Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 47

EXALG470 – EXALG479

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Février 2014

EXALG470 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante, dans laquelle a est un paramètre réel:

$$a+\sqrt{x-a} \leq \frac{x}{a-\sqrt{x-a}}$$

Quand a-t-on l'égalité?

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. Les conditions d'existence sont $x \geq a$ et $a \neq \sqrt{x-a}$. Si le dénominateur $a-\sqrt{x-a}$ est strictement négatif, l'inéquation peut se récrire en $(a+\sqrt{x-a})(a-\sqrt{x-a}) \geq x$, puis en $a^2-(x-a) \geq x$, ce qui se réduit à $2x \leq a^2+a$. Si le dénominateur est strictement positif, l'inéquation se réduit à $2x \geq a^2+a$.

Compte tenu des conditions d'existence, le dénominateur est strictement positif si

$$x \geq a \geq 0 \text{ et } a^2+a > x\,;$$

il est strictement négatif si

$$x \geq a \text{ et } (a<0 \text{ ou } a^2+a<x)\,.$$

On en tire les conclusions suivantes, où S est l'ensemble des solutions:

- Si $a<0$, le dénominateur est toujours négatif et $S=\{x : 2a \leq 2x \leq a^2+a\}$, avec égalité pour $x=(a^2+a)/2$.
- Si $a=0$, alors $S=\emptyset$.
- Si $a>0$, il n'y a de solutions que si le dénominateur est positif car les inégalités $x \geq a$, $a^2+a<x$ et $2x \leq a^2+a$ sont incompatibles; on a donc
  - Si $0<a<1$, alors $S=\{x : a \leq x < a^2+a\}$ (égalité: jamais).
  - Si $a \geq 1$, alors $S=\{x : a^2+a \leq 2x < 2a^2+2a\}$ (égalité pour $x=(a^2+a)/2$).

Le 24 octobre 2013

EXALG471 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant dans lequel m est un paramètre complexe :

$$\begin{cases} mx+y=-i \\ ix+(im+2)\,y=-m \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m admet-il au moins une solution (x,y) telle que $x,y\in\mathbb{R}$?.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. Le déterminant Δ vaut $\begin{vmatrix} m & 1 \\ i & im+2 \end{vmatrix} = im^2+2m-i = i(m^2-2im-1) = i(m-i)^2$.

Il s'annule pour $m=i$; dans ce cas, chacune des équations se ramène à $ix+y=-i$ et, si x est un complexe quelconque, le couple $(x,-i(1+x))$ est une solution; x et y sont réels tous les deux dans le seul cas $(x,y)=(-1,0)$.

Si $m\neq i$, la solution unique est

$$x=\frac{2(m-i)}{\Delta}=\frac{2}{i(m-i)}\ ;\ y=-\frac{m^2+1}{\Delta}=-\frac{m+i}{i(m-i)}\,.$$

Le nombre x est réel si et seulement si m est imaginaire pur; dans ce cas, Δ et y sont aussi imaginaires purs et y ne peut être réel que s'il s'annule. La seule valeur de m rendant x et y réels tous les deux est $m=-i$; on a alors $(x,y)=(1,0)$.

Le 24 octobre 2013

EXALG472 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} (a-1)x + (a-2)y + az = 2a+1 \\ ax + 2az = 6a-2 \\ x + (2-a)y + az = 4a-3 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. On peut d'abord observer que la deuxième équation est inutile, puisque c'est la somme des deux autres. En remplaçant la première équation par la différence de la première et de la troisième, on obtient:

$$\begin{cases} (a-2)x + 2(a-2)y = -2(a-2)\,, \\ x + (2-a)y + az = 4a-3\,. \end{cases}$$

- Si $a = 2$, la première équation disparaît et le système se réduit à $x + 2z = 5$.
  Les solutions sont $x = 5 - 2\lambda$, $y = \mu$, $z = \lambda$.
- Si $a = 0$, le système devient:
  $$\begin{cases} x + 2y = -2\,, \\ x + 2y = -3\,. \end{cases}$$
  Il n'admet pas de solution.
- Dans les autres cas, c'est-à-dire quand $a(a-2) \neq 0$, le système devient:
  $$\begin{cases} x + 2y = -2\,, \\ x + (2-a)y + az = 4a-3\,. \end{cases}$$
  les solutions sont $y = \lambda$, $x = -2 - 2\lambda$, $az = 4a - 3 + 2 + 2\lambda - (2-a)\lambda$,
  c'est-à-dire: $z = \lambda + \frac{4a-1}{a}$; λ et μ sont des paramètres quelconques.

