Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 44

EXALG440 – EXALG449

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Avril 2013

EXALG440 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Dans $\mathbb{R}$, déterminer

a) les racines du polynome $P(x) = mx^2 + \frac{1}{2}x - 4m - 1$ en fonction du paramètre réel m.

b) les valeurs du paramètre réel m, pour lesquelles aucunes des racines de P n'appartient à l'intervalle $[-1,1]$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) Si $m = 0$, alors le polynôme devient égale à $P(x) = \frac{1}{2}x - 1$, ayant $x = 2$ comme unique racine.

Supposons dans la suite $m \neq 0$. Les racines du polynôme sont les racines de l'équation :

$$2mx^2 + x - (8m + 2) = 0$$

Son discriminant est :

$$\Delta = 1 + 8m(8m + 2) = 64m^2 + 16m + 1 = (8m + 1)^2$$

Les racines de l'équation sont donc :

$$x_{1,2} = \frac{1}{4m}\left(-1 \pm (8m + 1)\right) = \begin{cases} x_1 = \dfrac{8m}{4m} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-8m - 2}{4m} = -2 - \dfrac{1}{2m} \end{cases}$$

b) La première racine est toujours égale à 2. Il faut donc que la deuxième racine soit inférieure à -1 ou supérieure à 1 :

Pour m positif, on a toujours que $x_2 = -2 - \frac{1}{2m} < -2 < -1$.

Pour m négatif :

$$x_2 < -1 \;\Leftrightarrow\; -2 - \tfrac{1}{2m} < -1 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2m} > -1 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{m} > -2 \;\Leftrightarrow\; m < -\tfrac{1}{2}$$

$$x_2 > +1 \;\Leftrightarrow\; -2 - \tfrac{1}{2m} > +1 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{2m} < -3 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{m} < -6 \;\Leftrightarrow\; 0 > m > -\tfrac{1}{6}$$

Pour qu'aucune des racines de P n'appartienne à l'intervalle $[-1\,;1]$, il faut donc que :

$$m \in \left]-\infty\,;-\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{1}{6};0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$$

Le 10 avril 2013

EXALG441 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Déterminer

a) les valeurs du paramètre $\mathbb{R}$, pour lesquelles la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 2m^2 & 3m^3 \\ -3m^2 & -2m^3 & 4m^4 \\ -4m^3 & -3m^4 & m \end{pmatrix}$$

est inversible.

b) l'inverse de cette matrice pour $m = 1$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro.

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A}_m = \begin{vmatrix} m & 2m^2 & 3m^3 \\ -3m^2 & -2m^3 & 4m^4 \\ -4m^3 & -3m^4 & m \end{vmatrix} &= m^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m^2 \\ -3m & -2m & 4m^3 \\ -4m^2 & -3m^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= m^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m^2 \\ -3 & -2 & 4m^2 \\ -4m^2 & -3m^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= m^5 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7m^2 \\ -3 & -2 & 4m^2 \\ -4m^2 & -3m^2 & 1 \end{vmatrix} && \text{L1} \leftarrow \text{L1} + \text{L2} \\
&= m^5 \left(-2 \begin{vmatrix} -2 & 4m^2 \\ -3m^2 & 1 \end{vmatrix} + 7m^2 \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4m^2 & -3m^2 \end{vmatrix} \right) && \text{Laplace} \\
&= m^5(-2(-2+12m^4) + 7m^2.m^2) \\
&= m^5(4 - 17m^4)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A}_m \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{A}_m \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R} \backslash \left\{ 0, -\sqrt[4]{\frac{4}{17}}, +\sqrt[4]{\frac{4}{17}} \right\}$$

Dans le cas où $m = 1$, la matrice devient :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det \mathcal{A}_1 = 4 - 17 = -13$$

