

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

**ALG 46**

**EXALG460 – EXALG469**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson  
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans  
Fabienne Zoetard

Septembre 2013

## EXALG460 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Résoudre

$$\log_5(2x) - \log_5(1 + \sqrt{x}) \leq 1$$

---

### Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\text{CE: } 2x > 0; \quad x \geq 0; \quad 1 + \sqrt{x} > 0 \quad \text{Donc } x \in \mathbb{R}_0^+.$$

$$\text{Alors : } \log_5 \frac{2x}{1 + \sqrt{x}} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{2x}{1 + \sqrt{x}} \leq 5 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 5(1 + \sqrt{x}) \text{ car } 1 + \sqrt{x} > 0$$

$$\Rightarrow 2x - 5\sqrt{x} - 5 \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{On pose } y = \sqrt{x} \Rightarrow p(y) = 2y^2 - 5y - 5 \text{ dont les zéros sont } y = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{4}$$

$$\text{D'où le tableau de signes : } \begin{array}{c|ccc} y & \frac{5 - \sqrt{65}}{4} & & \frac{5 + \sqrt{65}}{4} \\ \hline p(y) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\text{Ainsi : } p(y) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{65}}{4} \leq y \leq \frac{5 + \sqrt{65}}{4} \Rightarrow \frac{5 - \sqrt{65}}{4} \leq \sqrt{x} \leq \frac{5 + \sqrt{65}}{4}$$

La première inégalité est toujours vérifiée puisque  $\frac{5 - \sqrt{65}}{4}$  est négatif. et  $\sqrt{x} > 0$

$$\Rightarrow 0 < x \leq \left( \frac{5 + \sqrt{65}}{4} \right)^2 \Rightarrow \boxed{0 < x < \frac{90 + 10\sqrt{65}}{16} \approx 10.66}$$

Note : (1) peut aussi s'écrire  $2x - 5 \leq 5\sqrt{x}$  et on peut songer à élever au carré. Mais attention dans ce cas une discussion s'impose car  $a \leq b$  n'est pas équivalent à  $a^2 \leq b^2$ .

Il faut envisager le cas où  $2x - 5$  est positif et où il est négatif, etc....

---

Le 24 octobre 2013

## EXALG461 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} < \sqrt{x^2 + 6x + 11} - 1$$

---

$$\sqrt{x^2 + 6x + 8} < \sqrt{x^2 + 6x + 11} - 1$$

$$CE : 1) x^2 + 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \in ]-\infty, -4] \cup [-2, \infty[$$

$$2) x^2 + 6x + 11 \geq 0 \text{ Toujours vérifiée car } \Delta < 0$$

$$3) \sqrt{x^2 + 6x + 11} > 1 \text{ (les deux membres sont positifs)} \Rightarrow x^2 + 6x + 11 > 1 \\ \Rightarrow x^2 + 6x + 10 > 0 \text{ Toujours vérifiée car } \Delta < 0$$

Les deux membres de l'inéquation étant positifs, on peut élever au carré. On a donc :

$$x^2 + 6x + 8 < x^2 + 6x + 11 - 2\sqrt{x^2 + 6x + 11} + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 6x + 11} < 2$$

Les deux membres sont encore positifs:  $x^2 + 6x + 11 < 4 \Rightarrow x^2 + 6x + 7 < 0$

$$\Rightarrow x \in ]-3 - \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2}[$$

En tenant de la CE, on obtient la solution :  $x \in ]-3 - \sqrt{2}, -4] \cup [-2, -3 + \sqrt{2}[$

