

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 41

EXALG410 – EXALG419

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2012

EXALG410 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2011.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^4 + |z| = 0$

Suggestion : Calculer d'abord la valeur de $|z|$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

Solution. De $z^4 = -|z|$ on tire $|z|^4 = |z^4| = |-|z|| = |z|$; les seules valeurs possibles pour $|z|$ sont donc 0 et 1. Si $|z| = 0$, on a nécessairement $z = 0$ qui est une première solution de l'équation posée. Si $|z| = 1$, on peut poser $z = \text{cis } \theta$ et l'équation se réécrit

$$\text{cis } 4\theta + 1 = 0$$

ou encore

$$\text{cis } 4\theta = -1 = \text{cis } \pi$$

dont on tire

$$4\theta = \pi + 2k\pi$$

ou encore

$$\theta = (2k + 1)\pi/4.$$

En résumé, l'ensemble des solutions est

$$\left\{0, \text{cis } \frac{\pi}{4}, \text{cis } \frac{3\pi}{4}, \text{cis } \frac{5\pi}{4}, \text{cis } \frac{7\pi}{4}\right\} = \left\{0, \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, -\frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}, -\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Le 12 novembre 2011

EXALG411 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2 \\ 4x + 3ay + az = 4 \\ (6-3a)y + (a-2)z = 0 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

Solution. Si $a = 2$, la troisième équation disparaît ($0 = 0$); la deuxième devient le double de la première et est donc inutile. La première équation devient $2x + 3y + z = 2$. Les solutions du système sont $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 2 - 2\lambda - 3\mu)$, où λ et μ sont des réels quelconques.

Si $a \neq 2$, le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3y + (a-1)z = 2; \\ 4x + 3ay + az = 4; \\ 3y - z = 0. \end{cases}$$

ou encore, en éliminant z dans les deux premières équations, à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2; \\ 4x + 6ay = 4; \\ 3y - z = 0. \end{cases}$$

La deuxième équation est inutile et le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x + 3ay = 2; \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont $(x, y, z) = \left(\frac{2-3a\lambda}{2}, \lambda, 3\lambda\right)$, où λ est un réel quelconque.

Le 16 janvier 2012

EXALG412 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$2(\log x)^3 + \frac{\log(x^{20})}{10} - \frac{(\log(x^{\sqrt{20}}))^2}{4} = 0$$

La notation \log désigne le logarithme en base 10

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

Solution. Le réel x doit être strictement positif. En tenant compte de la propriété connue

$$\log(x^y) = y \log x,$$

l'équation peut se récrire en

$$2(\log x)^3 + 2 \log x - 5(\log x)^2 = 0,$$

puis en

$$(\log x) [2(\log x)^2 + 2 - 5 \log x] = 0.$$

Le premier facteur s'annule pour $x = 1$; le second est un polynôme du second degré en $\log x$ qui s'annule si $\log x$ vaut 2 ou $1/2$, c'est-à-dire si $x = 100$ ou $x = \sqrt{10}$.

Le 16 janvier 2012

EXALG413 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2011.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation

$$\frac{x + \sqrt{\frac{x+1}{2}}}{\sqrt{\frac{x+1}{2}}} \leq x+1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

Solution. L'inéquation est définie sur l'intervalle $] -1 : +\infty[$. Elle peut se récrire en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}} + 1 \leq x + 1,$$

ou encore en

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)/2}} \leq x.$$

Si $x = 0$, l'inégalité est vérifiée.

Si $x > 0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \geq 1$$

ou encore en

$$x + 1 \geq 2,$$

c'est-à-dire $x \geq 1$.

Si $-1 < x < 0$, l'inéquation se simplifie en

$$\sqrt{(x+1)/2} \leq 1$$

ou encore en

$$x + 1 \leq 2,$$

qui est toujours vrai.

L'ensemble des solutions est donc

$$]-1 : 0] \cup [1 : +\infty[.$$

Le 16 janvier 2012

EXALG414 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$4z^5 - 12z^2 + \frac{9}{z} = 0$$

On donnera la forme algébrique et la forme trigonométrique de chaque solution

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

L'équation peut se récrire

$$\frac{1}{z}(2z^3 - 3)^2 = 0$$

Le premier facteur ne s'annule jamais; le second facteur s'annule si et seulement si $z^3 = \frac{3}{2}$.

Les solutions sont donc les trois racines du polynôme $2z^3 - 3$, c'est-à-dire, en posant

$r = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, les nombres r , $r(-1 + i\sqrt{3})$ et $r(-1 - i\sqrt{3})$.

Les formes trigonométriques sont r , $r \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $r \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Le 28 aout 2012

EXALG415 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

La suite f et la matrice Φ de Fibonacci sont définies par les égalités :

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pour } n = 2, 3, \dots; \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a $\Phi^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$

En déduire l'égalité $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

La première égalité se démontre facilement par récurrence. Elle est évidente pour $n = 1$ et, si elle est vraie pour n , elle est encore vraie pour $n + 1$ car

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

La seconde égalité est évidente pour $n = 0$. Pour $n > 0$, on développe l'égalité $\Phi^{2n} = \Phi^n \Phi^n$; on obtient ainsi $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ et aussi $f_{2n} = (f_{n+1} + f_{n-1}) f_n$.

