

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 49

EXALG490 – EXALG499

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2014

EXALG490 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Pour quelles valeurs du paramètre réel m le polynôme

$$X^2 + (2m - 1)X + m^2$$

admet-il deux racines positives dont l'une est le triple de l'autre?

Quelles sont les racines?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~qribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. En notant a et $3a$ les deux racines, on a:

$$(X - a)(X - 3a) = X^2 - 4aX + 3a^2 = X^2 + (2m - 1)X + m^2,$$

d'où on tire $2m - 1 = -4a$ et $3a^2 = m^2$. On élimine m en égalant les valeurs de $4m^2$ tirées de ces deux égalités; cela donne:

$$1 - 8a + 16a^2 = 12a^2 \quad \text{ou encore} \quad 1 - 8a + 4a^2 = 0,$$

équation dont les racines (positives toutes les deux) sont

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

Les valeurs de $m = (1 - 4a)/2$ correspondantes sont

$$-\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}.$$

Le 25 novembre 2014.

EXALG491 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Résoudre l'inéquation suivante :

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. La condition d'existence est $x \geq -4$; on se limite donc au domaine $[-4 : +\infty[$. Ce domaine se partitionne comme suit:

- Si $-4 \leq x < 1/2$, le membre de gauche est négatif et celui de droite est strictement positif; l'inéquation est vérifiée.
- Si $1/2 \leq x < 1$, les deux membres sont négatifs.
- Si $x \geq 1$, le membre de gauche est positif et le membre de droite est strictement négatif; l'inéquation n'est pas vérifiée.

Seul le deuxième cas nécessite une étude plus poussée. Dans l'intervalle $[1/2 : 1[$, l'inéquation se réécrit en

$$\sqrt{x+4} > \frac{4x-2}{1-x} \quad \text{ou encore} \quad (x+4)(1-x)^2 > (4x-2)^2,$$

ce qui se simplifie en

$$x^3 - 14x^2 + 9x = x(x^2 - 14x + 9) = x(x-a)(x-b) > 0,$$

avec $a = 7 - 2\sqrt{10}$ et $b = 7 + 2\sqrt{10}$. On note que a est dans l'intervalle $[1/2 : 1[$; on a $a \simeq 0.675$. L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[-4 : 7 - 2\sqrt{10}[$.

Le 25 novembre 2014.

EXALG492 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$(1+z^2)^3 = (1-z^2)^3$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. En observant qu'aucune solution ne peut vérifier $1 - z^2 = 0$, on récrit l'équation en

$$\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^3 = 1.$$

Cela se récrit en

$$\frac{1+z^2}{1-z^2} = \lambda,$$

où λ est une des trois racines cubiques de l'unité. En choisissant $\lambda = 1$, on obtient la première solution $z = 0$; en choisissant $\lambda = \text{cis}(\pm 2\pi/3) = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$, on obtient

$$z^2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = \pm i\sqrt{3}.$$

Ces deux valeurs pour z^2 donnent lieu à quatre valeurs pour z :

$$z = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{2}(\pm 1 \pm i)}{2};$$

l'équation proposée a donc cinq solutions.

Le 25 novembre 2014.

EXALG493 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Résoudre et discuter le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montfiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. Le déterminant du système vaut

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \\ &= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2. \end{aligned}$$

Pour $a = -2$, le système est impossible car la somme des trois équations donne

$$0x + 0y + 0z = 3.$$

Pour $a = 1$, le système est doublement indéterminé; l'ensemble des triplets (x, y, z) solutions du système est:

$$\{(\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Pour les autres valeurs de a , le système admet une solution unique:

$$x = y = z = \frac{1}{a+2}.$$

Le 25 novembre 2014.

EXALG494 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

a) Soient r_1, r_2 les 2 racines complexes du polynôme $x^2 + bx + 3$ ($b \in \mathbb{R}$).

Que vaut $r_1^2 + r_2^2$?

b) Déterminer $p, q \in \mathbb{R}$ pour que $x^3 + px + q$ soit divisible par $x^2 - 2x + 3$.

a) Si le trinôme admet deux racines complexes alors son discriminant est négatif :

$$b^2 - 12 < 0 \Rightarrow -2\sqrt{3} < b < 2\sqrt{3} \quad (1)$$

D'autre part, on a $r_1 r_2 = 3$ et $r_1 + r_2 = -b \Rightarrow r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 = b^2$ ou $r_1^2 + r_2^2 = b^2 - 6$.

