Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 48

EXALG480 – EXALG489

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2014

EXALG480 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014, série 2.

Déterminer pour quelles valeurs réelles du paramètre a, l'inégalité suivante est satisfaite pour toute valeur réelle de x n'annulant pas le dénominateur.

$$\frac{x^2+2x+2a}{x^2+x+2-a^2}>0$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$x^2+2x+2a=0;\quad \Delta_1^{'}=1-2a\quad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-2a}$

$x^2+x+2-a^2=0;\quad \Delta_2=-7+4a^2\quad x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7+4a^2}}{2}$

a		$-\sqrt{7}/2$		$1/2$		$\sqrt{7}/2$	
$\Delta_1^{'}$	+	+	+	0	−	−	−
Δ_2	+	0	−	−	−	0	+
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

Pour (1) et (2), le numérateur et le dénominateur changent de signe mais pas aux mêmes endroits car la somme des racines du numérateur $=-2$ et celle du dénominateur $=1$.

Pour (3),

x		x_1		x_2	
N	+	0	−	0	+
D	+	+	+	+	+
N/D	+	0	−	0	+

Pour (4),

x		-1	
N	+	0	+
D	+	+	+
N/D	+	0	+

Pour (5),

x	
N	+
D	+
N/D	+

Pour (6),

x		$-1/2$	
N	+	+	+
D	+	0	+
N/D	+	/	+

Pour (7),

x		x_3		x_4	
N	+	+	+	+	+
D	+	0	−	0	+
N/D	+	/	−	/	+

Réponse : $\boxed{a\in\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]}$

Le 8 septembre 2014.

EXALG481 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014, série 2.

Trouver tous les polynômes à coefficients réels $P(x)$ de degré 3 tels $(x-1)^2$ divise $P(x)+1$ et $(x+1)^2$ divise $P(x)-1$

Solution proposée par Martine Devillers

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d+1 \\
1 & & a & a+b & a+b+c \\
\hline
 & a & a+b & a+b+c & a+b+c+d+1=0\ (1) \\
1 & & a & 2a+b & \\
\hline
 & a & 2a+b & +3a+2b+c=0\ (2) &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d-1 \\
-1 & & -a & a-b & -a+b-c \\
\hline
 & a & b-a & a-b+c & -a+b-c+d-1=0\ (3) \\
-1 & & -a & 2a-b & \\
\hline
 & a & b-2a & 3a-2b+c=0\ (4) &
\end{array}
$$

Système de 4 équations à 4 inconnues.

$$
\begin{cases}
(1)+(3)\Rightarrow b+d=0 \\
(1)-(3)\Rightarrow a+c+d+1=0 \\
(2)-(4)\Rightarrow 4b=0 \\
(2)+(4)\Rightarrow 6a+2c=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
a=\tfrac{1}{2} \\
b=0 \\
c=-\tfrac{3}{2} \\
d=0
\end{cases}
$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$R(x) = P(x) + 1 \Rightarrow \begin{cases} R(1) = a + b + c + d + 1 = 0 & (1) \\ R'(1) = 3a + 2b + c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$S(x) = P(x) - 1 \Rightarrow \begin{cases} S(-1) = -a + b - c + d - 1 = 0 & (3) \\ S'(-1) = 3a - 2b + c = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)+(3) \Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ (2)-(4) \Rightarrow b = 0 \\ (1)-(3) \Rightarrow a + c + 1 = 0 \\ (2)+(4) \Rightarrow 6a + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \tfrac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = -\tfrac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$P(x) + 1 = (x-1)^2 (ax + b)$$

$T(x) = P(x) - 1 = (x-1)^2 (ax+b) - 2$ est divisible par $(x+1)^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(-1) = 4(-a+b) - 2 = 0 & (1) \\ T'(-1) = -4(-a+b) + 4a = 0 & (2) \end{cases}$$

car $T'(x) = 2(x-1)(ax+b) + a(x-1)^2$

Le système $(1)(2)$ représente 2 équations à 2 inconnues *a* et *b*.