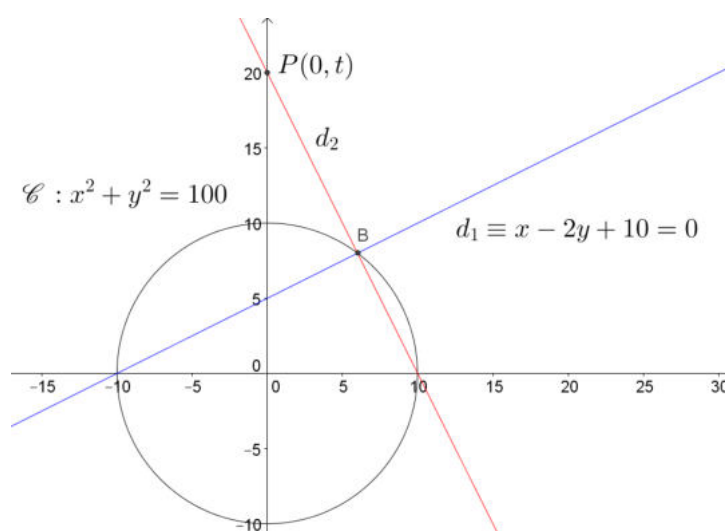
---

Le 24 octobre 2013

## EXALG462 – EPL, UCL, LLN, juillet 2013 série 2.

la droite  $d_1$  d'équation  $x - 2y + 10 = 0$  rencontre le cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 100$  au point  $B$  dans le premier quadrant. Une droite passant par  $B$ , perpendiculaire à la droite  $d_1$  coupe l'axe des  $y$  au point  $P$  de coordonnées  $(0, t)$ . Déterminer la valeur de  $t$ .

### Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$B \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 5\right)^2 = 10 \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(6, 8) \\ x = -10 \text{ A rejeter car } B \in Q1 \end{cases}$$

$$\text{Pente de } d_2 : m_{d_2} = -\frac{1}{m_{d_1}} = -2 \text{ et comme } B \in d_2 \Rightarrow d_2 \equiv y - 8 = -2(x - 6)$$

$$\Rightarrow d_2 \equiv y = -2x + 20$$

$$\Rightarrow P = d_2 \cap Oy \Rightarrow P(0, 20) \Rightarrow \boxed{t = 20}$$

Le 24 octobre 2013

## EXALG463 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

a) Déterminer les valeurs du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible.}$$

b) Déterminer l'inverse de cette matrice pour  $m = -1$ .

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro.

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_m &= \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ m-1 & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} && \text{C1} \leftarrow \text{C1} - \text{C3} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m & 2 \\ 0 & 2m & m+2 \end{vmatrix} && \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1} \\ &= (m-1)m \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m+2 \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\ &= (m-1)m(m-2) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A}_m \text{ inversible} \Leftrightarrow \det \mathcal{A}_m \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$

b) Dans le cas où  $m = -1$ , la matrice devient :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det \mathcal{A}_1 = (-2)(-1)(-3) = -6$$

La matrice adjointe  $\text{Adj } \mathcal{A}$  est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj } \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}_1} \text{Adj } \mathcal{A}_1 = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

## EXALG464 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $k$ , le système

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + ky + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (k-5)z = 7 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Indiquer un résumé final de la discussion de ce système et, dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & k-6 \end{vmatrix} && \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1} \\ &= 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ k & 2 \end{vmatrix} + (k-6) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\ &= 5(6-k) + (k-6)(2k+3) \\ &= 2(k-6)(k-1) \\ \det \mathcal{A} = 0 &\Leftrightarrow k \in \{1, 6\} \end{aligned}$$

Si  $k = 1$ , le système devient

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \\ 7x + 3y - 4z = 7 \end{cases} \begin{matrix} \\ 3/2 \\ 1/2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + z = 11 \end{cases} \quad \text{Absurde !}$$

Le système est **impossible** avec comme solution  $= \emptyset$ .

Si  $k = 6$ , le système devient :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Le système est simplement indéterminé} \\ 3E_1 - E_2 = E_3 \end{matrix}$$

On peut calculer une solution en posant par exemple  $z = \alpha \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 - \alpha \\ -x + 6y = 5 - 2\alpha \end{cases} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 3 \\ 15y = 14 - 5\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/5 \\ y = (14 - 5\alpha)/15 \end{cases}$$

Une solution est donc

$$S = \left\{ \left( \frac{3}{5}, \frac{14}{15} - \frac{\alpha}{3}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Si  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$ , le système est déterminé, et donc cramérien :

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} \stackrel{L_3-L_1 \rightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 3 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & k \end{vmatrix} + (k-6) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & k \end{vmatrix}$$

$$= 3(6-k) + (k-6)(4k-15) = 2(k-6)(2k-9)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & k-5 \end{vmatrix} \stackrel{C_2-C_1 \rightarrow C_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & k-5 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + (k-5) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -14 + (k-5) \cdot 14 = 14(k-6)$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{L_3-L_1 \rightarrow L_3}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ k & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix}$$

$$= 5(15-4k) + 3(2k+3) = 84-14k = -14(k-6)$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{2(k-6)(2k-9)}{2(k-6)(k-1)} = \frac{2k-9}{k-1}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{14(k-6)}{2(k-6)(k-1)} = \frac{7}{k-1}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-14(k-6)}{2(k-6)(k-1)} = -\frac{7}{k-1}$$