Compte tenu de (1), on peut aussi écrire : $-6 < r_1^2 + r_2^2 = b^2 - 6 < 6$

b) Méthode 1 Soit $P(x) = x^3 + px + q$ et $D(x) = x^2 - 2x + 3$.

On fait la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3 & +px & +q & x^2 - 2x + 3 \\ \underline{x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{+3x} & x + 2 \\ 0 & +2x^2 & +(p-3)x & \\ & \underline{+2x^2} & \underline{-4x} & \underline{+6} \\ & & (p+1)x & q-6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p+1=0 \\ q-6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1 \\ q=6 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - x + 6$$

Méthode 2 Les racines de $D(x)$ sont $1 \pm i\sqrt{2}$

Calculons $P(1+i\sqrt{2}) = p + q - 5 - i\sqrt{2}(p+1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} p+q-5=0 \\ p+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-1 \\ q=6 \end{cases} \Rightarrow P(x) = x^3 - x + 6$$

Le 2 juin 2015.

EXALG495 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$(\ln(3x))^3 - 4(\ln(3x))^2 - \ln(3x) + 4 < 0$$

b) Si $|z|$ et \bar{z} désignent respectivement le module et le conjugué de $z \in \mathbb{C}$, résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$\sqrt{|4+3i|} x = \sqrt{3i+2-3i}$$

a) $I = \ln^3(3x) - 4\ln^2(3x) - \ln(3x) + 4 < 0$

CE: $x \in \mathbb{R}_0^+$

$$\Rightarrow \ln(3x)(\ln^2(3x) - 1) - 4(\ln^2(3x) - 1) < 0$$

$$\Rightarrow (\ln^2(3x) - 1)(\ln(3x) - 4) < 0$$

$$\Rightarrow (\ln(3x) - 1)(\ln(3x) + 1)(\ln(3x) - 4) < 0$$

Ce qui nous donne les racines :

$$\begin{cases} \ln(3x) = 4 \Rightarrow x = \frac{e^4}{3} \\ \ln(3x) = 1 \Rightarrow x = \frac{e}{3} \\ \ln(3x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3e} \end{cases}$$

Tableau de signes

	$\frac{1}{3e}$		$\frac{e}{3}$		$\frac{e^4}{3}$		
I	-	0	+	0	-	0	+

Conclusion : $x \in \left] 0, \frac{1}{3e} \right[\cup \left] \frac{e}{3}, \frac{e^4}{3} \right[$

b) $\sqrt{|4+3i|} x = \sqrt{3i+2-3i} \Rightarrow \sqrt{|4-3i|} x = \sqrt{6i+2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6i+2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \sqrt{6i+2}$

Le 2 juin 2015.

EXALG496 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ mx + 2y - z = 5 \\ 3x + (m-5)y + 7z = 7 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

Calculons les Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & -1 \\ 3 & m-5 & 7 \end{vmatrix} = 2(m-1)(m-6)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 7 & m-5 & 7 \end{vmatrix} = 14(m-6)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ m & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 14(6-m)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ m & 2 & 5 \\ 3 & m-5 & 7 \end{vmatrix} = 2(m-6)(2m-9)$$

1er cas : $m = 1$ Le système devient :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 3x - 4y + 7z = 7 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3=L_3-3L_2}]{\substack{L_1=L_1-3L_2 \\ L_3=L_3-3L_2}} \begin{cases} -5y + 5z = -11 \\ -10y + 10z = -8 \end{cases} \quad \text{Système impossible.}$$

2ème cas : $m = 6$ Le système devient :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ 6x + 2y - z = 5 \\ 3x + y + 7z = 7 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2=L_2-2L_3}]{\substack{L_1=L_1-L_3 \\ L_2=L_2-2L_3}} \begin{cases} -5z = -3 \\ -15z = -8 \end{cases} \quad \text{Système simplement indéterminé.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\lambda - 14}{15} \\ y = \lambda \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Dans les autres cas:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{m-1} \\ y = -\frac{7}{m-1} \\ z = \frac{2m-9}{m-1} \end{cases}$$

EXALG497 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

- a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $x^2 - bx + 1$ divise $x^4 - x + a$.
- b) Soient α, β, γ les 3 racines complexes du polynôme $3x^3 + 5x^2 + 4$
Que vaut $\alpha + \beta + \gamma$?
-

a) Méthode 1

On doit avoir :

$$x^4 - x + a = (x^2 - bx + 1)(x^2 + cx + a)$$

On développe et par identification, on obtient :

$$x^4 - x + a = x^4 + (-b+c)x^3 + (a-bc+1)x^2 + (-ab+c)x + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b+c=0 \\ a-bc+1=0 \\ -ab+c=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=c \\ a-b^2+1=0 & (1) \\ -ab+b=-1 & (2) \end{cases}$$

De (1), on tire une condition sur a : $b^2 = a + 1 \Rightarrow a \geq -1$.