La matrice adjointe Adj $\mathcal{A}$ est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj } \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 10 & -13 & 1 \\ -11 & 13 & -5 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}^{\text{T}} = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 14 \\ -13 & 13 & -13 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}_1} \text{Adj } \mathcal{A}_1 = \frac{-1}{13} \begin{pmatrix} 10 & -11 & 14 \\ -13 & 13 & -13 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{13} & \frac{11}{13} & -\frac{14}{13} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

EXALG442 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant du paramètre réel k, le système

$$\begin{cases} kx + ky - kz = k \\ k^2x - 2k^2y - kz = k^2 \\ x - ky - k^2z = 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Si $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, les deux premières équations deviennent l'identité $0 = 0$ et la troisième équation devient $x = 1$. Le système est alors **doublement indéterminé**, avec comme solution :

$$S = \{(1, y, z) \| y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Si $\boldsymbol{k} \neq \mathbf{0}$, on peut diviser les deux premières équations par k. Le système devient alors :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ kx - 2ky - z = k \\ x - ky - k^2z = 1 \end{cases}$$

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & -2k & -1 \\ 1 & -k & -k^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ k-1 & -2k-1 & -1 \\ 1-k^2 & -k-k^2 & -k^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} C1 \leftarrow C1 + C3 \\ C2 \leftarrow C2 + C3 \end{matrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} k-1 & -(2k+1) \\ (1-k)(1+k) & -k(1+k) \end{vmatrix} \\ &= (k+1) \begin{vmatrix} k-1 & 2k+1 \\ 1-k & k \end{vmatrix} \\ &= (k+1)(k-1) \begin{vmatrix} 1 & 2k+1 \\ -1 & k \end{vmatrix} \\ &= (k+1)(k-1)(3k+1) \end{aligned}$$

$$\det\mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left\{-1, -\frac{1}{3}, +1\right\}$$

Si $\boldsymbol{k} = +\mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \{(1 - z, 0, z) \| z \in \mathbb{R}\}$.

Si $\boldsymbol{k} = -\mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2y - z = -1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2z - 3y = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \left\{\left(1 + \frac{y}{2}, y, \frac{3y}{2}\right) \middle\| y \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $\boldsymbol{k} = -\frac{1}{3}$, le système devient

$$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-z &= -\frac{1}{3} \\ x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ x-2y+3z &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3z &= 1+2y \\ x-z &= 1-y \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \left\{\left(1-\frac{y}{4}\,, y\,, \frac{3y}{4}\right) \| \; y \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\backslash\left\{\mathbf{-1}\,, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,, \mathbf{0}, \mathbf{+1}\right\}$, le système est **déterminé**, et donc cramerien :

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & -2k & -1 \\ 1 & -k & -k^2 \end{vmatrix} = \det \mathcal{A}$$

$$\det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & k & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \mathcal{A}_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & -2k & k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sa solution est $S = \{(1\,,0\,,0)\}$.

Résumé final :

$k = 0$ Système doublement indéterminé $S = \{(1\,,y\,,z) \| y, z \in \mathbb{R}\}$

Le plan parallèle à Oyz et à distance 1 devant celui-ci.

$k = +1$ Système simplement indéterminé $S = \{(1-z\,,0\,,z) \| z \in \mathbb{R}\}$

Trois plans ayant en commun une droite passant par le point $\mathrm{A}(1,0,0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{u}(-1,0,1)$; la droite appartient au plan $0xz$.

$k = -1$ Système simplement indéterminé $S = \left\{\left(1+\frac{y}{2}\,, y\,, \frac{3y}{2}\right) \| \; y \in \mathbb{R}\right\}$

Deux plans confondus coupent un troisième plan selon une droite passant par le point $\mathrm{A}(1,0,0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{v}(1,2,3)$.

$k = -\frac{1}{3}$ Système simplement indéterminé $S = \left\{\left(1-\frac{y}{4}\,, y\,, \frac{3y}{4}\right) \| \; y \in \mathbb{R}\right\}$

Trois plans ayant en commun une droite passant par le point $\mathrm{A}(1,0,0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{w}(-1,4,3)$.

