Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 45

EXALG450 – EXALG459

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2013

EXALG450 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 1.

Jamie envisage de vendre des cornets de pâtes à la pause de midi de l'examen d'admission à l'Ecole polytechnique.
La production de chaque cornet coûte 1 euro. Jamie doit fixer son prix de vente sachant que le nombre d'acheteur dépend de ce prix de vente.
Il a donc fait une petite étude qui indique que s'il renonce à tout bénéfice, 400 personnes achèteraient chacun un cornet.
Par contre, si le prix de vente est plus élevè, le nombre d'acheteurs diminuera et Jamie fait l'hypothèse que le nombre de ceux qui renonceront à l'achat sera égal au nombre de centimes de la différence entre le prix de vente et le coût de production.
A quel prix doit-il fixer le cornet pour réaliser un profit maximum?
Détaillez bien votre raisonnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Soit $\begin{array}{l} p \text{ le prix d'un lacet} \\ n \text{ le nombre d'acheteur} \end{array}$.

Ceux qui renoncent : $400 - n = (p-1)n$

Profit : $pn - n = (p-1)n$

$\Rightarrow$ en éliminant n : $(p-1)\left[400-(p-1)100\right] = 400(p-1) - 100(p-1)^2$

$\dfrac{d\text{ Profit}}{dp} = 400 - 200(p-1) = 0$ si $p = 3$

p	1		3	
$\dfrac{d\text{ Profit}}{dp}$		+	0	−
Profit		$\nearrow$	*Max*	$\searrow$

<u>Conclusion</u> : Il doit le vendre à 3 €

Le 2 septembre 2013

EXALG451 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Soit dans les nombres complexes, l'équation suivante :

$$z^3 = i(\overline{z})^{-1}$$

où i est l'unité (la particule) imaginaire et où le nombre complexe conjugué de $z = a + ib$ est, par définition, $\overline{z} = a - ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrez d'abord que le module de tous ces nombres complexes $= 1$
2. Résoudre ensuite l'équation.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$z^3 = \frac{i}{\overline{z}}.\frac{z}{z} = \frac{iz}{a^2+b^2} \quad \text{car} \begin{cases} z = a + bi = \rho \operatorname{cis} \theta \\ \overline{z} = a - bi \\ z\overline{z} = a^2 + b^2 = \rho^2 \end{cases}$$

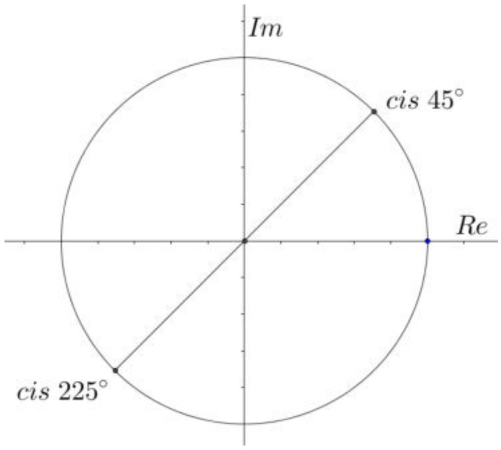
Puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, on a $z \neq 0$

$$z^2 = \frac{i}{a^2+b^2} \Rightarrow \rho^2 \operatorname{cis} 2\theta = \frac{\cos 90}{\rho^2} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2 = \dfrac{1}{\rho^2} \\ 2\theta = 90° + k360° \end{cases}$$

1) $\rho = 1$

2) $\theta = 45° + k180°$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{z = \pm \operatorname{cis} 45° = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$



Le 2 septembre 2013

EXALG452 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Déterminer m pour que $2x^2-(m-1)x+m+1=0$ admette deux racines x_1 et x_2 telles que $|\ x_2-x_1\ |=1$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Appelons x_2 la plus grande racine.

