Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 43

EXALG430 – EXALG439

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Novembre 2012

EXALG430 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2012.

Soit a un réel non nul et $P(x)$ un polynôme sur $\mathbb{R}$ tel que le reste de la division de $P(x)$ par $2x+1$ est a et le reste de la division de $P(x)$ par $ax+1$ est 2.
Peut-on déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)(ax+1)$?
Si oui, quel est il?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Si $a=2,$ on sait seulement que le reste de la division de $P(x)$ par $2x+1$ est 2, ce qui ne permet pas de déterminer le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)^2$.

Si $a \neq 2$ (et $a \neq 0$), il reste des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$P(x)=(2x+1)Q(x)+a \text{ et } P(x)=(ax+1)R(x)+2$$

On entire que $P\left(-\frac{1}{2}\right)=a$ et $P\left(-\frac{1}{a}\right)=2.$ Il existe aussi un polynôme $S(x)$ et deux réels b et c tel que

$$P(x)=(2x+1)(ax+1)S(x)+b(x)+c$$

On a en particulier $P\left(-\frac{1}{2}\right)=a=-\frac{b}{2}+c$ et $P\left(-\frac{1}{a}\right)=2=-\frac{b}{a}+c,$ d'où on tire facilement $b=-2a$ et $c=0,$ le reste de la division de $P(x)$ par $(2x+1)(ax+1)$ est donc le polynôme $-2ax$

Le 28 novembre 2012

EXALG431 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

La comdition d'existence est $3x^2+5x+2\geq 0$, c'est-à-dire, puisque les racines du trinôme sont -1 et $-\dfrac{2}{3}$, $x\notin\left]-1;-\dfrac{2}{3}\right[$. Si cette condition est respectée, l'inéquation se récrit en

$$\sqrt{3x^2+5x+7}>1+\sqrt{3x^2+5x+2}$$

ou encore, en élevant les deux membres positifs au carré et en réarrangeant les termes

$$4>2\sqrt{3x^2+5x+2} \text{ ou encore } 4>3x^2+5x+2$$

ce qui signifie $x\in\left]-2,\dfrac{1}{3}\right[$; en tenant compte de la condition d'existence, on a

$$x\in\left]-2,-1\right]\cup\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right[$$

Le 12 septembre 2012

EXALG432 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln\left(x^3+2x^2-8x\right)\leq 1+\ln(x+4)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Conditions d'existence :

$$x^3+2x^2-8x=x(x-2)(x-4)>0\Rightarrow -4<x<0 \text{ ou } x>2$$

$$x+4>0\Rightarrow x>-4$$

En effet, l'étude du signe de $x^3+2x^2-8x=x(x-2)(x-4)$ donne :

		-4		0		2	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

On a successivement en transformant l'inégalité de départ :

$$\ln\left(x(x-2)(x+4)\right)\leq \ln\left(e(x+4)\right)$$

Comme le logarithme est une fonction croissante, on a:

$$x(x-2)(x+4)\leq e(x+4)$$

On peut diviser les deux membres par $(x+4)$ puisque $x+4>0$. D'où:

$$\mathrm{x}(x-2)\leq e\Rightarrow x^2-2x-e\leq 0\Rightarrow 1-\sqrt{1+e}\leq x\leq 1+\sqrt{1+e}$$

Tenant compte des conditions d'existence et du fait que $e\sim 2.7$ donc $\sqrt{1+e}\sim 2,$ la solution est donc :

$$\boxed{S=\left[1-\sqrt{1+e},0\right[\cup\left]2,1+\sqrt{1+e}\right]}$$

Le 12 décembre 2012

EXALG433 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Trois grues déchargent un navire. Si les trois grues travaillent ensemble, le navire est déchargé en 6 jours. Si la première et la seconde grue travaillent ensemble, le navire est déchargé en 12 jours. Si la première travaillent seule pendant 10 jours, le déchargement peut être terminé en 2 jours supplémentaires pendant lesquels la première et la troisième travaillent ensemble. Déterminer le nombre de jours nécessaires à chaque grue pour effectuer seule le déchargement La formulation du problème sera facilitée par l'usage des notations suivantes :