La solution est :  $S = \left\{ \frac{2k-9}{k-1}, \frac{7}{k-1}, \frac{-7}{k-1} \right\}$

### Résumé final

$k = 1$	Système impossible. Trois plans n'ayant aucun point en commun	$S = \emptyset$
$k = 6$	Système simplement indéterminé. Trois plans ayant en commun une droite passant par le point $A\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{15}, 0\right)$ et de vecteur directeur $u(0, -1, 3)$	$S = \left\{ \left( \frac{3}{5}, \frac{14}{15} - \frac{\alpha}{3}, \alpha \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$
$k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$	Système déterminé. Trois plans en commun en un seul point.	$S = \left\{ \left( \frac{2k-9}{k-1}, \frac{7}{k-1}, \frac{-7}{k-1} \right) \right\}$

Solution proposée par Dominique Druetz

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 2(k-6)(k-1)$ $\det A_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 7 & 3 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & k & 2 \\ 3 & 0 & k-6 \end{vmatrix} = 2(k-6)(2k-9)$ $\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & k-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 7 & 0 & k-5 \end{vmatrix} = 14(k-6)$ $\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & k & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & k & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -14(k-6)$	
<p><math>k=6</math></p> $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \rightarrow (3) - (2) \rightarrow 5x = 3 \rightarrow x = 3/5 \\ 7x + 3y + z = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{6}{5} + 3y + z = 4 \\ -\frac{3}{5} + 6y + 2z = 5 \rightarrow \begin{cases} 3y + z = \frac{14}{5} \\ 6y + 2z = \frac{28}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{14}{15} - \alpha \\ z = 3\alpha \end{cases} \\ \frac{21}{5} + 3y + z = 7 \end{cases}$	<p><math>k=6</math> Droite intersection de 3 plans passant par le point <math>(3/5, 14/5, 0)</math> et de vecteur directeur <math>(0, -1, 3)</math></p>
<p><math>k=1</math></p> $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \rightarrow \begin{cases} 5y + 5z = 14 \\ -x + y + 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \text{impossible} \\ 7x + 3y - 4z = 7 \rightarrow 10y + 10z = 42 \end{cases}$	<p><math>k=1</math> Trois plans sans intersection</p>
<p><math>k \neq 1, k \neq 6</math></p> $S = \left\{ \left( \frac{2k-9}{k-1}, \frac{7}{k-1}, -\frac{7}{k-1} \right) \right\}$	<p><math>k \neq 1, k \neq 6</math> Un point intersection de 3 plans.</p>

Le 4 février 2014. (Modifié le 2 mai 2014 – Dominique Druetz)



## EXALG465 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i),$$

sachant qu'elle admet au moins une solution réelle

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul de la racine réelle

Soit  $z_1$  la racine réelle :

$$z_1 = a + 0.i$$

On la remplace dans l'équation, et on considère ensuite séparément la partie réelle et la partie imaginaire de celle-ci.

Partie réelle :  $2a^2 - 5a + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)(2a-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = \frac{3}{2}$$

Partie imaginaire :  $4a^3 + 6a^2 - 4a - 21 = 0$

On vérifie que  $a = 1$  n'est **pas** une solution de cette équation,  
 $a = \frac{3}{2}$  **est** bien une solution de cette équation.

Donc :

$$z_1 = \frac{3}{2}$$

### Calcul des deux racines complexes

Réduction de degré par la règle de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4i & 2 + 6i & -5 - 4i & 3 - 21i \\ & & 6i & 3 + 18i & -3 + 21i \\ \hline \frac{3}{2} & 4i & 2 + 12i & -2 + 14i & 0 \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 4iz^3 + 2(1 + 3i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(1 - 7i) &= \left(z - \frac{3}{2}\right)(4iz^2 + (2 + 12i)z + (-2 + 14i)) \\ &= 2i\left(z - \frac{3}{2}\right)(2z^2 + (6 - i)z + (7 + i)) \end{aligned}$$