On doit avoir $\begin{cases} \rho=(m-1)^2-8(m+1)>0 & (1) \\ x_2-x_1=1 & (2) \\ x_2+x_1=\dfrac{m-1}{2} \text{ car } \left[S=\dfrac{-b}{a}\right] & (3) \end{cases}$

$(2)+(3)$ implique $x_2=\dfrac{m+1}{4}$ et $x_1=x_2-1=\dfrac{m+1}{4}-1=\dfrac{m-3}{4}$

D'autre part : $\begin{cases} x_1x_2=(x_2-1)x_2=\dfrac{m-3}{4}.\dfrac{m+1}{4} \\ x_1x_2=\dfrac{m+1}{2} \quad \text{car } \left[P=\dfrac{c}{a}\right] \end{cases}$

Ou encore $\dfrac{m-3}{4}.\dfrac{m+1}{4}=\dfrac{m+1}{2}\Rightarrow(m-3)(m+1)=8(m+1)\Rightarrow m^2-10m-11=0$

Par conséquent soit $m=-1$ soit $m=11$

Vérifions :

Si $m=-1: x_2=0$ et $x_1=1$

L'équation est : $2x^2+2x=0\Rightarrow x(x+1)=0$ OK

Si $m=11: x_2=3$ et $x_1=2$

L'équation est : $x^2-5x+6=0 \quad S=5, P=6$ OK

Le 2 septembre 2013

EXALG453 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Résoudre :

$$\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Posons $y = 2^x > 0$. L'équation devient : $\frac{1}{y-1} > \frac{1}{1-\frac{y}{2}} = \frac{2}{2-y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-1} - \frac{2}{2-y} > 0 \Rightarrow \frac{2-y-2y+2}{(y-1)(2-y)} = \frac{4-3y}{(y-1)(2-y)} > 0$$

y	0		1		4/3		2	
$4-3y$		+	+	+	0	−	−	−
$(y-1)(2-y)$		−	0	+	+	+	0	−
N/D		−	/	+	0	−	/	+

1) $1 < y = 2^x < \frac{4}{3} \Rightarrow 0 < x < \log_2 \frac{4}{3} = \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 2} = 0.415$

2) $2 < y = 2^x \Rightarrow 1 < x$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\left]0, 2-\log_2 3\right[\cup \left]1;\to\right[\quad \text{ou} \quad \left]0, 0.415\right[\cup \left]1;\to\right[}$

Rem : $\log_2 \frac{4}{3} = \log_2 4 - \log_2 3 = 2 - \log_2 3 = 2 - \frac{\log 3}{\log 2} \simeq 0.415$

EXALG454 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

La maman d'Amélie, Bernard et Claude leur donne à chacun 15 euros pour aller chercher à boire et à manger au petit magasin du coin.
Il y dépensent tout l'argent que leur maman leur a donné, et Amélie revient avec 8 lacets de réglisse, une canette de limonade et deux gaufres. Bernard, lui, s'est acheté 10 lacets de réglisse, 5 canettes et une gaufre. Claude revient avec 6 lacets de réglisse et 2 canettes et un certain nombre de gaufre(s).
Mais quand elle voit le nombre de gaufre(s) que Claude rapporte, Maman est surprise : "Ce n'est pas possible! Tu n'as pas tout dépensé?" "Si" répond Claude "mais j'ai mangé une gaufre en route".
Déterminer le nombre de gaufre(s) que Claude a achetées et le prix des lacets de réglisse, des canettes et des gaufres.

Solution proposée par Nicole Berckmans

<u>Méthode 1</u>

Je pose $\begin{cases} l \text{ le prix d'un lacet} \\ c \text{ le prix d'une canette} \\ g \text{ le prix d'une gaufre} \\ x \text{ le nombre de gaufres achetées par Claude} \end{cases}$

On me dit que $\begin{cases} 8l + c + 2g = 15 & (1) \\ 10l + 5c + g = 15 & (2) \\ 6l + 2c + xg = 15 & (3) \end{cases}$

$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} l = 2 - \dfrac{3}{10}g & (4) \\ c = -1 + \dfrac{2}{5}g & (5) \end{cases}$