Le 24 octobre 2013

EXALG473 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Soit P le polynôme

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 + \alpha x + \beta,$$

Calculer les nombres α et β ainsi que les quatre racines de P, sachant que la somme de deux des racines vaut 2 et que le produit des deux autres racines vaut 3.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. Le polynôme peut se récrire en:

$$(x^2 - 2x + \lambda)(x^2 - \mu x + 3),$$

où λ et μ sont des nombres à déterminer. En développant le produit, on obtient:

$$x^4 - (2+\mu)x^3 + (3 + 2\mu + \lambda)x^2 - (6 + \lambda\mu)x + 3\lambda.$$

En identifiant les termes en x^3, on obtient $\mu = 4$. On identifie ensuite les termes en x^2, ce qui donne $\lambda = 3$. On identifie enfin les termes en x et les termes indépendants, ce qui donne $\alpha = -18$ et $\beta = 9$. Le polynôme factorisé se récrit en:

$$(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4x + 3),$$

d'où on déduit immédiatement l'ensemble des racines:

$$\{1 - i\sqrt{2},\ 1 + i\sqrt{2},\ 1,\ 3\}.$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Rappel

Soit le polynôme $P(x)$ un polynôme du quatrième degré, avec le coefficient du terme en x^4 égal à 1 :

$$P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

et notons $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ ses quatre racines, différentes ou pas, réelles ou pas (voir remarque ci-dessous). Le polynôme s'écrit alors comme le produit de ses quatre facteurs linéaires :

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Identification des coefficients des différentes puissances de x dans les deux écritures donne :

$$\begin{aligned}
b &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -S && (1)\\
c &= +(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) && (2)\\
d &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) && (3)\\
e &= +(x_1x_2x_3x_4) = (-1)^4\, P = +P && (4)
\end{aligned}$$

Remarque : si tous les coefficients sont réels, alors les racines sont réelles et/ou des *couples* de racines complexes conjuguées.

Solution alternative

La solution proposée ici est (un peu) plus longue que celle proposée par l'université, mais elle utilise seulement les relations $(1) - (4)$, sans passer par la factorisation (d'ailleurs parfaitement justifiée) du polynôme en un produit de deux polynômes du second degré, et sans l'introduction de deux inconnues supplémentaires.

Les données sont :

$$S = -b = 6\ ;\ \ c = 14\ ;\ \ x_1 + x_2 = 2\ ;\ x_3 . x_4 = 3$$

On peut immédiatement calculer x_3 et x_4 (dans un ordre quelconque) :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = S - 2 = 4 \\ x_3 .\ \ x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow\ x(4 - x) = 3 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 4x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{x_3 = 1}\ \text{ et }\ \boxed{x_4 = 3}$$

On remplace ces valeurs dans la relation (2) avec $x_1 = x$ et $x_2 = 2 - x$:

$$\begin{aligned}
& x(2 - x) + x + 3x + (2 - x) + 3(2 - x) + 3 = 14\\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 2x + 3 = 0\\
\Rightarrow\ & \Delta = 4 - 12 = -8 \quad \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}i \quad x = 1 \pm i\sqrt{2}\\
\Rightarrow\ & \boxed{x_1 = 1 + i\sqrt{2}}\ \text{ et }\ \boxed{x_2 = 1 - i\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Le polynôme est alors :

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 3) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9 \qquad (\alpha = -18\ , \beta = 9)$$

Le 4 février 2014. Modifié le 8 novembre 2016 (Jan Frans Broeckx)

EXALG474 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\log_2(x+1)+4\log_4(x)<1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Solution. On note d'abord que x doit être strictement positif. L'inéquation se récrit successivement en:

$$\log_2(x+1)+\log_4(x^4)<1\,,$$

$$\log_2(x+1)+\log_2(x^2)<1\,,$$

$$\log_2[x^2(x+1)]<1\,,$$

$$x^2(x+1)<2\,,$$

$$x^3+x^2<2\,.$$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle ouvert $]0:1[$.

Le 4 février 2014

EXALG475 – EPL, ULC, LLN, juillet 2014 série 1.

1.1 Déterminer a et b tels que

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1024}=a+bi$$

1.2 Pour quels entiers $n\in\mathbb{Z}$ a-t-on l'égalité

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=i$$

Solution proposée par Nicole Berckmans.

1.1 $$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1024}=\left(\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1024}=\operatorname{cis}\left(-\frac{1024\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}(-128\times 2\pi)$$

$$=\operatorname{cis}(0)=1+0$$

$$\Rightarrow \boxed{a=1 \text{ et } b=0}$$

1.2 $$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\operatorname{cis}\left(-n\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -n\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{n=-2-8k}$$

Le 5 juillet 2014

EXALG476 – EPL, ULC, LLN, juillet 2014 série 1.

Pour quelles valeurs du paramètre m, le système d'équations suivant possède au moins une solution en x et y dans $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans.

Transformons le système

$$\begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ 2+x+y+xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=m(1+xy) \\ x+y=-2-xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=(1+xy)m-2-xy \\ 2y=-2-xy-(1+xy)m \end{cases}$$

Multiplions membre à membre ces deux équations.

$$\Rightarrow 4xy=\left[-2-xy-(1+xy)m\right]\left[(1+xy)m-2-xy\right]$$

Posons : $z=xy$

On développe cette équation en z. On obtient

$$(1-m^2)z^2-2m^2z+4-m^2=0 \qquad (*)$$

Si $m^2=1$, alors $z=2$ et x et y existent.