Q_T désignera la quantité totale à décharger et Q_i la quantité journalière déchargée par la grue *i*.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Le problème se formule comme suit :

$$\begin{aligned} (Q_1+Q_2+Q_3)6 &= Q_T \qquad (1)\\ (Q_1+Q_2)12 &= Q_T \qquad (2)\\ 10Q_1+2(Q_1+Q_3) &= Q_T \qquad (3) \end{aligned}$$

Des équations (1) et (2), on déduit que $Q_3 = \frac{Q_T}{12}$. En substituant cette valeur dans (3),

On trouve que $Q_1 = \frac{5Q_T}{72}$. En injectant la valeur de Q_1 dans l'équation (2), on obtient

$Q_2 = \frac{Q_T}{72}$. La grue 1 effectue donc le déchargement en 14.4 jours, la grue 2 en 72 jours et la grue 3 en 12 jours.

Le 12 décembre 2012

EXALG434 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Une portion de 100 g de pâtes contient 100 kcal, 5 g de protides (protéines) et coûte 0.2 Euros; une portion de 100 g de maïs contient 300 kcal, 10 g de protides et coûte 0.4 Euros, une portion de 100 g de thon (en boîte) contient 200 kcal, 25 g de protides et côute 0.6 Euros. Déterminer les quantités x, y et z de ces trois types d'aliments qui vous permettent de confectionner un repas contenant 800 kcal et 50 g de protides, et dont le coût soit le plus bas possible.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Le problème se formule comme suit :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 100x & + & 300y & + & 200z & = & 800 \\ 5x & + & 10y & + & 25z & = & 50 \\ 0.2x & + & 0.4y & + & 0.6z & = & m \end{array}$$

où m (le prix du repas) est un paramètre et x, y, z représentent le nombre de portions de 100 g des différents aliments.

Le déterminant de la matrice du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 300 & 200 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 200$$

Le système possède donc une solution unique :

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 800 & 300 & 200 \\ 50 & 10 & 25 \\ m & 0.4 & 0.6 \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 10 & 2 & 5 \\ 5m & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27.5m - 41$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 100 & 800 & 200 \\ 5 & 50 & 25 \\ 0.2 & m & 0.6 \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 1 & 10 & 5 \\ 1 & 5m & 3 \end{vmatrix} = 13 - 7.5m$$

$$z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 100 & 300 & 800 \\ 5 & 10 & 50 \\ 0.2 & 0.4 & m \end{vmatrix} = \frac{100}{200} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 5m \end{vmatrix} = 5 - 2.5m$$

En résumé on a donc

$$\begin{array}{ll} x = 27.5m - 41 \geq 0 & \Rightarrow m \geq \dfrac{41}{27.5} \approx 1.49 \\ y = 13 - 7.5m \geq 0 & \Rightarrow m \leq \dfrac{13}{7.5} \approx 1.73 \\ z = 5 - 2.5m \geq 0 & \Rightarrow m \leq 2 \end{array}$$

On prend le plus petit m compatible avec ces contraintes : $m \approx 1.49$.

On en déduit que le repas ne contient pas de pâtes, mais contient environ 182.5 g de maïs $(y = 1.825)$ et 127.5 g de thons $(z = 1.275)$

Le 12 décembre 2012

EXALG435 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit le système d'équations algébriques linéaires suivant :

$$\begin{cases} -x & - & 2y & - & 3z & = & 3-a \\ 2x & + & y & + & az & = & b \\ 5x & + & 4y & + & bz & = & 5-a \end{cases}$$

Déterminez pour quelles valeurs des paramètres a et b, ce système possède une infinité de solutions.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

De la première équation, on tire la valeur de x et on la substitue dans les deux autres, équations, ce qui donne :

$$\begin{cases} -x & - & 2y & - & 3z & = & 3-a \\ & - & 3y & + & (a-6)z & = & 6+b-2a \\ & - & 6y & + & (b-15)z & = & 20-6a \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire la valeur de y et on la substitue dans la dernière équation, ce qui donne :

$$\begin{cases} -x & - & 2y & - & 3z & = & 3-a \\ & - & 3y & + & (a-6)z & = & 6+b-2a \\ & & & & (b-2a-3)z & = & 8-2a-2b \end{cases}$$