Puisque g, l, c sont >0, on déduit de (4) et (5) que $\dfrac{5}{2} < g < \dfrac{20}{3} \qquad (6)$

Je remplace l et c de (4) et (5) dans (3) et j'obtiens : $(x-1)g = 5$

Je multiplie les inéquations (6) par $(x-1)$ qui est >0

$$\underbrace{\frac{5}{2}(x-1) < g(x-1)}_{x<3} = \underbrace{5 < \frac{20}{3}(x-1)}_{\frac{7}{4}<x}$$

Puisque x est un entier $\Rightarrow \boxed{x = 2 \Rightarrow g = 5;\, l = \frac{1}{2};\, c = 1}$

Méthode 2 : (Prévue par l'interrogateur)

Le système $\begin{cases} 8l + c + 2g = 15 & L_1 \\ 10l + 5c + g = 15 & L_2 \\ 6l + 2c + (x-1)g = 15 & L_3 \end{cases}$

est impossible nous dit la maman!

Donc le déterminant de ce système est nul.

$$\det \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 10 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & x-1 \end{vmatrix} = 30(x-1) - 30 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

EXALG455 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{(-1-x)}\geq 1$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

Posons $y=2^{x}>0\Rightarrow\frac{1}{y}-2y\geq 1\Rightarrow 2y^{2}+y-1\leq 0$ Racines : -1 et $\frac{1}{2}$

y		-1		0		$1/2$	
$2y^2+y-1$	/		/		/	$-$	0	$+$

On doit avoir : $0<y\leq\frac{1}{2}\rightarrow 2^{x}\leq 2^{-1}\Rightarrow\boxed{x\leq -1}$

Le 9 septembre 2013

EXALG456 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Résoudre dans les réels, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{17}{4} \\ x^2-y^2=25 \end{cases}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{17}{4} & (1) \\ x^2-y^2=25 & (2) \end{cases}$$

Conditions préalables: $x \neq 0$ et $y \neq 0$

Posons : $X=\dfrac{x}{y}$.(1) devient : $X+\dfrac{1}{X}=\dfrac{17}{4} \Rightarrow 4X^2-17X+4=0$

<u>1er cas</u> : $x=4 \Rightarrow x=4y$ que l'on injecte dans (2). On obtient

$$16y^2-y^2=25 \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{3} \text{ et donc } x=\pm\frac{4\sqrt{15}}{3}$$

<u>2ème cas</u> : $X=\dfrac{1}{4} \Rightarrow y=4x$ ce qui est impossible pour l'équation $(2)[x>y]$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3},\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right) \text{ ou } \left(-\dfrac{4\sqrt{15}}{3},-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)}$

Le 9 septembre 2013

EXALG457 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. Trouvez tous les nombres complexes non nuls $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$|z| = |z^{-1}| = |z-1|$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

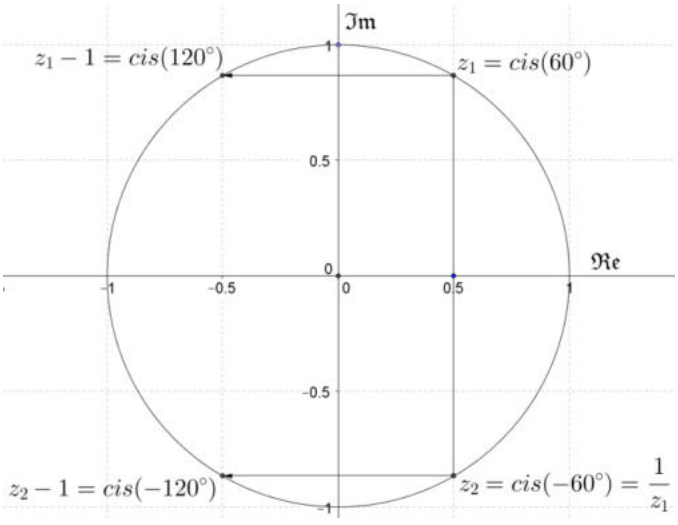
Je note ρ le module de z. $\begin{cases} z = \rho \operatorname{cis}\theta \\ z^{-1} = \dfrac{1}{\rho}\operatorname{cis}(-\theta) \end{cases} \Rightarrow \rho = \dfrac{1}{\rho} \overset{\rho>0}{\Leftrightarrow} \rho = 1$