De (2), on tire : $a = \frac{b+1}{b} \geq -1 \Rightarrow \frac{2b+1}{b} \geq 0 \Rightarrow b \in \left] \leftarrow, \frac{1}{2} \right] \cup]0, \rightarrow [$

De (1) et (2), on tire : $-b^3 + 2b + 1 = 0 \Rightarrow (b+1)(b^2 - b - 1) = 0$

$$\Rightarrow (b+1) \left(b - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(b - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 0$$

Les trois racines satisfont aux conditions et donc

$$\begin{cases} b = -1 \Rightarrow a = 0 \\ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b) Méthode 2

On effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^4 \\
 +x^4 \quad -bx^3 \quad +x^2 \\
 \hline
 0 \quad bx^3 \quad -x^2 \\
 \quad \quad \underline{bx^3} \quad \underline{-b^2x^2} \\
 \quad \quad \quad 0 \quad (b^2-1)x^2 \quad -x^2 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{(b^2-1)x^2} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad -(b+1)+b(b^2-1)x \quad a-b^2-1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 -x \quad +a \\
 \hline
 x^2 - bx + 1 \\
 \quad \quad x^2 \\
 \quad \quad \quad +bx \\
 \quad \quad \quad \quad + (b^2 - 1)
 \end{array}
 \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} -(b+1)+b(b^2-1)=0 \\ a-b^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b+1)(b^2-b-1)=0 \\ a-b^2-1=0 \end{cases}$$

On arrive aux mêmes équations que pour la méthode 1. Les conclusions sont identiques.

b) Le polynôme peut se mettre sous la forme : $3\left(x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}\right)$

Le coefficient du x^2 est l'opposé de la somme des racines $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = -\frac{5}{3}$

On peut aussi partir de $3x^3 + 5x^2 + 4 = 3(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

On développe et par identification on trouve le même résultat.

EXALG498 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $\|x-2|-x|=2x$

b) $e^{2x} + (1-e)e^x - e = 0$

a) $\|x-2|-x|=2x$

On a immédiatement comme condition que $x \in \mathbb{R}^+$

Si $0 \leq x < 2$, $|x-2| = -x+2$ et l'équation devient

$$\left| \underbrace{-x+2-x}_{=-2x+2>0} \right| = 2x \Rightarrow -2x+2 = 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Si $x = 2 \Rightarrow$ Equation impossible.

Si $x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$ et l'équation devient :

$$|x-2-x| = 2x \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1 \text{ à rejeter}$$

b) $e^{2x} + (1-e)e^x - e = 0$

C'est une équation du second degré en e^x

$$e^x = \frac{e-1 \pm \sqrt{(1-e)^2 + 4e}}{2} = \frac{e-1 \pm (1+e)}{2} = \begin{cases} e^x = e \Rightarrow x = 1 \\ e^x = -\frac{1}{2} \text{ impossible} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x = 1}$

Le 22 juin 2015

EXALG499 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3m \\ 2x + y - (2m+1)z = 4 \\ 4x + 5y - z = 3m - 2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 3m \\ 2x + y - (2m+1)z = 4 \\ 4x + 5y - z = 3m - 2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_3=L_3-4L_1 \\ L_2=L_2-2L_1}]{L_2=L_2-2L_1} \begin{cases} x + 2y + mz = 3m \\ -3y - (4m+1)z = 4 - 6m \\ -3y - (4m+1)z = -2 - 9m \end{cases}$$

Le système n'est possible que si : $4 - 6m = -2 - 9m \Rightarrow m = -2$

Dans ce cas, le système devient simplement indéterminé:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -6 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -6 + 2\lambda \\ 2x + y = 4 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{8\lambda - 14}{3} \\ y = \frac{7\lambda - 16}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Le 2 juin 2015.