}^4 &= \cos^4\varphi - 4i \cos^3\varphi \sin\varphi + 6\cos^2\varphi \sin^2\varphi + 4i \cos\varphi \sin^3\varphi + \sin^4\varphi \\ Z^4 + \bar{Z}^4 &= 2\cos^4\varphi + 2\sin^4\varphi = 2(\cos^4\varphi + (1 - \cos^2\varphi)^2) \\ &= 2(\cos^4\varphi + 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) = 4\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi + 2 \\ \cos 4\varphi &= 2\cos^4\varphi - 2\cos^2\varphi + 1\end{aligned}$$

D)  $\cos^4\varphi$

$$\begin{aligned}\cos^4\varphi &= \left(\frac{Z + \bar{Z}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}(Z^4 + 4Z^3\bar{Z} + 6Z^2\bar{Z}^2 + 4Z\bar{Z}^3 + \bar{Z}^4) \\ &= \frac{1}{16}(Z^4 + 4Z^2 + 6 + 4\bar{Z}^2 + \bar{Z}^4) \\ &= \frac{1}{16}(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 4i \sin 2\varphi + 6 \\ &\quad + 4\cos 2\varphi - 4i \sin 2\varphi + \cos 4\varphi - i \sin 4\varphi) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos 4\varphi + 8\cos 2\varphi + 6) = \frac{1}{8}\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

## EXALG043 – Liège, septembre 1997.

a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que  $\cos 5\varphi$  peut se mettre sous la forme :

$$\cos 5\varphi = \cos \varphi P_4(\cos \varphi)$$

où  $P_4(\cos \varphi)$  est un polynôme du 4<sup>ème</sup> degré en  $\cos \varphi$ .

b) Calculer les racines du polynôme  $P_4$

c) En déduire la valeur de  $\cos \pi/10$ . (Noter que  $\cos 5\pi/10 = 0$ )

---

A)  $\cos 5\varphi$

$$\cos 5\varphi = \frac{Z^5 + \bar{Z}^5}{2}$$

$$Z^5 = \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi$$

$$\bar{Z}^5 = \cos^5 \varphi - 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi - i \sin^5 \varphi$$

$$Z^5 + \bar{Z}^5 = 2 \cos^5 \varphi - 20 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 10 \cos \varphi \sin^4 \varphi$$

$$= 2 \cos \varphi \left( \cos^4 \varphi - 10 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + 5(1 - \cos^2 \varphi)^2 \right)$$

$$= 2 \cos \varphi (16 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi + 5)$$

$$\cos 5\varphi = \cos \varphi (16 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi + 5)$$

B) Racines

$$16 \cos^4 \varphi - 20 \cos^2 \varphi + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \cos^2 \varphi = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$$\rightarrow \cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \quad \cos \varphi_3 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \quad \cos \varphi_4 = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$$

C)  $\cos \frac{\pi}{10}$

Puisque  $\cos 5 \frac{\pi}{10} = 0$ , la valeur cherchée est une des solutions ci-dessus.

$$\rightarrow \cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = 0.951$$



## EXALG044 – Compléments.

a) Démontrer :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

b) En déduire la formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1$$

A) On connaît les développements en série :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right)$$

$$\rightarrow \boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

B) Si  $\theta = \pi \rightarrow \boxed{e^{i\pi} = -1}$

C) Notes

On a aussi :

$$Z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta = r e^{i\theta}$$

On définit également :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

On trouve facilement les formules :

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad Z^n = r^n e^{in\theta}, \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

## EXALG045 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 2000-2001.

On suppose que les racines de  $x^2 + px + q = 0$  ( $p, q \in \mathbb{R}$ ) sont complexes.

Quel est le lieu des racines dans le plan complexe lorsque  $p$  varie,  $q$  étant constant.

---

L'équation a des racines complexes, si :  $\Delta = p^2 - 4q < 0$

$$\text{Soit } Z = a + bi = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \rightarrow 2a + 2ib + p = \pm \sqrt{p^2 - 4q}$$

$$\rightarrow 4a^2 - 4b^2 + p^2 + 4ap + 4ipb + 8iab = p^2 - 4q$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 + ap + q + ib(p + 2a) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + ap + q = 0 \\ p + 2a = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + ap + q = 0 \\ -2a = p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2a^2 + q = 0 \\ -2a = p \end{cases}$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 = q$$

Le lieu est donc :  $x^2 + y^2 = q$ . C'est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{q}$ .

---

## EXALG046 - POLYTECH, UMon, Mons Questions-types 2000-2001

Résoudre et représenter.

$$-Z^2 + (i+1)Z - (i+2) = 0$$

$$Z^2 - (i+1)Z + (i+2) = 0$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4i - 8 = -8 - 2i$$

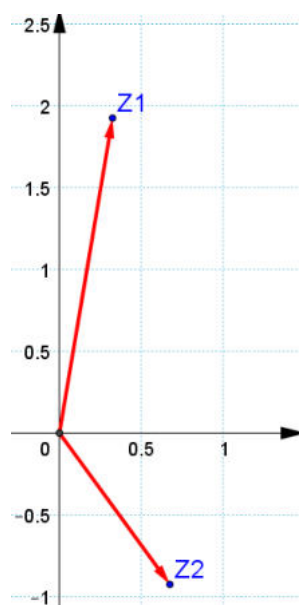
Calcul de  $\sqrt{\Delta}$  :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = -2 \text{ (} x \text{ et } y \text{ de signes contraires)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17} \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\sqrt{17}-4} \\ y = \pm\sqrt{\sqrt{17}+4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.3509 \\ y = -2.8501 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{1}{2}((i+1) + (0.3509 - 2.8501i)) = 0.6755 - 0.9251i$$

$$\Rightarrow Z_2 = \frac{1}{2}((i+1) - (0.3509 - 2.8501i)) = 0.3246 + 1.9251i$$



Modifié le 20 mai 2021

## EXALG047 – Mons, questions-types 2000-2001.

La fonction  $f(Z)$  de la variable complexe  $Z$  est définie par :

$$f(Z) = Z^3 + 4(1-i)Z^2 - 2(2+7i)Z - 16 + 8i = 0$$

Sachant que cette fonction admet une et une seule racine réelle, rechercher les racines de  $f(Z)$  et les représenter dans le plan complexe.

