Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 40

EXALG400 – EXALG409

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans

Novembre 2011

EXALG400 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2011.

Un capitaine dit à son matelot :

1. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez.
2. Et nous aurons ensemble 63 ans lorsque vous aurez l'âge que j'ai.

Quel est l'âge du capitaine, et également celui du matelot?

Expliquez bien entendu votreraisonnement.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Appelons : $c =$ l'âge actuel du capitaine

$m =$ l'âge actuel du matelot

Quand le capitaine avait l'âge actuel du matelot, chacun des deux avait $c - m$ années de moins ; l'âge du matelot à ce moment-là était donc $m - (c - m)$ et la première donnée se traduit par :

$$c = 2\big(m - (c - m)\big) \qquad (1)$$

Quand le matelot aura l'âge actuel du capitaine, chacun des deux aura $c - m$ années de plus ; l'âge du capitaine à ce moment-là sera donc $c + (c - m)$ et celui du matelot c. La seconde donnée se traduit alors comme :

$$\big(c + (c - m)\big) + c = 63 \qquad (2)$$

Résolution

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = 4m - 2c\\3c - m = 63\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3c = 4m\\3m = 63\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = \frac{63}{3} = 21\\c = \frac{4}{3}m = 28\end{cases}$$

Réponse

L'âge actuel du capitaine est de 28 ans, celui du matelot de 21 ans.

Le 12 novembre 2011

EXALG401 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre réel m, l'équation

$$|mx| + (x-1)^2 = 1$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

L'équation est équivalente à la suivante :

$$x^2 - 2x + |mx| = 0 \qquad (1)$$

(1) $m = 0$

L'équation devient $x^2 - 2x = 0$ avec comme solutions $S = \{0, 2\}$.

(2) $m \neq 0$

L'équation est équivalente à la suivante :

$$x^2 + |mx| = 2x$$

Le membre de gauche est positif, donc celui de droite doit l'être aussi : $x \geq 0$.

Donc :

$$x^2 + |m|x = 2x \qquad \text{avec } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + |m| - 2) = 0 \qquad \text{avec } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 2 - |m| \text{ si } |m| < 2$$

Résumé final :

Si $-2 < m < +2$, alors $S = \{0, 2 - |m|\}$;

si $m \leq -2$ ou $m \geq 2$, alors $S = \{0\}$

Le 16 janvier 2012

EXALG402 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Factoriser au maximum le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-b^2 & b-a^2 & b-b^2 \\ b-c^2 & c-b^2 & c-c^2 \\ c-a^2 & a-c^2 & a-a^2 \end{vmatrix} \qquad (a,b,c\in\mathbb{R})$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\begin{vmatrix} a-b^2 & b-a^2 & b-b^2 \\ b-c^2 & c-b^2 & c-c^2 \\ c-a^2 & a-c^2 & a-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b^2-a^2 & b-b^2 \\ b-c & c^2-b^2 & c-c^2 \\ c-a & a^2-c^2 & a-a^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C1 \leftarrow C1-C3 \\ C2 \leftarrow C2-C3 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b+c-a^2-b^2-c^2 \\ b-c & c^2-b^2 & c-c^2 \\ c-a & a^2-c^2 & a-a^2 \end{vmatrix} \qquad L1 \leftarrow L1+L2+L3$$

$$= (a+b+c-a^2-b^2-c^2)\begin{vmatrix} b-c & c^2-b^2 \\ c-a & a^2-c^2 \end{vmatrix} \qquad \text{Laplace}$$

$$= (a^2+b^2+c^2-a-b-c)(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+c \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \qquad \text{Factoriser}$$

$$= (a^2+b^2+c^2-a-b-c)(b-c)(c-a)(a-b)$$

Remarque :

On peut vérifier « on-line » ce résultat en allant sur

http://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html

en choisissant ensuite « Determinants » et en entrant la commande

det {{a-b^2, b-a^2, b-b^2}, {b-c^2, c-b^2, c-c^2}, {c-a^2, a-c^2, a-a^2}}

Le 16 janvier 2012

EXALG403 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx + m^2y = 1 \\ m^2x + my = m \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système, et dans chaque cas, interpréter géométriquement le système et les ensembles de solutions obtenus.

b) Même question dans $\mathbb{R}^3$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) Dans $\mathbb{R}^2$:

Calculons le déterminant de la matrice des coefficients :

$$\det\mathcal{A} = \begin{vmatrix} m & m^2 \\ m^2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m^4 = m^2(1 - m^2)$$

$$\det\mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1, 0, +1\}$$

① $m = +1$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Il est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \{(x\,;1 - x) \| x \in \mathbb{R}\}$.