$k \in \mathbb{R}\backslash\left\{-1\,, -\frac{1}{3}\,, 0, +1\right\}$ Système déterminé $S = \{(1\,,0\,,0)\}$

Trois plans ayant en commun un seul point.

Le 10 avril 2013

EXALG443 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{2^{(x+1)}+4^{(2x-2)}}{2^{(x+3)}}=\frac{1}{2}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\begin{aligned}
\frac{2^{(x+1)}+4^{(2x-2)}}{2^{(x+3)}}=\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2^{(x+1)}+2^{(4x-4)}}{2^{(x+2)}}=1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2.2^{x}+2^{(4x-4)}=4.2^{x} \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{(4x-4)}=2.2^{x} \\
&\Leftrightarrow \quad 2^{(4x-4)}=2^{(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \quad 4x-4=x+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 3x=5 \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Le 10 avril 2013

EXALG444 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

a) Pour quelles valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

est-elle inversible?

b) Déterminer l'inverse de cette matrice si $(a,b,c) = (a, 2a, 3a)$ avec $a \in \mathbb{R}_0$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro. Désignons la matrice par $\mathcal{A}$, alors :

$$\begin{aligned} \det\mathcal{A} &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-a & c-b & a+b \\ 0 & 0 & 1 \\ b(c-a) & a(c-b) & ab \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} c-a & c-b \\ b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix} \\ &= -(c-b)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} \\ &= (b-c)(c-a)(a-b) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det\mathcal{A} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq b \neq c \neq a$$

Lorsque $(a,b,c) = (a, 2a, 3a)$ avec $a \in \mathbb{R}_0$, la matrice devient :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5a & 4a & 3a \\ 1 & 1 & 1 \\ 6a^2 & 3a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

et, selon ce qui précède, son déterminant est :

$$\det\mathcal{A} = (2a-3a)(3a-a)(a-2a) = 2a^3$$

La matrice adjointe Adj $\mathcal{A}$ est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\operatorname{Adj}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -a^2 & 4a^2 & -3a^2 \\ a^3 & -8a^3 & 9a^3 \\ a & -2a & a \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -a^2 & a^3 & a \\ 4a^2 & -8a^3 & -2a \\ -3a^2 & 9a^3 & a \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathcal{A}}.\operatorname{Adj}\mathcal{A} = \frac{1}{2a^3}\begin{pmatrix} -a^2 & a^3 & a \\ 4a^2 & -8a^3 & -2a \\ -3a^2 & 9a^3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2a^2} \\ \frac{2}{a} & -4 & -\frac{1}{a^2} \\ -\frac{3}{2a} & \frac{9}{2} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}$$

Le 10 avril 2013

EXALG445 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Déteminer toutes les valeurs des paramètres réels a et b pour que le polynôme $P(x)=x^4+6x^3+(a+1)x^2+(2+2b)x+(a-b)$ soit divisible par $x+1$, admette une racine double et deux racines complexes non réelles; déterminer ces racines.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Selon les données du problème, le polynôme possède $x=-1$ comme racine double (ainsi qu'une paire de racines complexe conjuguées). Par conséquent, le polynôme *ainsi que sa dérivée première* sont divisibles par $x+1$, c'est-à-dire $P(-1)=0$ et $P'(-1)=0$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4+6x^3+(a+1)x^2+(2+2b)x+(a-b) \\ P'(x) &= 4x^3+18x^2+2(a+1)x+(2+2b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= 1-6+a+1-2-2b+a-b &&= 2a-3b-6 \\ P'(-1) &= -4+18-2a-2+2+2b &&= -2a+2b+14 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P'(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b = 6 \\ a-b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=8 \end{cases}$$

Le polynôme est donc :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4+6x^3+16x^2+18x+7 \\ &= (x+1)(x^3+5x^2+11x+7) \\ &= (x+1)^2(x^2+4x+7) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé deux fois Horner pour effectuer les divisions.