Les deux racines  $z_2$  et  $z_3$  sont donc les racines de l'équation suivante :

$$2z^2 + (6 - i)z + (7 + i) = 0$$

Calcul du discriminant :

$$\Delta = (6 - i)^2 - 8(7 + i) = -21 - 20i$$

Calcul des racines carrées  $x + iy$  du discriminant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = -20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = 441 \\ 4x^2y^2 = 400 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 841$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x^2 - y^2 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 5 \end{cases} \text{ et signes opposés}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(2 - 5i)$$

Les deux racines complexes sont donc :

$$z_{2,3} = \frac{1}{4}(-6 + i \pm (2 - 5i)) = \begin{cases} z_2 = \frac{1}{4}(-4 - 4i) = -(1 + i) \\ z_3 = \frac{1}{4}(-8 + 6i) = -(2 - \frac{3}{2}i) \end{cases}$$

**L'ensemble des solutions de l'équation (1) est :**

$$S = \left\{ \frac{3}{2}; -(1 + i); -\left(2 - \frac{3}{2}i\right) \right\}$$

---

Le 4 février 2014

## EXALG466 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$ , en discutant en fonction du paramètre réel  $m$ , le système

$$\begin{cases} mx & - & my & + & m^2z & = & m \\ x & + & y & - & z & = & m \\ (m-1)x & + & (m^2-1)y & - & (m-1)z & = & m^2-1 \end{cases}$$

Indiquer un résumé de la discussion de ce système et, dans chaque cas, interpréter géométriquement les ensembles de solutions obtenus.

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Calcul du déterminant de la matrice des coefficients de ce système :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & -1 \\ m-1 & m^2-1 & -(m-1) \end{vmatrix} = m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & -2 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{L1} \leftarrow \text{L1} - \text{L2} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L2} \end{array} \\ &= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} && \text{Laplace} \\ &= m^2(m-1)(m+1) \end{aligned}$$

$$\det \mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow k \in \{-1, 0, 1\}$$

Si  $m = 0$ , le système devient

$$\begin{cases} 0 & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \\ -x - y + z & = & -1 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \Rightarrow 0 = -1 \text{ Absurde !}$$

Le système est **impossible** et l'ensemble de ses solutions est vide :  $S = \emptyset$

Si  $m = 1$ , le système devient

$$\begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ x + y - z & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** et  $S = \{(1; k; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

Si  $m = -1$ , le système devient

$$\begin{cases} -x + y + z & = & -1 \\ x + y - z & = & -1 \\ -2x + 2z & = & 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Le système est **simplement indéterminé** et  $S = \{(k; -1; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

Si  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ , alors le système est **déterminé**, et donc cramerien :

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_x &= \begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ m & 1 & -1 \\ m^2 - 1 & m^2 - 1 & -(m-1) \end{vmatrix} = m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} && \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L2} \\ &= m(m-1) \left( \begin{vmatrix} -1 & m \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} \right) \\ &= m(m-1)(1-m-m(-1-m^2)) \\ &= m(m-1)(m^3+1) \\ &= m(m-1)(m+1)(m^2-m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_y &= \begin{vmatrix} m & m & m^2 \\ 1 & m & -1 \\ m-1 & m^2-1 & -(m-1) \end{vmatrix} = m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & m+1 & -1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{L1} \leftarrow \text{L1} - \text{L2} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L2} \end{array} \\ &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & 1-m & m+1 \\ 1 & m & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -m(m-1) \begin{vmatrix} 1-m & m+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= m(m-1)(m+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_z &= \begin{vmatrix} m & -m & m \\ 1 & 1 & m \\ m-1 & m^2-1 & m^2-1 \end{vmatrix} = m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} \text{L2} \leftarrow \text{L2} - \text{L1} \\ \text{L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1} \end{array} \\ &= m(m-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m-1 \\ 0 & m+2 & m \end{vmatrix} \\ &= m(m-1) \begin{vmatrix} 2 & m-1 \\ m+2 & m \end{vmatrix} \\ &= m(m-1)(-m^2+m+2) \\ &= -m(m-1)(m+1)(m-2) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det \mathcal{A}_x}{\det \mathcal{A}} = \frac{m(m-1)(m+1)(m^2-m+1)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{m^2-m+1}{m} \\ y &= \frac{\det \mathcal{A}_y}{\det \mathcal{A}} = \frac{m(m-1)(m+1)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m} \\ z &= \frac{\det \mathcal{A}_z}{\det \mathcal{A}} = \frac{-m(m-1)(m+1)(m-2)}{m^2(m-1)(m+1)} = \frac{2-m}{m} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est :  $S = \left\{ \left( \frac{m^2-m+1}{m}; \frac{1}{m}; \frac{2-m}{m} \right) \right\}$

### Résumé final :

$m = 0$     Système impossible     $S = \emptyset$

Trois plans n'ayant aucun point en commun.