Le système représente deux droites confondues, et la solution est cette même droite.

② $m = -1$

Le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Il est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \{(x\,;1 + x) \| x \in \mathbb{R}\}$.

Le système représente deux droites confondues, et la solution est cette même droite.

③ $m = 0$

Le système devient :

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{Absurde !}$$

Il est **impossible** et donc $S = \emptyset$.

④ $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$

Le système est **déterminé** et donc cramerien :

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 1 & m^2 \\ m & m \end{vmatrix} = m - m^3 = m(1 - m^2)$$

$$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ m^2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m^2 = 0$$

avec comme solution $S = \left\{\left(\frac{1}{m} ; 0\right)\right\}$.

Le système représente deux droites sécantes et la solution représente les coordonnées de leur point d'intersection.

Le 16 janvier 2012

EXALG404 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Déterminer tous les polynômes à coefficients réels en la variable réelle x, du 5e degré, divisibles par x^2+1, dont le terme indépendant est nul, et dont le reste de la division par $(x+1)$ est égal à la fois au reste de la division par $(x-3)$ et au reste de la division par $(x+3)$.

(Note : Si vous le désirez, vous pouvez laisser la réponse finale sous forme factorisée.)

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Un polynôme à coefficients réels en la variable réelle x, du 5e degré, divisible par x^2+1, et dont le terme indépendant est nul, est de la forme :

$$P(x) = ax(x^2+1)(x^2+bx+c) \quad \text{avec } a \neq 0$$

Les deux autres conditions s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} P(-1) = P(+3) \\ P(-1) = P(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a(1-b+c) = +30a(9+3b+c) \\ -2a(1-b+c) = -30a(9-3b+c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-b+c = -15(9+3b+c) = -135-45b-15c \\ 1-b+c = +15(9-3b+c) = +135-45b+15c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-b+c = -45b & (\text{additionner}) \\ 0 = 135+15c & (\text{soustraire}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -9 \\ b = -\dfrac{c+1}{44} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -9 \\ b = \dfrac{2}{11} \end{cases}$$

Le polynôme peut donc s'écrire comme :

$$P(x) = kx(x^2+1)(11x^2+2x-99) \quad \text{avec } k = \frac{a}{11} \neq 0$$

ou bien :

$$P(x) = k(11x^5+2x^4-88x^3+2x^2-99x)$$

Remarque :

On peut vérifier que le reste de la division de $11x^5+2x^4-88x^3+2x^2-99x$ par $x+1$, par $x-3$ et par $x+3$ est à chaque fois égal à 180.

Le 16 janvier 2012

EXALG405 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre réel m, l'équation

$$e^{3x} + \frac{m}{e^{mx}} = 0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

L'équation est équivalente à la suivante :

$$e^{3x} = -me^{-mx}$$

L'exponentielle étant toujours positive, il faut que $m < 0$.

Pour simplifier l'écriture, posons $p = -m$ avec $p > 0$. L'équation devient :

$$\begin{aligned} e^{3x} = pe^{px} &\Leftrightarrow e^{3x} = e^{\ln p}e^{px} \\ &\Leftrightarrow e^{3x} = e^{px+\ln p} \\ &\Leftrightarrow 3x = px + \ln p \\ &\Leftrightarrow (3-p)x = \ln p \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln p}{3-p} = \frac{\ln(-m)}{3+m} \end{aligned}$$

Conclusion :

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation exponentielle, alors :

si $m \geq 0$, alors $S = \emptyset$,

si $m < 0$, alors $S = \left\{\frac{\ln(-m)}{3+m}\right\}$.

Le 16 janvier 2012

EXALG406 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Déterminer toutes les valeurs réelles des paramètres a et b pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & a^2-b^2 \\ a^3 & b^3 & a^3+b^3 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Déterminer l'inverse de cette matrice dans le cas où $(a, b) = (1, -2)$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calculons d'abord le déterminant de cette matrice :

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} a & b & a+b \\ a^2 & b^2 & a^2-b^2 \\ a^3 & b^3 & a^3+b^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & -2b^2 \\ a^3 & b^3 & 0 \end{vmatrix} && \text{C3} \leftarrow \text{C3} - \text{C1} - \text{C2} \\
&= 2b^2 \begin{vmatrix} a & b \\ a^3 & b^3 \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\
&= 2ab^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} && \text{Factoriser} \\
&= 2ab^3(b^2 - a^2) && \text{Sarrus} \\
&= 2ab^3(b-a)(b+a)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A}\ \textbf{inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{A} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0 \ \&\ b \neq 0 \ \&\ b \neq a \ \&\ b \neq -a$$