La racine réelle double est donc $x_1=x_2=-1$, tandis que le couple de racines complexe conjuguées sont les racines de l'équation $x^2+4x+7=0$:

$$\Delta = 16-28=-12 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta}=\pm 2\sqrt{3}.i$$

$$x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(-4\pm 2\sqrt{3}.i\right)=-2\pm\sqrt{3}.i$$

L'ensemble des racines du polynôme est donc :

$$S=\left\{-1\,,-1\,,-2+\sqrt{3}.i\,,-2-\sqrt{3}.i\right\}$$

Le 10 avril 2013

EXALG446 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel k, le système

$$\begin{cases} kx + (1-2k)y + (2k-1)z = -k \\ -x + (2-k)y + (k-2)z = k^2 \\ -k^2x + k^2y + (k^2-1)z = 1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Indiquer une résumé final de la discussion de ce système et dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients du système :

$$\det\mathcal{A} = \begin{vmatrix} k & 1-2k & 2k-1 \\ -1 & 2-k & k-2 \\ -k^2 & k^2 & k^2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 1-2k & 0 \\ -1 & 2-k & 0 \\ -k^2 & k^2 & 2k^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= (2k^2-1)\begin{vmatrix} k & 1-2k \\ -1 & 2-k \end{vmatrix}$$

$$= (2k^2-1)(1-k^2)$$

$$\det\mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left\{-1\,,-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+\frac{\sqrt{2}}{2}\,,+1\right\}$$

Si $\boldsymbol{k} = +\mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} x-y+z &= -1 \\ -x+y-z &= +1 \\ -x+y &= +1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-y &= -1 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \{(y-1\,,y\,,0)\,\|\,y \in \mathbb{R}\}$.

Si $\boldsymbol{k} = -\mathbf{1}$, le système devient

$$\begin{cases} -x+3y-3z &= +1 \\ -x+3y-3z &= +1 \\ -x+y &= +1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= 3z-2 \\ 2y &= 3z \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** avec comme solution $S = \left\{\left(\frac{3}{2}z-1\,,\frac{3}{2}z\,,z\right)\middle\|\; y \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $\boldsymbol{k} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$, le système devient

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(1-\sqrt{2}\right)y - \left(1-\sqrt{2}\right)z &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(a)} \\ -x + \left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - \left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z &= \frac{1}{2} \quad \text{(b)} \\ -\frac{1}{2}x \quad +\frac{1}{2}y \quad -\frac{1}{2}z &= 1 \quad \text{(c)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{2}\text{(a)} + 2\text{(c)} &\equiv \left(\sqrt{2}-1\right)(y-z) = +1 \\ 2\text{(b)} - 4\text{(c)} &\equiv \left(2-\sqrt{2}\right)(y-z) = -3 \end{cases} \qquad \text{Contradiction !}$$

Le système est **impossible** avec comme solution $S = \emptyset$.

Si $\boldsymbol{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, le système devient

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(1+\sqrt{2}\right)y - \left(1+\sqrt{2}\right)z & = & \frac{\sqrt{2}}{2} & (\text{a}) \\ -x + \left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y - \left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z & = & \frac{1}{2} & (\text{b}) \\ -\frac{1}{2}x \quad + \frac{1}{2}y \quad - \frac{1}{2}z & = & 1 & (\text{c}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(\text{a}) - 2(\text{c}) & \equiv & \left(1+\sqrt{2}\right)(y-z) = -1 \\ 2(\text{b}) - 4(\text{c}) & \equiv & \left(2+\sqrt{2}\right)(y-z) = -3 \end{cases} \quad \text{Contradiction !}$$