$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow a = \tfrac{1}{2} \Rightarrow b = 1$

Et donc : $P(x) = (x-1)^2 \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) - 1 = \boxed{\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{2} x}$

Le 8 septembre 2014.

EXALG482 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014, série 2.

Albert place ses économies pour trois ans sur un compte d'épargne. Le taux d'intérêt est fixe pour toute l'année, et les intérêts sont capitalisés c'est-à-dire que les intérêts gagnés à la fin de chaque année sont additionnés au capital avant de calculer les intérêts de l'année suivante. Après un an, le capital d'Albert a rapporté 50 euros d'intérêts. Les intérêts produits à l'issue de la deuxième année s'élèvent à 51 euros. Quelle somme totale (capital et intérêts) Albert aura-t-il sur son compte à la fin de la troisième année?

Solution proposée par Nicole Berckmans

$x =$ capital de départ.

Après un an les intérêts sont de 50 €. Le nouveau capital est alors : $x+50 = x\left(1+\frac{50}{x}\right)$.

Après deux ans : $x\left(1+\frac{50}{x}\right)^2 = x\left(1+\frac{50}{x}\right)+50\left(1+\frac{50}{x}\right)$

Or $51 = 50\left(1+\frac{50}{x}\right) \Rightarrow 51 = 50+\frac{2500}{x} \Rightarrow x = 2500$ €

Aprés trois ans : $x\left(1+\frac{50}{x}\right)^3 = 2500\left(1+\frac{50}{2500}\right)^3 \simeq \boxed{2653\ €}$

Le 8 septembre 2014.

EXALG483 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Trouver tous les nombres entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un nombre réel.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = \left(2\operatorname{cis}60°\right)^n = 2^n \operatorname{cis}\left(n60°\right)$

C'est un nombre réel si : $n60° = k180° \Rightarrow n = 3k$

Réponse : n est un multiple, positif, négatif ou nul de 3.

$\boxed{n = 3k \ \mid \ k \in \mathbb{Z}}$

Le 8 septembre 2014.

EXALG484 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Déterminer pour quelles valeurs réelles du paramètre a, la double inégalité suivante est satisfaite pour toute valeur réelle de x.

$$-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Remarquons que le dénominateur est toujours positif vu que son réalisant $\Delta = 1-4 < 0$.

Réduisons donc tout au même commune dénominateur:

$$-3\left(x^2-x+1\right) \underset{(1)}{<} x^2+ax-2 \underset{(2)}{<} 2\left(x^2-x+1\right)$$

Inégalité (1)

On transforme en $0 < 4x^2+(a-3)x+1$

Cette inégalité est toujours vraie à condition que

$$(a-3)^2-16<0 \Rightarrow (a-3)^2 < 16 \Rightarrow -4 < a-3 < 4 \Rightarrow -1 < a < 7$$

Inégalité (2)

Même transformation et raisonnement.

$0 < x^2-(2-a)x+4 \Rightarrow (2+a)^2-16<0 \Rightarrow (2+a)^2 < 16$

$\Rightarrow -4 < 2+a < 4 \Rightarrow -6 < a < 2$

Conclusion : $\boxed{-1 < a < 2}$

Le 8 septembre 2014.

EXALG485 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Trouver toutes les racines, éventuellement complexes, du polynôme suivant, sachant qu'elles sont progression arithmétique :

$$P(x)=8x^3-12x^2-2x+3$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Notons les 3 racines : $a-r, a, a+r$

Donc : $P(x)=8(x-a+r)(x-a)(x-a-r)$

Identifions les coefficients de $x^2 \Rightarrow -12=8(-3a)\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Deux méthodes s'offrent à nous pour poursuivre la résolution.