Dans le cas où $(a, b) = (1, -2)$, la matrice devient :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det \mathcal{A} = 2.1.(-8)(-3)(-1) = -48$$

La matrice adjointe Adj $\mathcal{A}$ est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj}\,\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -52 & 4 & -12 \\ -6 & -6 & 6 \\ 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -52 & -6 & 10 \\ 4 & -6 & 2 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \text{Adj}\,\mathcal{A} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 26 & 3 & -5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Le 16 janvier 2012

EXALG407 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Déterminer toutes les valeurs complexes du paramètre non nul m pour qu'une des racines du polynôme

$$m^2x^3 - x^2 + m^2x - 1$$

soit la moyenne arithmétique des autres.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le polynôme peut être factorisé comme suit :

$$P(x) = (x^2+1)(m^2x-1)$$

Les racines sont :

$$x_1 = +i\ ,\ \ x_2 = -i\ ,\ \ x_3 = \frac{1}{m^2}$$

Pour qu'une des racines soit la moyenne arithmétique des deux autres, il faut que

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_1) = x_2 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(x_3 + x_2) = x_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{m^2} + i = -2i \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m^2} - i = +2i$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{m^2} = \pm 3i$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 = \pm\frac{1}{3i} = \mp\frac{i}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \pm\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad m = \pm\frac{\sqrt{-i}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in \left\{+\frac{1+i}{\sqrt{6}}, -\frac{1+i}{\sqrt{6}}, +\frac{1-i}{\sqrt{6}}, -\frac{1-i}{\sqrt{6}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in \left\{+\frac{\sqrt{6}}{6}(1+i), -\frac{\sqrt{6}}{6}(1+i), +\frac{\sqrt{6}}{6}(1-i), -\frac{\sqrt{6}}{6}(1-i)\right\}$$

Le 16 janvier 2012

EXALG408 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx - m^2y + (m - m^3)z & = & m \\ m^2x + m^4y + (m^2 - m^4)z & = & -m \\ 2m^3x + m^6y + (m^3 - m^5)z & = & 0 \end{cases}$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Si $m = 0$, chacune des trois équations devient l'identité $0 = 0$; le système est alors **triplement indéterminé**, et tout triple de trois réels en est une solution : $S = \{(x, y, z) \| x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Si $m \neq 0$, on peut diviser les deux premières équations par m, et la troisième équation par m^3. Le système devient alors :

$$\begin{cases} x - my + (1 - m^2)z & = & 1 \\ mx + m^3y + m(1 - m^2)z & = & -1 \\ 2x + m^3y + (1 - m^2)z & = & 0 \end{cases}$$

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 - m^2 \\ m & m^3 & m(1 - m^2) \\ 2 & m^3 & 1 - m^2 \end{vmatrix} &= (1 - m^2) \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & m^3 & m \\ 2 & m^3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m(1 - m^2) \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 2 & m^3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m(1 - m^2) \begin{vmatrix} 0 & -m - m^2 & 0 \\ 1 & m^2 & 1 \\ 2 & m^3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m(1 - m^2)m(m + 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= m(m^2 - 1)m(m + 1) \\ &= m^2(m - 1)(m + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\det \mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{-1, 0, +1\}$$

Si $m = +1$, le système devient :

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ x + y & = & -1 \\ 2x + y & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ -1 = 0 \end{cases} \quad \text{Absurde !}$$

Le système est donc **impossible** et $S = \emptyset$.

Si $m = -1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + y & = & 1 \\ -x - y & = & -1 \\ 2x - y & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Le système est donc **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, z\right) \middle\| z \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, +1\}$, le système est **déterminé**, et donc cramerien :

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1-m^2 \\ -1 & m^3 & m(1-m^2) \\ 0 & m^3 & 1-m^2 \end{vmatrix} = (1-m^2)\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ -1 & m^3 & m \\ 0 & m^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-m^2)\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & m^3-m & m+1 \\ 0 & m^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-m^2)\begin{vmatrix} m^3-m & m+1 \\ m^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(1-m^2)\begin{vmatrix} m^2-1 & m+1 \\ m^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(1-m^2)(m^2-1-m^3-m^2)$$

$$= m(m^2-1)(m^3+1)$$

$$= m(m-1)(m+1)^2(m^2-m+1)$$

$$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m^2 \\ m & -1 & m(1-m^2) \\ 2 & 0 & 1-m^2 \end{vmatrix} = (1-m^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & -1 & m \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-m^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m+1 & 0 & m+1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (m^2-1)\begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(m^2-1)(m+1)$$