Le système est **impossible** avec comme solution $S = \emptyset$

Si $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\backslash\left\{-1\,, -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, +\frac{\sqrt{2}}{2}\,, +1\right\}$, alors le système est **déterminé** et donc cramerien :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} -k & 1-2k & 2k-1 \\ k^2 & 2-k & k-2 \\ 1 & k^2 & k^2-1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} -k & 1-2k & 0 \\ k^2 & 2-k & 0 \\ 1 & k^2 & 2k^2-1 \end{vmatrix} \\ & = (2k^2-1)\begin{vmatrix} -k & 1-2k \\ k^2 & 2-k \end{vmatrix} \\ & = (2k^2-1)k\begin{vmatrix} -1 & 1-2k \\ k & 2-k \end{vmatrix} \\ & = k(2k^2-1)\left(-2+k-k+2k^2\right) \\ & = 2k(2k^2-1)\left(k^2-1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} k & -k & 2k-1 \\ -1 & k^2 & k-2 \\ -k^2 & 1 & k^2-1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} k & 0 & 2k-1 \\ -1 & k^2-1 & k-2 \\ -k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} k & 0 & 2k-1 \\ -1-k^2 & 0 & k^2+k-3 \\ -k^2 & 1-k^2 & k^2-1 \end{vmatrix} \\ & = (k^2-1)\begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -1-k^2 & k^2+k-3 \end{vmatrix} \\ & = (k^2-1)\left(k^3+k^2-3k+2k-1+2k^3-k^2\right) \\ & = (k^2-1)\left(3k^3-k-1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_z = \begin{vmatrix} k & 1-2k & -k \\ -1 & 2-k & k^2 \\ -k^2 & k^2 & 1 \end{vmatrix} & = \begin{vmatrix} k & 1-2k & 0 \\ -1 & 2-k & k^2-1 \\ -k^2 & k^2 & 1-k^2 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} k & 1-2k & 0 \\ -1-k^2 & 2-k+k^2 & 0 \\ -k^2 & k^2 & 1-k^2 \end{vmatrix} \\ & = (1-k^2)\begin{vmatrix} k & 1-2k \\ -1-k^2 & 2-k+k^2 \end{vmatrix} \\ & = (1-k^2)(2k-k^2+k^3+1-2k+k^2-2k^3) \\ & = (k^2-1)(k^3-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & \dfrac{2k(2k^2-1)\left(k^2-1\right)}{(2k^2-1)(1-k^2)} & = & -2k \\ y & = & \dfrac{(k^2-1)\left(3k^3-k-1\right)}{(2k^2-1)(1-k^2)} & = & \dfrac{3k^3-k-1}{1-2k^2} \\ z & = & \dfrac{(k^2-1)(k^3-1)}{(2k^2-1)(1-k^2)} & = & \dfrac{k^3-1}{1-2k^2} \end{cases}$$

Résumé final :

$k = +1$ Système simplement indéterminé $S = \{(y-1\,, y\,, 0) \| y \in \mathbb{R}\}$

Deux plans confondus coupant un troisième plan selon une droite passant par le point A$(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{v}(1, 1\,, 0)$.

$k = -1$ Système simplement indéterminé $S = \left\{\left(\frac{3}{2}z - 1\,, \frac{3}{2}z\,, z\right) \middle\| \, y \in \mathbb{R}\right\}$

Deux plans confondus coupant un troisième plan selon une droite passant par le point A$(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{v}(3, 3, 2)$.

$k = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ Système impossible $S = \emptyset$

Trois plans n'ayant aucun point en commun

$k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Système impossible $S = \emptyset$

Trois plans n'ayant aucun point en commun

$k \in \mathbb{R}\backslash\left\{-1\,, -\frac{\sqrt{2}}{2}\,, +\frac{\sqrt{2}}{2}\,, +1\right\}$ Système déterminé $S = \left\{\left(-2k\,;\, \frac{3k^3-k-1}{1-2k^2}\,;\, \frac{k^3-1}{1-2k^2}\right)\right\}$