Pour que le système possède une infinité de solutions, il faut et il suffit que tous les coefficienst de la dernière ligne soient nuls. Ainsi, on a que a et b doivent satisfaire le système d'équations

$$\begin{cases} 2a & - & b & = & -3 \\ a & + & b & = & 4 \end{cases}$$

Et donc, $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{11}{3}$

Le système est simplement indéterminé et sa solution est

$$S = \left\{ \left(\frac{7}{9}k + \frac{10}{3}, -\frac{17}{9}k - 3, k \right) \in \mathbb{R} \right\}$$

Le 12 décembre 2012

EXALG436 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Déterminer les valeurs réelles de l'inconnue x qui satisfont l'inégalité suivante :

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

• Conditions d'existence: il faut que tous les radicants soient positifs ou nuls

$$\begin{array}{rcl} x+6 \geq 0 & \Rightarrow & x \geq -6 \\ x+1 \geq 0 & \Rightarrow & x \geq -1 \\ 2x-5 \geq 0 & \Rightarrow & x \geq \dfrac{5}{2} \end{array}$$

Domaine : $\left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

• Première résolution

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} & > & \sqrt{2x-5} & \text{les deux membres sont positifs} \\ (x+6) - 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} + (x+1) & > & 2x-5 & \text{en élevant au carré} \\ -2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1} & > & -12 & \\ \sqrt{x+6}\sqrt{x+1} & < & 6 & \\ (x+6)(x+1) & < & 36 & \text{en élevant au carré} \\ x^2+7x-30 & < & 0 & \\ (x+10)(x-3) & < & 0 & \end{array}$$

L'inégalité est satisfaite pour $x \in]-10, 3[$. En prenant l'intersection avec le domaine, on obtient $\boxed{x \in \left[\dfrac{15}{3}, 3\right[}$.

• Autre résolution

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x+6} & > & \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-6} & \\ x+6 & > & x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{2x-5}+2x-5 & \text{en élevant au carré} \\ 10-2x & > & 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} & \\ 5-x & > & \sqrt{x+1}\sqrt{2x-5} & \text{on impose } 5-x>0 \\ 25-10+x^2 & > & 2x^2-3x-5 & \text{en élevant au carré} \\ x^2+7x-30 & < & 0 & \\ (x+10)(x-3) & < & 0 & \end{array}$$

L'ensemble des valeurs de x qui satisfont l'inégalité, la condition $x < 5$ et apprtiennent au domaine, est $\boxed{\left[\dfrac{5}{2}, 3\right[}$

Le 12 septembre 2012

EXALG437 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Factoriser le polynôme du second degré :

$$P(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$$

Considérez la variable z comme un nombre complexes $z \in \mathbb{C}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

$$\mathrm{P}(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (i-5)^2 - 5(8-i) = -8 - 6i$$

Pour calculer la racine de Δ, on peut procéder par identification

$$\sqrt{-8-6i} = a + bi \Rightarrow -8 - 6i = (a+b)^2 + i.2ab - b^2$$

où a et b sont réels.

Les deux memebres de la dernière égalité doivent avoir des parties réelles identiques.

Il doit en aller de même pour les parties imaginaires. Ainsi

$$-8 = a^2 - b^2 \qquad \text{et} \qquad -6 = 2ab$$

Ce qui donne, en remplaçant a dans la première équation par $\dfrac{-3}{b}$

$$b^4 - 5b^2 - 9 = 0 \qquad \text{et} \qquad ab = -3$$

L'équation bi-carré en b donne comme valeurs possibles pour b : ± 3 et $\pm i$.

Seules les valeurs réelles sont admissibles, et donc $b = \pm 3$ et $a = \mp 1$

Ainsi $\sqrt{\Delta}$ peut valoir $-1+3i$ ou $1-3i$. Quand aux racines du polyôme $P(z)$, elles valent

$$z_{1,2} = \frac{5 - i \pm (1-3i)}{2} = \begin{cases} 3 - 2i \\ 2 + i \end{cases}$$

On retrouve les mêmes racines en utilisant l'autre valeur de $\sqrt{\Delta}$.