Si $m^2\neq 1$, l'équation $(*)$ possède au moins une solution si et seulement si

$$\frac{\Delta}{4}=m^4-(1-m^2)(4-m^2)=5m^2-4\geq 0$$

Dès lors, si $m\leq\frac{-2}{\sqrt{5}}$ ou si $m\geq\frac{2}{\sqrt{5}}$, alors xy existe. Par conséquent, x et y se trouvent à partir du système donné

Le 5 juillet 2014

EXALG477 – EPL, ULC, LLN, juillet 2014 série 2.

Trouvez toutes les racines, éventuellement complexes, du polynôme

$$P(x) = x^3 - 4\sqrt{2}x^2 + 9x - 2\sqrt{2}$$

sachant que l'une d'entre elles est la somme des deux autres.

Solution proposée par Nicole Berckmans.

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ où $x_1 = x_2 + x_3$

L'opposé du coefficient du x^2 : $4\sqrt{2} = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow 4\sqrt{2} = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{2}$

Horner

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4\sqrt{2} & 9 & -2\sqrt{2} \\ \hline 2\sqrt{2} & & 2\sqrt{2} & -8 & 2\sqrt{2} \\ \hline & 1 & -2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x) = (x - 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} + 1 \\ x_3 = \sqrt{2} - 1 \end{array}}$$

Le 5 juillet 2014

EXALG478 – EPL, ULC, LLN, juillet 2014 série 1.

Pour avoir aidé à récolter les fraises du jardin, Eliane, Michel et Jean-Pierre ont reçu de l'argent de leurs parents. Ils vont au magasin de jouets pour voir ce que chacun pourrait s'acheter avec sa part. En route, Jean-Pierre se plaint : "Pourquoi Michel a-t-il reçu 5 euros de plus que moi?". Eliane lui répond : "Mais c'est parceque il a sept ans de plus que toi!" Jean-Pierre reprend : "Et pourquoi Eliane a-t-elle reçu 10 euros de plus que moi?" Michel lui répond : "C'est parce qu'elle a onze ans de plus que toi."

Après avoir passé 45 minutes dans le magasin, Eliane, Michel et Jean-Pierre partagent leurs conclusions:

- Eliane : "Vous vous rendez compte? Si j'avais en plus de ma part de quoi m'achetez une barbie, j'aurais exactement de quoi me payer deux revolvers et un soldat!"
- Michel : "Et moi, si j'avais en plus de ma part de quoi acheter un soldat, j'aurais exactement de prix d'un revolver et de deux barbies."
- Jean-Pierre : "Moi, je devrais avoir le prix de trois barbies en plus de ma part pour pouvoir m'acheter exactement un revolver et deux soldats."

Trouvez combien d'euros Jean-Pierre a reçu.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Jean-Pierre a reçu} & j\text{ €}\\ \text{Eliane a reçu} & e\text{ €}\\ \text{Michel a reçu} & m\text{ €}\\ \text{1 barbier coûte} & b\text{ €}\\ \text{1 revolver coûte} & r\text{ €}\\ \text{1 soldat coûte} & s\text{ €}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} e = j+10\\ m = j+5\\ e+b = 2r+s\\ m+s = r+2b\\ j+3b = r+s\end{cases}$$

Soit 5 équations à 6 inconnues.

Eliminons e et m : $\begin{cases} b-2r-s = 10-j\\ -2b-r+s = -5-j\\ 3b-r-2s = -j\end{cases}$

Soit $\mathcal{A}$ la matrice des coefficients de b, r et s. Le déterminant de $\mathcal{A}$ est nul. Ce qui implique que les lignes de $\mathcal{A}$ sont liées. En effet, la première ligne est la somme des 2 autres lignes.

Pour que le système soit soluble, il faut que dans la matrice $\begin{pmatrix} -10-j\\ -5-j\\ -j\end{pmatrix}$, il en soit de même.

Donc $-10-j = (-5-j)-j \Rightarrow \boxed{j = 5\text{ €}}$

Le 5 juillet 2014

EXALG479 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014, série 1.

Résoudre dans les nombres complexes, l'équation suivante (ou i désigne l'unité imaginaire)

$$(z-i)^4+4\left(z^2+1\right)^2=0$$

Donner les solutions sous la forme $a+bi$ (avec a et b réels).

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$(z-i)^4+4\left(z^2-(i)^2\right)^2=0$$

$$(z-i)^4+4(z-i)^2(z+i)^2=0$$

$$(z-i)^2\left[(z-i)^2+4(z+i)^2\right]=0$$

$$(z-i)^2\left(4z^2+6iz-5\right)=0$$

$$\Delta'=-9+25=16 \Rightarrow z=\frac{-3i\pm 4}{5}$$

Réponse : $\boxed{\begin{cases} z=i \\ z=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i \\ z=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i \end{cases}}$

Le 8 septembre 2014.