Trois plans ayant exactement un point en commun

Le 10 avril 2013

EXALG447 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Résoudre, dans les nombres complexes, l'équation suivante (où i est l'unité imaginaire) :

$$z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

sachant qu'une des racines est imaginaire pure, c'est-à-dire de la forme $(0+ib)$ avec $b\in\mathbb{R}$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$P(bi)=-ib^3+(1+2i)b^2+3(1+i)ib-10(1+i)=0$

Partie réelle $\mathscr{Re}(P): b^2-3b-10=0\Rightarrow b=-2$ ou $b=5$

Partie imaginaire $\mathscr{Im}(P): -b^3+2b^2+3b-10=0$ est vérifiée par $b=-2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -1-2i & 3+3i & & -10-10i \\ \hline -2i & \downarrow & -2i & -8+2i & & 10+10i \\ \hline & 1 & -1-4i & -5+5 & & 0 \end{array}$$

Les racines de $z^2-(1+4i)z+5+5=0$ sont $2+i$ et $-1+3i$. On les trouve :

soit en utilisant le réalisant : $(1+4i)^2-4(-5+5i)=\ldots\ldots$

soit en remplaçant z par $a+bi$ et en travaillant sur $\mathscr{Re}(P)$ et $\mathscr{Im}(P)$

Réponse : $\boxed{z_1=-2i;\qquad z_2=2+i;\qquad z_3=-1+3i}$

Le 12 septembre 2013

EXALG448 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Soit un polynôme $P(x)$ non nul à coefficients réels tel que $P(x^2)=(x^2+1)P(x)$

1. Que vaut $P(1)$?
2. Que vaut $P(x)-P(-x)$?
3. Quel est le degré du polynôme $P(x)$?
4. Trouvez tous les (ou l'expression générale des) polynômes $P(x)$ satisfaisant toutes ces conditions.

Détaillez bien votre raisonnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $P(x^2)=(x^2+1)P(x) \Rightarrow$ si $x=1$; $P(1)=2P(1) \Rightarrow P(1)=0$

2) $\left.\begin{array}{l} P(x^2)=(x^2+1)P(x) \\ P((-x)^2)=((-x^2)+1)P(-x) \end{array}\right\}$ puisque $P(x)\neq 0 \Rightarrow P(x)=P(-x)$ et donc $P(x)-P(-x)=0$

On en déduit que $P(-1)=0$

3) Si $P(x)$ est de degré n alors $P(x^2)$ est de degré $2n$ et $(x^2+1)P(x)$ est de degré $n+2$

Par conséquent : $2n=n+1$ et donc $P(x)$ est de degré 2.

4) $\boxed{\begin{array}{c} P(x)=a(x-1)(x+1) \\ P(x)=a(x^2-1) \end{array}}$ où $a\in\mathbb{R}_0$

Le 12 décembre 2012

EXALG449 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Déterminer pour quelles valeurs réelles non nulles de x l'inégalité suivante est satisfaite.

$$x^{\frac{3}{4}x} < \left(\sqrt{x}\right)^{x^2-x+1}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Condition : $x > 0$

<u>Si $0 < x < 1$</u> : la fonction a^x pour $0 < a < 1$ est une fonction décroissante.

Ici : $\frac{3x}{4} > \frac{x^2-x+1}{2} \Rightarrow ...... \Rightarrow 2x^2-5x+2<0$

x	0		1/2		1
$2x^2-5x+2$		+	0	−	

$\Rightarrow x \in \left]\frac{1}{2};1\right[$

<u>Si $1 < x$</u> : la fonction a^x pour $1 < a$ est une fonction croissante.

Ici : $\frac{3x}{4} > \frac{x^2-x+1}{2} \Rightarrow ...... \Rightarrow 2x^2-5x+2>0$

x	1		2	
$2x^2-5x+2$		−	0	+

$\Rightarrow x \in \left]2;+\infty\right[$

Si $x=1$ n'est pas accepté car $1^{\frac{3}{4}} = 1^{\frac{1-1+1}{2}}$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{x \in \left]\frac{1}{2};1\right[\cup \left]2;+\infty\right[}$

Le 28 mars 2013