Ainsi donc, le polynôme se factorise en:

$$P(z) = (z - 3 + 2i)(z - 2 - i)$$

Le 12 septembre 2012

EXALG438 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Résoudre :

$$\log_3 \sqrt[3]{x+2} = \log_{27}(x-2) + \frac{1}{3}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Le domaine de définition de l'expression est $x \in \left]2, \infty\right[$

Le premier membre de l'équation peut s'écrire :

$$\log_3 \sqrt[3]{x+2} = \frac{1}{3}\log_3(x+2) = \frac{1}{3}\frac{\ln(x+2)}{\ln 3}$$

Le second memebre de l'équation peut s'écrire :

$$\log_{27}(x-2) + \frac{1}{3} = \frac{\ln(x-2)}{\ln 27} + \frac{1}{3} = \frac{\ln(x-2)}{3\ln 3} + \frac{1}{3}$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{3}\frac{\ln(x+2)}{\ln 3} = \frac{\ln(x-2)}{3\ln 3} + \frac{1}{3}$$

$$\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \ln 3$$

En prenant l'exponentielle des deux membres :

$$\frac{x+2}{x-2} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

Le 12 décembre 2012

EXALG439 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

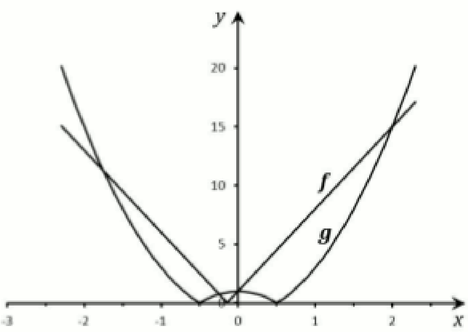
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\quad |7x+1| > |1-4x^2|$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Les deux fonctions à comparer peuvent s'écrire comme suit :

$$f(x) = |7x+1| = \begin{cases} -7x-1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{7} \\ +7x+1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$g(x) = |1-4x^2| = \begin{cases} 4x^2-1 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 1-4x^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \\ 4x^2-1 & \text{si } x \geq +\frac{1}{2} \end{cases}$$



Il faut donc considérer l'inéquation dans quatre intervalles.

(1) $x \leq -\frac{1}{2}$:

L'inéquation devient : $\quad -7x-1 > 4x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2+7x<0$
$\Leftrightarrow \quad x(4x+7)<0$

Une 1e partie de la solution est donc :

$S_1 = \left]-\frac{7}{4}\,;\,0\right[\cap \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right] = \left]-\frac{7}{4}\,;\,-\frac{1}{2}\right]$

(2) $-\frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{7}$:

L'inéquation devient : $\quad -7x-1 > 1-4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-7x-2>0$
$\Leftrightarrow \quad (4x+1)(x-2)>0$

Une 2e partie de la solution est donc :

$S_2 = \left(\left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right[\cup \left]2\,;\,+\infty\right[\right) \cap \left[-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{7}\right] = \left[-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{1}{4}\right[$

(3) $-\frac{1}{7} \leq x \leq +\frac{1}{2}$:

L'inéquation devient : $\quad 7x+1 > 1-4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2+7x>0$
$\Leftrightarrow \quad x(4x+7)>0$

Une 3e partie de la solution est donc :

$S_3 = \left(\left]-\infty\,;-\frac{7}{4}\right[\cup \left]0\,;\,+\infty\right[\right) \cap \left[-\frac{1}{7}\,;+\frac{1}{2}\right] = \left]0\,;\,+\frac{1}{2}\right]$

(4) $x \geq \frac{1}{2}$:

L'inéquation devient : $\quad +7x+1 > 4x^2-1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-7x-2<0$
$\Leftrightarrow \quad (4x+1)(x-2)<0$

La 4e partie de la solution est donc :

$S_4 = \left]-\frac{1}{4}\,;\,+2\right[\cap \left[+\frac{1}{2}; +\infty\right[= \left[+\frac{1}{2}\,;\,+2\right[$

La solution de l'inéquation est l'union des quatre solutions partielles :

$$\boldsymbol{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \left]-\frac{7}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\right[\cup \left]0\,;\,+2\right[}$$

Le 28 mars 2013