$z - 1 = \operatorname{cis}\theta - 1 = \cos\theta + i\sin\theta - 1 = (\cos\theta - 1) + i\sin\theta.$

Son module vaut $\rho_{z-1} = \sqrt{(\cos\theta-1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta}$

Ce module vaut 1 si $\cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm 60°$

<u>Conclusion:</u> $\boxed{z = \operatorname{cis}(\pm\theta) = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$



Le 9 septembre 2013

EXALG458 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Pierre et Arnaud invitent leur cousine Céline au parc d'attractions. A l'entrée ils se séparent Pierre monte dans un petit bateau pour le parcours d'aventures "Bécassine en Amérique", qui prend 40 minutes. Ensuite, il fait cinq tours de manège sur la pieuvre et risque deux fois sa vie sur le "Saruman Terror". Il retrouve alors à la sortie Arnaud et Céline, qui viennent de finir leur tour du parc. Arnaud à fait deux fois "Bécassine en Amérique", il est allé trois fois sur la pieuvre et deux fois sur le "Saruman Terror", tandis que Céline a passé son temps en faisant quatre tours sur la pieuvre et quatre tours sur le "Saruman Terror".
Déterminez combien de temps Pierre, Arnaud et Céline sont restés dans le parc.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

Temps sur le bateau = 40'
Temps sur la pieuvre = p
Temps sur la terror = t

Pierre		Arnaud		Céline
$40+5p+2t$	$=$	$80+3p+2t$	$=$	$4p+4t$

On résoud ce système de 2 équations à 2 inconnues p et t.
On trouve $p = 20'$ et $t = 30'$

Réponse : $\boxed{\text{Temps dans le parc } = 3\text{h}20'}$

Le 9 septembre 2013

EXALG459 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Complétez l'expression suivante en remplaçant les pointillés par l'expression appropriée, forunissant ainsi une formule permettant de décomposer $x^5 + y^5$ en facteurs. Expliquez le raisonnement qui vous conduit à cette formule.

$$x^5 + y^5 = (x+y)(....)$$

Peut-on obtenir une formule analogue $x^n + y^n$ quel que soit n ? Si oui, justifiez. Si non, précisez pour quels n c'est possible et pour quels n ça ne l'est pas et justifiez.

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

$p(x) = x^5 + y^5$ Polynôme en x

$d(x) = x + y$ Avec $y \neq 0$

On a $p(-y) = (-y)^5 + y^5 = -y^5 + y^5 = 0$ c'est à dire que $p(x)$ est divisible par $x + y$. (Loi du reste). Effectuons donc la division de $p(x)$ par $d(x)$ via la grille de Horner.

	1	0	0	0	0	y^5
$-y$		$-y$	y^2	$-y^3$	y^4	$-y^5$
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	y^4	0

Donc : $p(x) = x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

<u>Généralisation</u>

$p(x) = x^n + y^n$ où $n \in \mathbb{N}_{0,1}$ et $y \neq 0$

$d(x) = x + y$

On a $p(-y) = (-y)^n + y^n = \begin{cases} -y^n + y^n = 0 \text{ si } n = 3,5,7,... \\ y^n + y^n \neq 0 \text{ si } n = 2,4,6,... \end{cases}$

Il est donc possible de décomposer de façon analogue $x^n + y^n$ si n est impair $(n \neq 1)$.

	1	0	0	0	...	0	0	y^n
$-y$		$-y$	y^2	$-y^3$	...	$-y^{n-2}$	y^{n-1}	$-y^n$
	1	$-y$	y^2	$-y^3$	...	$-y^{n-2}$	y^{n-1}	0

$\Rightarrow p(x) = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + ... - xy^{n-2} + y^{n-1})$

Le 24 octobre 2013