(1) Coeff de $x^0 : 3=-8\left(\frac{1}{4}-r^2\right)\times\frac{1}{2}\Rightarrow r^2=1\Rightarrow r=\pm 1$

(2) Horner :

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -12 & -2 & 3 \\ \hline \frac{1}{2} & & 4 & -4 & -3 \\ \hline & 8 & -8 & -6 & 0 \end{array}$$

Cherchons les racines de ce quotient : $4x^2-4x-3=0$

$$\Delta'=4+12=16\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{2} \\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les trois racines sont : } -\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}}$$

Une troisième méthode est possible.

$$8x^3-12x^2-2x+3=(8x^3-2x)-(12x^2-3)=2x(4x^2-1)-3(4x^2-1)$$

$$=(4x^2-1)(2x-3)=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \\ x_3=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Ces trois racines sont bien en progression arithmétique.

Prolongement proposé par Robert Moulan

Nous allons chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les solutions réelles de l'équation : $x^3+sx^2+qx+p=0$ (1) soient en progression arithmétique (PA).

Soient $a,b,c\ \in\mathbb{R},$ les solutions cherchées. Donc

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

que nous pouvons identifier avec (1)

$$\frac{1}{1}=\frac{-(a+b+c)}{s}=\frac{ab+bc+ca}{q}=\frac{-abc}{p}$$

D'où l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes :

$$\begin{cases} a+b+c=-s \\ ab+bc+ca=q \\ abc=-p \\ b-a=c-b=r \end{cases}$$

Pour faciliter la suite de la discussion, envisageons le cas $s=0,$ alors $b=0,$ $r^2=-q$ et $p=0$ et l'équation se résume à $x^3+qx=0\Rightarrow x\left(x^2+q\right)=0;$

Si $q>0,$ le problème n'a pas de solution

Si $q=0,$ solution triviale $a=b=c$

Si $q<0,$ alors $r=\pm\sqrt{-q}$ et les trois nombres cherchés sont

$$a=-\sqrt{-q},\ b=0,\ c=\sqrt{-q}$$

Supposons donc $s\neq 0,$ le système devient : $\begin{cases} b=\dfrac{-s}{3} \\ r^2=\dfrac{s^2}{3}-q \\ \dfrac{s^2}{9}-\dfrac{s^2}{3}+q=\dfrac{3p}{s} \end{cases}$

D'où les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du 3ème degré à coefficients réels ait 3 solutions en PA :

$$\boxed{2s^3=9(qs-3p)\text{ et } s^2>3q}$$

Exercices

1) Dans les exercices suivants, reconnaître si l'équation donnée a des solutions réelles en PA.
Si oui, les calculer.

- $x^3 - 6x^2 + x - 6 = 0$ Rép : non
- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ Rèp : $b = 2, r^2 = 1, a = 1, c = 3$
- $x^3 + 3x^2 + 11x + 9 = 0$ Rép : non
- $27x^3 + 27x^2 + 54x + 16 = 0$ Rép : non
- $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$ Rèp : $b = 2;\ r^2 = 6.25, a = -2.5, c = 4.5$
- $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + \left(3\sqrt[3]{4} - 1\right)x - 2 + \sqrt[3]{2} = 0$ Rèp : $b = \sqrt[3]{2}, r^2 = 1,\ a = \sqrt[3]{2} - 1, c = \sqrt[3]{2} + 1$

2) Calculer le paramètre s pour que l'équation $x^3 + sx^2 + 22x - 12\sqrt{2} = 0$ ait 3 solutions réelles en PA.

On doit avoir : $\begin{cases} 2s^3 = 9\left(22s + 36\sqrt{2}\right) & (1) \\ s^2 > 66 & (2) \end{cases}$

La première équation $2s^3 - 198s - 324\sqrt{2} = 0$ est dépourvue de terme en x^2, on peut la résoudre par la méthode de CARDAN, mais pour éviter des calculs fastidieux utilisons la calculatrice CASIO CX 9900 CG:

$s^2 - 99s - 162\sqrt{2} = 0$ a trois solutions : $\begin{cases} s_1 = -8.4852812349 \\ s_2 = -2.46526321 \\ s_3 = 10.95084463 \end{cases}$

Seules s_1 et s_3 vérifient l'inéquation (2).