$m = 1$     Système simplement indéterminé     $S = \{(1; k; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

$m = -1$     Système simplement indéterminé     $S = \{(k; -1; k) \mid k \in \mathbb{R}\}$

Trois plans ayant en commun une droite passant par le point  $A(0, -1, 0)$  et de vecteur directeur  $\mathbf{u}(1, 0, 1)$ , donc parallèle au plan  $Oxz$ .

$m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, +1\}$     Système déterminé     $S = \left\{ \left( \frac{m^2-m+1}{m}; \frac{1}{m}; \frac{2-m}{m} \right) \right\}$

Trois plans ayant en commun un seul point.

## EXALG467 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^4 - (3+8i)z^2 - 16+12i = 0$

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Il s'agit d'une équation **bicarrée**. Elle possède 4 racines, réparties en deux couples de racines opposées.

Posons  $z^2 = t \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{t}$ .

**Résolution de l'équation en  $t$  :**

$$\begin{aligned}t^2 - (3+8i)t - 4(4-3i) &= 0 \\ \Delta &= (3+8i)^2 + 16(4-3i) \\ &= 9 + 48i - 64 + 64 - 48i \\ &= 9 \\ \sqrt{\Delta} &= 3 \\ t_{1,2} &= \frac{1}{2}(3+8i \pm 3) = \begin{cases} t_1 = 3+4i \\ t_2 = 4i \end{cases}\end{aligned}$$

**Calcul de  $z_1$  et  $z_2$  comme les racines carrées de  $t_1 = 3+4i$  :**

$$\begin{aligned}z^2 &= (x+iy)^2 = 3+4i \\ \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 &= 9 \\ 4x^2y^2 &= 16 \end{cases} \\ (x^2 + y^2)^2 &= 25 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 &= 5 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ et même signe} \\ z_{1,2} &= \pm(2+i)\end{aligned}$$

**Calcul de  $z_3$  et  $z_4$  comme les racines carrées de  $t_2 = 4i$  :**

$$\begin{aligned}z^2 &= (x+iy)^2 = 4i \\ \begin{cases} x^2 - y^2 &= 0 \\ 2xy &= 4 \end{cases} \\ \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 &= 0 \\ 4x^2y^2 &= 16 \end{cases} \\ (x^2 + y^2)^2 &= 16 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \\ z_{3,4} &= \pm\sqrt{2}(1-i)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :  $S = \{2+i; -(2+i); \sqrt{2}(1+i); -\sqrt{2}(1+i)\}$

## Solution proposée par Dominique Druetz

$$z^4 - (3 + 8i)z^2 - 16 + 12i = 0$$

$$x^2 - (3 + 8i)x - 16 + 12i = 0$$

$$\rho = (3 + 8i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16 + 12i) = 9 + 48i - 64 + 64 - 48i = 9$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3 + 8i - 3}{2} = 4i \\ x_2 = \frac{3 + 8i + 3}{2} = 4i + 3 \end{cases}$$

- $x_1 = 4i$

$$z^2 = (a + bi)^2 = x_1 = 4i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ 2ab = 4 \end{cases} \rightarrow ab = 2 \rightarrow a = b = \pm\sqrt{2}$$

- $x_2 = 4i + 3$

$$z^2 = (a + bi)^2 = x_2 = 4i + 3$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ 2ab = 4 \end{cases} \rightarrow b = \pm 1 \text{ (même signe que } a)$$

Poser  $x = z^2$

$$z_1 = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$z_2 = -\sqrt{2}(1 + i)$$

$$z_3 = 2 + i$$

$$z_4 = -(2 + i)$$

---

Le 4 février 2014. Modifié le 2 mai 2014.