En effet,

$$\begin{pmatrix} f_{2n+1} & f_{2n} \\ f_{2n} & f_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1}^2 + f_n^2 & f_n f_{n+1} + f_n f_{n-1} \\ f_n f_{n+1} + f_n f_{n-1} & f_n^2 + f_{n-1}^2 \end{pmatrix}$$

Le 28 aout 2012. Modifié le 7 septembre 2014 (Morgan Diepart)

EXALG416 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

Déterminer la valeur de k sachant que le polynôme $x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + kx^2 + (2 + 5\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$ admet quatre racines réelles x_1, x_2, x_3, x_4 telles que $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

On calculera les racines

Remarque : On peut souvent simplifier $\sqrt{a \pm b\sqrt{2}}$ en cherchant x, y tels que

$$(x \pm y\sqrt{2})^2 = a \pm b\sqrt{2}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

La somme des quatre racines vaut l'opposé du coefficient de x^3 , c'est-à-dire $2\sqrt{2}$; on a donc $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \sqrt{2}$. le polynôme est donc égal au produit des deux trinômes $x^2 - \sqrt{2}x + a$, de racines x_1 et x_2 , et $x^2 - \sqrt{2}x + b$, de racines x_3 et x_4 , pour des valeurs à déterminer de a et b .

Ce produit vaut : $x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + (a + 2 + b)x^2 - \sqrt{2}(a + b)x + ab$.

On en déduit les trois égalités suivantes:

$$k = a + 2 + b; \quad 2 + 5\sqrt{2} = -\sqrt{2}(a + b); \quad -2\sqrt{2} = ab.$$

De la deuxième égalité on déduit $2\sqrt{2} + 10 = -2(a + b)$; d'où $a + b = -(\sqrt{2} + 5)$ et $k = -(\sqrt{2} + 3)$.

De plus a et b sont les racines du trinôme $X^2 + (\sqrt{2} + 5)X - 2\sqrt{2}$;

le discriminant vaut $\Delta = 27 + 18\sqrt{2} = (3 + 3\sqrt{2})^2$

et les racines valent $\frac{-(\sqrt{2} + 5) \pm (3 + 3\sqrt{2})}{2}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} - 1$ et $-2(\sqrt{2} + 2)$.

On trouve alors facilement

$$\{x_1, x_2\} = \{1, \sqrt{2} - 1\} \quad \text{et} \quad \{x_3, x_4\} = \{\sqrt{2} + 2, -2\}$$

Le 28 août 2012

EXALG417 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$|x-1||x+2| > |x+1||x-2| \quad \text{CE : } x \neq -1, x \neq -2$$

$$|x^2 + x - 2| > |x^2 - x - 2|$$

x	-2	-1	1	2
$x^2 + x - 2$	+ /	- /	- 0 +	+ +
$x^2 - x - 2$	+ /	+ /	- - -	0 +
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i> <i>V</i>

$$I: \quad x^2 + x - 2 > x^2 - x - 2 \Rightarrow x > 0 \quad \text{Impossible}$$

$$II: \quad -(x^2 + x - 2) > x^2 - x - 2 \Rightarrow 0 < 2(x^2 - 2) \quad S_{II} :]-\sqrt{2}, -1[$$

$$III: \quad -(x^2 + x - 2) > -(x^2 - x - 2) \Rightarrow 0 > x \quad S_{III} :]-1, 0[$$

$$IV: \quad x^2 + x - 2 > -(x^2 - x - 2) \Rightarrow 2(x^2 - 2) > 0 \quad S_{IV} :]\sqrt{2}, 2[$$

$$V: \quad \text{Idem } I \quad S_V : [2, \rightarrow$$

$$S =]-\sqrt{2}, -1[\cup]-1, 0[\cup]\sqrt{2}, 2[\cup [2, \rightarrow$$

Le 3 septembre 2012

EXALG418 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Résoudre

$$\frac{3+i}{z+i} - \frac{1-3i}{z-i} = 2(z-1)$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$2z + 4iz - 4i - 2 = 2(z-1)(z^2 + 1) \quad \text{CE: } z \neq \pm i$$

$$2(z-1)(1+2i) = 2(z-1)(z^2 + 1)$$

$$(z-1)(z^2 - 2i) = 0$$

$$1) z = 1$$

$$2) z^2 = 2i$$

$$z^2 = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z = \pm\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = \pm\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z = \pm(1+i)$$

$$S = \{1, 1+i, -1-i\}$$

Le 3 septembre 2012

EXALG419 – EPL, UCL, LLN, juillet 2011 série 1.

Déterminer le polynôme $P(x)$ de degré 4 à coefficients réels tel que :

1) $P(x)$ est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un certain polynôme.

2) $P(x) - P(-x) = 4x(x^2 - 2)$

3) $x^4 P(x^5)$ est divisible par $(x - 1)$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $P(x) = (ax^2 + bx + c)^2$

2) $P(x) - P(-x) = (ax^2 + bx + c)^2 - (ax^2 - bx + c)^2$
 $= (2ax^2 + 2c)(2bx)$ Différence de 2 carrés.
 $= 4x(abx^2 + bc) = 4x(x^2 - 2)$

D'où $ab = 1$ et $bc = -2$ (i)

3) $f(x) = x^4 P(x^5)$ est divisible par $(x - 1)$ si $f(1) = 0$ c'est-à-dire $P(1) = 0$

$\Rightarrow P(1) = (a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$ (ii)

(i) et (ii) impliquent que :

$$a = \frac{1}{b}, \quad c = -\frac{2}{b}, \quad \frac{1}{b} + b - \frac{2}{b} = 0 \Rightarrow b = \pm 1$$

$P(x) = (x^2 + x - 2)^2$ ou $(-x^2 - x + 2)^2$

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Le 3 septembre 2012