D'où première réponse $x^3 - 8.485281349x^2 + 22x - 12\sqrt{2}$ qui a pour solutions

$b = \dfrac{-s_1}{3} = 2.28284271$. La présence de $\sqrt{2}$ dans p, suggère que b pourrait être un multiple de $\sqrt{2}$. Ce qui se vérifie : $b = 2\sqrt{2}$.

Avec $r_1^2 = \dfrac{s_1^2}{3} - q = 1.9999996 = 2$ et $r_1 = \pm\sqrt{2}$, on a donc $a = \sqrt{2}$ et $c = 3\sqrt{2}$

Ensuite 2ème réponse : $x^2 + 10.95084463x^2 + 22x - 12\sqrt{2} = 0$ qui a pour solutions :

$b = \dfrac{-s}{3} = -3.6502813$ avec $r = 4.2395354,$ a $a = -7.8898167$ et $c = 0.5892541$

Le 8 septembre 2014. Modifié le 24 juin 2018 (Robert Moulan)

EXALG486 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Piotr, Jean-Charles et Jean-Pierre corrigent les réponses à la question 4 de la partie "algèbre" de l'examen d'admission, chacun à son propre rythme. S'ils travaillent tous les trois ensemble sans interruption, il leur faut deux heures. Par contre, si seulement Piotr et Jean-Charles s'en occupent ensemble; il leur faudra trois heures. Enfin si Piotr commence à travailler seul pendant une heure, la correction pourra être terminée en deux heures par Piotr et Jean-Pierre. On demande combien d'heures seraient nécessaires à chacun des trois pour effectuer la correction tout seul. (Expliquez soigneusement votre raisonnement).

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\text{Appelons : }\begin{cases} N \text{ le nombre de copies à corriger} \\ n_1 \text{ le nombre de copies que Piotr corrige en 1 heure} \\ n_2 \text{ le nombre de copies que Jean-Charles corrige en 1 heure} \\ n_3 \text{ le nombre de copies que Jean-Pierre corrige en 1 heure} \end{cases}$$

On nous dit que

$$\begin{cases} 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 = N & (1) \\ 3n_1 + 3n_2 = N & (2) \\ 3n_1 + 2n_3 = N & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)-(3) : -n_1 + 2n_2 = 0 \Rightarrow n_1 = 2n_2 & (4) \\ (2)-(3) : 3n_2 - 2n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = \dfrac{3}{2} n_2 & (5) \end{cases}$$

Donc

(2) donne : $3n_1 + 3n_2 = 6n_2 + 3n_2 = N \Rightarrow 9n_2 = N$

$\Rightarrow$ Jean-Charles va mettre 9h.

(4) donne : $n_1 = 2n_2 = \dfrac{2}{9} N$

$\Rightarrow$ Piotr va mettre 4h30

(5) donne : $n_3 = \dfrac{3}{2} n_2 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{N}{9} = \dfrac{N}{6}$

$\Rightarrow$ Jean-Pierre va mettre 6h

Le 8 septembre 2014.

EXALG487 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Pour réaliser deux tâches de calcul, on dispose de deux ordinateurs différents, dont on supposera les vitesses constantes mais pas nécessairement identiques : v_1 et v_2 sont exprimées en pétaFLOP par seconde, où le FLOP - FLoating-point OPeration - est l'unité de mesure de la quantité de travail informatique et péta est un préfixe multiplicatif (1 pétaFLOP/s $= 10^{15}$ opérations par seconde).
Lorsque le premier ordinateur réalise la première tâche et que le seond réalise la seconde, ils utilisent le même temps. Par contre, pour réaliser l'autre tâche, ils mettent respectivement 9 secondes et 4 secondes pour arriver au bout.
Déterminer la taille des deux tâches (en pétaFLOP) en sachant que la quantité totale de travail est de 60 pétaFLOP. Déterminer aussi la vitesse de chacun des deux ordinateurs.