## EXALG468 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

a) Déterminer les valeurs du paramètre  $a \in \mathbb{R}$  pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} -2-2a & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -3a-2 & 2+3a & -2-3a \\ -a^2+3a-2 & 0 & a^2-a-2 \end{pmatrix} \quad \text{est inversible}$$

b) Déterminer l'inverse de cette matrice si  $a = 1$

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La matrice est inversible à condition que son déterminant soit différent de zéro.

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} -2-3a & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -3a-2 & 2+3a & -2-3a \\ -a^2+3a-2 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -(3a+2) & 3a+2 & -(3a+2) \\ -(a-1)(a-2) & 0 & (a+1)(a+2) \end{vmatrix} \\ &= (3a+2)(a-2) \begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2+4 & 3a-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -(a-1) & 0 & (a+1) \end{vmatrix} \\ &= (3a+2)(a-2) \begin{vmatrix} -(3a+2) & 9a^2-3a+2 & 6a \\ -1 & 0 & 0 \\ -(a-1) & -(a-1) & 2a \end{vmatrix} \\ &= 2a(3a+2)(a-2) \begin{vmatrix} 9a^2-3a+2 & 3 \\ -(a-1) & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2a(3a+2)(a-2)(9a^2-1) \\ &= 2a(3a+2)(a-2)(3a-1)(3a+1) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{A} \text{ inversible} \Leftrightarrow \det \mathcal{A} \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; 2 \right\}$$

b) Dans le cas où  $m = -1$ , la matrice devient :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et selon ce qui précède, son déterminant est égal à

$$\det \mathcal{A} = (-2)(-1)(-3)(-4)(-2) = -48$$

La matrice adjointe  $\text{Adj } \mathcal{A}$  est le transposé de la matrice des cofacteurs :

$$\text{Adj } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & -30 & -78 \\ 8 & -6 & -14 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -6 & -30 & -6 \\ -6 & -78 & -14 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc :

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \text{Adj } \mathcal{A} = \frac{-1}{48} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ -6 & -30 & -6 \\ -6 & -78 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 3 & 15 & 3 \\ 3 & 39 & 7 \end{pmatrix}$$

## EXALG469 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Soit un polynôme à coefficients réels  $P(x) = ax^2 + bx + c$  tel que  $c < 0 < a$ .

a) Prouver que le discriminant  $\Delta_P = b^2 - 4ac$  est strictement positif et que le polynôme admet deux racines réelles  $u$  et  $v$  telles que  $u < 0 < v$ .

b) Soit  $e = \frac{v}{2}$  et  $Q(x) = -x^2 P\left(e + \frac{1}{x}\right) = a'x^2 + b'x + c'$ . Etablir  $c' < 0 < a'$  et  $\Delta_Q = \Delta_P$ .

c) Pour quelles valeurs de  $e \in \left\{0, \frac{u}{3}, \frac{u+v}{4}, -\frac{b}{10a}, \sqrt{-u}, \sqrt{v}, \sqrt{-uv}\right\}$  le point b) reste-t-il vrai ?

---

### Nous reprenons la solution proposée par l'université.

*Solution.* Le point a) est évident: le discriminant  $b^2 + 4a|c|$  est la somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif; de plus, le produit  $c/a$  des racines est strictement négatif.

b). On commence par calculer le polynôme  $Q$ , pour n'importe quelle valeur de  $e$ . On obtient facilement  $a' = -(ae^2 + be + c)$ ,  $b' = -2ae - b$  et  $c' = -a$  et on observe que  $a' = -P(e)$  est strictement positif si et seulement si  $e$  est strictement compris entre les deux racines  $u$  et  $v$ , ce qui est le cas pour  $e = v/2$ . On a enfin  $\Delta_Q = (2ae + b)^2 - 4a(ae^2 + be + c)$ , ce qu'un calcul élémentaire permet de réduire à  $b^2 - 4ac$ .

c). Le point b) reste vrai pour toute valeur de  $e$  strictement comprise entre  $u$  et  $v$ . C'est toujours le cas pour  $0, \frac{u}{3}, \frac{u+v}{4}$  et  $-\frac{b}{10a}$  (puisque  $-\frac{b}{2a}$  est la moyenne arithmétique des racines). Ce n'est pas toujours vrai pour les trois autres valeurs proposées; un contre-exemple commun est  $P'(x) = 6x^2 + x - 1$ .

---

Le 11 février 2014