$$= -(m-1)(m+1)^2$$

$$\det \mathcal{A}_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m & m^3 & -1 \\ 2 & m^3 & 0 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & m^2 & -1 \\ 2 & m^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m+1 & m^2-1 & 0 \\ 2 & m^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\begin{vmatrix} m+1 & m^2-1 \\ 2 & m^2 \end{vmatrix}$$

$$= m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & m-1 \\ 2 & m^2 \end{vmatrix}$$

$$= m(m+1)(m^2-2m+2)$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det \mathcal{A}_x}{\det \mathcal{A}} = \dfrac{m(m-1)(m+1)^2(m^2-m+1)}{m^2(m-1)(m+1)^2} = \dfrac{m^2-m+1}{m} \\ y = \dfrac{\det \mathcal{A}_y}{\det \mathcal{A}} = \dfrac{-(m-1)(m+1)^2}{m^2(m-1)(m+1)^2} = -\dfrac{1}{m^2} \\ z = \dfrac{\det \mathcal{A}_z}{\det \mathcal{A}} = \dfrac{m(m+1)(m^2-2m+2)}{m^2(m-1)(m+1)^2} = \dfrac{m^2-2m+2}{m(m-1)(m+1)} \end{cases}$$

Résumé final :

$m = 0$	Système triplement indéterminé	$S = \{(x, y, z) \Vert x, y, z \in \mathbb{R}\}$
$m = +1$	Système impossible	$S = \emptyset$
$m = -1$	Système simplement indéterminé	$S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, z\right) \middle\Vert z \in \mathbb{R}\right\}$
$m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, +1\}$	Système déterminé	$S = \left\{\left(\frac{m^2-m+1}{m} ; -\frac{1}{m^2} ; \frac{m^2-2m+2}{m(m-1)(m+1)}\right)\right\}$

EXALG409 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2011.

Sachant que les nombres réels a et b vérifient $a^4+b^4=7$ et $ab=-1$, on demande de montrer que les nombres a^2+b^2, a^6+b^6 et $a^{10}+b^{10}$ sont tous entiers et d'en calculer les valeurs.
Existe-t-il une technique pour calculer $f(n)=a^n+b^n$ pour tout entier naturel n?
Est-ce que $f(n)$ est toujours entier? Peut-on déterminer les réels a^2, b^2, a et b

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Solution. On a d'abord

$$(a^2+b^2)^2 = a^4+b^4+2a^2b^2 = 7+2 = 9\,,$$

d'où, les carrés étant positifs, $f(1) = a^2+b^2 = 3$. De ceci et de $a^2b^2 = 1$, on déduit que a^2 et b^2 sont les racines du trinôme x^2-3x+1; on a donc:

$$\{a^2,\, b^2\} \;=\; \{\frac{3+\sqrt{5}}{2},\, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\}\,. \tag{9}$$

On a aussi $f(0) = a^0+b^0 = 1+1 = 2$.
On pourrait se servir des valeurs données en (9) pour calculer a^6, a^8, a^{10} et b^6, b^8, b^{10} mais, dans la mesure où on demande seulement les sommes $a^{2n}+b^{2n}$, il est plus simple de procéder comme suit.
On a $(a^2+b^2)(a^4+b^4) = a^6+b^6+a^2b^2(a^2+b^2)$, d'où $21 = (a^6+b^6)+3$ et $a^6+b^6 = 18$. De même, par exemple, $(a^6+b^6)(a^4+b^4) = (a^{10}+b^{10})+a^4b^4(a^2+b^2)$, d'où $126 = (a^{10}+b^{10})+3$ et $a^{10}+b^{10} = 123$.

Plus généralement, si $n \geq 1$, on a

$(a^{2n}+b^{2n})(a^2+b^2) = (a^{2n+2}+b^{2n+2})+(a^{2n}b^2+b^{2n}a^2) = (a^{2n+2}+b^{2n+2})+a^2b^2(a^{2n-2}+b^{2n-2})$,

d'où

$$3f(n) = f(n+1) + f(n-1)\,,$$

c'est-à-dire

$$f(n+1) = 3f(n) - f(n-1)\,.$$

Si on tient compte des conditions de départ

$$f(0) = 2\,,\ f(1) = 3\,,$$

on voit que $f(n)$ est toujours entier et facile à calculer; on a en particulier $f(3) = 18$, $f(4) = 47$ et $f(5) = 123$.
Enfin, on a aussi $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1$, d'où $a + b = \pm 1$ et, en tenant compte de $ab = -1$,

$$\{a,\, b\} \;=\; \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\} \ \text{ ou } \ \{a,\, b\} \;=\; \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}\,.$$

Le 12 novembre 2011