Soient T_1 et T_2 les quantités de travail 1 et 2. Soit aussi t le temps. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}T_1 = v_1 t\\ T_2 = v_2 t\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{v_1}{v_2}\\ \left.\begin{array}{l}T_2 = 9v_1\\ T_1 = 4v_2\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{9v_1}{4v_2}\end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{9}{4}.\frac{v_1^2}{v_2^2} \quad v_1 = \frac{2}{3}v_2$$

$$\text{Or } T_1 + T_2 = 60 \Rightarrow \frac{2}{3}v_2 + 4v_2 = 60 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_2 = 6 \\ v_1 = 4 \end{cases}}$$

$$\text{Et donc : } \boxed{\begin{cases} T_1 = 24 \\ T_2 = 36 \end{cases}}$$

Le 8 novembre 2014

EXALG488 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Soit une famille de polynômes du second degré donnée par :

$$P(x) = ax^2 + bx + a$$

où a et b sont des coefficients réels. Soit x_1 une racine de $P(x)$ et x_e l'abscisse de son extremum. Déterminer la condition à imposer à x_1 de façon que $1 < x_e < 2$

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

On peut considérer que $a \neq 0$, sinon $P(x)$ n'est pas une famille de polynômes du second degré.

On peut donc écrire : $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + 1\right)$

On en déduit que $x_1.x_2 = 1$ où x_1 et x_2 sont les deux racines.

or $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_e \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_e \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = 2x_e \Rightarrow x_e = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1}$

On demande : $1 < x_e < 2 \Rightarrow 1 < \frac{x_1^2 + 1}{2x_1} < 2 \Rightarrow 2 < \frac{x_1^2 + 1}{x_1} < 4 \ \ (1)$

<u>1er cas</u> : $x_1 < 0 \Rightarrow \frac{x_1^2 + 1}{x_1} < 0.$ Ce qui en vertu de (1) est impossible.

<u>2ème cas</u> : $x_1 > 0 \Rightarrow 2x_1 < x_1^2 + 1 < 4x_1$

$$\begin{cases} 2x_1 < x_1^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 > 0 & (1) \\ x_1^2 + 1 < 4x_1 \Rightarrow x_1^2 - 4x_1 + 1 < 0 & (2) \end{cases}$$

Etudions (1). $x_1^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0$ qui est toujours vérifié sauf pour $x = -1$

Etudions (2). Les deux racines de cette équation sont : $2 \pm \sqrt{3}$.

Elles sont toutes deux positives.

		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
(1)	$+$	0	$-$	0	$+$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{x_1 \in \left]2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right[\setminus \{1\}}$

Le 8 novembre 2014

EXALG489 – FACSA, ULG, Liège, simulation examen 2014.

Montrez que $1+i$ est une solution de l'équation (dans $\mathbb{C}$)

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12 = 0$$

puis obtenez les autres solutions.

Solution proposée par Anthony Bertagno

Les diviseurs de -12 sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Il est facile de voir que le polyôme $P(x)$ est nul pour $x=-2$ et $x=3$.

Appliquons deux fois Horner :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & -2 & 10 & -12 \\
\hline
3 & & 3 & 0 & -6 & 12 \\
 & 1 & 0 & -2 & 4 & 0 \Rightarrow P(x)=(x-3)(x+2)(x^2-2x+2) \\
\hline
-2 & & -2 & 4 & -4 & \\
 & 1 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

Nous savons que $1+i$ est une racine du troisième facteur, donc son conjugué aussi.

Conclusion : $\boxed{S=\{-2,3,1\pm i\}}$

Le 14 novembre 2014.