---

Soit  $a$ , la racine réelle. On a :

$$f(a) = a^3 + 4(1-i)a^2 - 2(2+7i)a - 16 + 8i = 0.$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^3 + 4a^2 - 4a - 16 = 0 & (1) \\ -4a^2 - 14a + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \rightarrow 2a^2 + 7a - 4 = 0 \rightarrow a = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{4} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -4 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On teste dans (1) :

$$(-4)^3 + 4(-4)^2 - 4(-4) - 16 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) - 16 \neq 0$$

Donc  $f(Z)$  est divisible par  $Z + 4$

$n$	3	2	1	0
	1	$4 - 4i$	$-4 - 14i$	$-16 + 8i$
$-4$		$-4$	$16i$	$16 - 8i$
	1	$-4i$	$-4 + 2i$	0

$$\rightarrow f(Z) = (Z + 4)(Z^2 - 4iZ - 4 + 2i)$$

Réolvons l'équation du second degré :

$$Z^2 - 4iZ - 4 + 2i = 0 \rightarrow \Delta = (-4i)^2 - 4(-4 + 2i) = -8i$$

Calculons  $\sqrt{\Delta}$

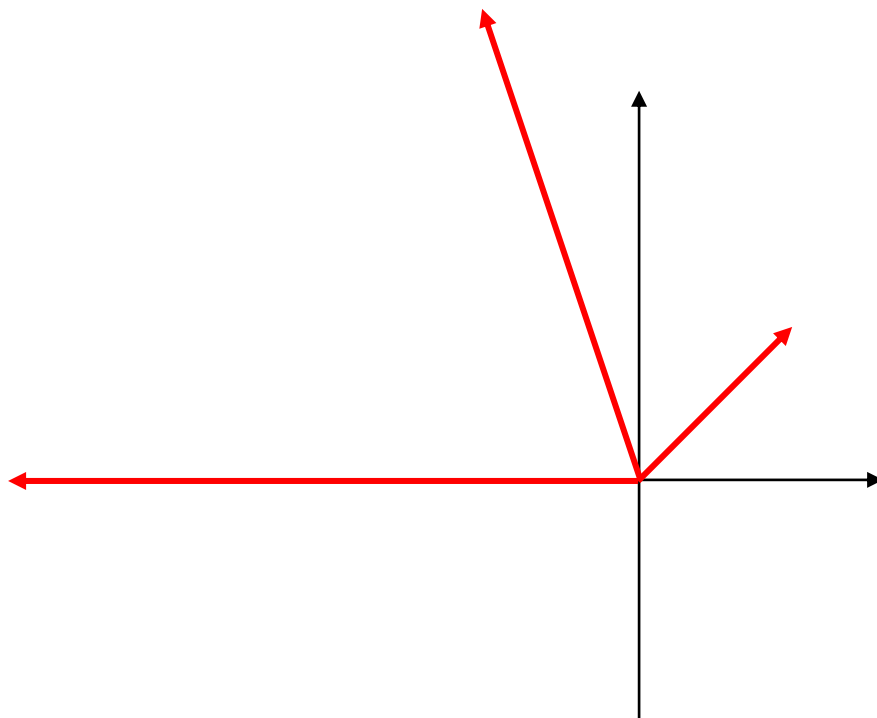
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -8 \end{cases} \quad (x \text{ et } y \text{ de signes contraires}) \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2 - 2i$$

Conclusions:

$$Z_1 = -4$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}(4i + 2 - 2i) = i + 1$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}(4i - 2 + 2i) = -1 + 3i$$



---

Modifié le 21 août 2009

## EXALG048 – Mons, questions-types 2000-2001.

Déterminer les solutions de l'équation suivante dans  $\mathbb{C}$

$$Z + 3\bar{Z} = (2 + i\sqrt{3})|Z|$$

---

On a :

$$(a + bi) + 3(a - bi) = (2 + i\sqrt{3})\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow 4a - 2bi = 2\sqrt{a^2 + b^2} + i\sqrt{3(a^2 + b^2)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4a = 2\sqrt{a^2 + b^2} & \rightarrow a \geq 0 \\ -2b = \sqrt{3(a^2 + b^2)} & \rightarrow b \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a^2 = a^2 + b^2 \\ 4b^2 = 3a^2 + 3b^2 \end{cases} \rightarrow 3a^2 = b^2$$

$$\rightarrow b = \sqrt{3} a \text{ (à rejeter)} \quad \text{et} \quad b = -\sqrt{3} a$$

Conclusion :

$$Z = a(1 - \sqrt{3}i) \text{ avec } a \geq 0$$

C'est une demi-droite dans  $\mathbb{C}$ .

## EXALG049 – Bruxelles, 1991.

Résoudre

$$\begin{cases} \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[3]{y} = \frac{1}{3} \\ 2\log x + 3\log y = 2 + \log 2.5 \end{cases}$$

---

CE :  $x > 0$ ;  $y > 0$

$$\begin{cases} \log x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \log 10^{\frac{1}{3}} \\ \log x^2 y^3 = \log(10^2 \times 2.5) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x^2 y^3 = 250 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ (xy)^2 y = 250 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2.5 \end{cases}$$