Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 5

EXALG050 – EXALG059

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Juillet 08

EXALG050 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 1992.

$$\text{Simplifier : } \left(\log_a x\right)^2 - \log_a ax . \log_a \frac{x}{a}$$

$$\left(\log_a x\right)^2 - \log_a ax . \log_a \frac{x}{a} = \left(\log_a x\right)^2 - \left(\log_a a + \log_a x\right)\left(\log_a x - \log_a a\right)$$

$$= \left(\log_a x\right)^2 - \left(1 + \log_a x\right)\left(1 - \log_a a\right) = \left(\log_a x\right)^2 - \left(\log_a x\right)^2 + 1 = 1$$

EXALG051 – Espace Math 66.

Résoudre

$$2^{x+1}+2^{x+3}=2^{1-x}+2^{2-x}$$

$$\begin{aligned}
2^{x+1}+2^{x+3}&=2^{1-x}+2^{2-x}\\
2^{x+1}+2^{x+3}&=2^{1-x}+2^{2-x}\\
2.2^{x}+2^{3}.2^{x}&=2.2^{-x}+2^{2}.2^{-x}\\
2^{x}+2^{2}.2^{x}&=2^{-x}+2.2^{-x}\\
5.2^{x}&=3.2^{-x}\\
2^{2x}&=\frac{3}{5}\\
x&=\frac{1}{2}\frac{\ln\frac{3}{5}}{\ln 2}\\
x&=-0.3685
\end{aligned}$$

EXALG052 – Exemple.

Résoudre

$$\begin{cases} \log_3(3x+8y+27)=3 \\ \log_2\left(2x+5y+\dfrac{29}{8}\right)=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3(3x+8y+27)=3 \\ \log_2\left(2x+5y+\dfrac{29}{8}\right)=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_3(3x+8y+27)=\log_3 27 \\ \log_2\left(2x+5y+\dfrac{29}{8}\right)=\log_2 2^{-3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x+8y+27=27 \\ 2x+5y+\dfrac{29}{8}=\dfrac{1}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+8y=0 \\ 2x+5y=-\dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-28 \\ y=\dfrac{21}{2} \end{cases}$$

EXALG053 – Espace Math 66.

Résoudre :

$$\log_3 9^{\frac{3}{2}} \log_9 (2x-6)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\log_{27}(x-2) - \log_3 2$$

$$\log_3 9^{\frac{3}{2}} \log_9 (2x-6)^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{2}\log_{27}(x-2) - \log_3 2$$

CE : $x > 3$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{3}\underbrace{\log_3 3^2}_{=2}\underbrace{\log_9(2x-6)}_{=\frac{1}{2}\log_3(2x-6)} = \frac{9}{2}\underbrace{\log_{27}(x-2)}_{=\frac{1}{3}\log_3(x-2)} - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3(2x-6) = \frac{3}{2}\log_3(x-2) - \log_3 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x-6) + 2\log_3 2 = 3\log_3(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-6) = (x-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 4x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2 - 2x - 4\right) = 0 \qquad (\text{Par Horner})$$

Solutions : $\boxed{x = 4 \qquad \text{et} \qquad x = 1+\sqrt{5}}$ $\left(1-\sqrt{5} \text{ à rejeter}\right)$

EXALG054 – Polyetch, UMons, questions-types 2000-2001.

L'équation suivante :

$$\log_{x+2} 8a = 1 + \log_2 \frac{a+8}{x+2}$$

admet la racine x = 2. Calculer a, puis résoudre.

$CE:$ 1) $8a > 0 \quad \to \quad a > 0$

2) $\dfrac{a+8}{x+2} > 0$

2 est solution : $\to \quad \log_4 8a = 1 + \log_2 \dfrac{a+8}{4}$

$\to \quad \log_2 \sqrt{8a} - \log_2 \dfrac{a+8}{4} = 1 \quad \to \quad \log_2 \dfrac{4\sqrt{8a}}{a+8} = 1 \quad \to \quad \dfrac{4\sqrt{8a}}{a+8} = 2$

$4\sqrt{2a} = a + 8 \quad \to \quad a^2 - 16a + 64 = 0 \quad \to \quad \boxed{a = 8}$

Résolution:

$\log_{x+2} 64 = 1 + \log_2 \dfrac{16}{x+2} \quad \to \quad \dfrac{\log_2 64}{\log_2 (x+2)} = 1 + \log_2 \dfrac{16}{x+2}$

$\to \quad \dfrac{6}{\log_2 (x+2)} = 1 + 4 - \log_2 (x+2) \quad \to \quad 6 = 5\log_2 (x+2) - \log_2^2 (x+2)$

$\to \quad \log_2^2 (x+2) - 5\log_2 (x+2) + 6 = 0 \quad \to \quad \left(\log_2 (x+2) - 3\right)\left(\log_2 (x+2) - 2\right) = 0$

1) $\log_2 (x+2) - 3 = 0 \quad \to \quad x + 2 = 8 \quad \to \quad \boxed{x = 6}$

2) $\log_2 (x+2) - 2 = 0 \quad \to \quad x + 2 = 4 \quad \to \quad \boxed{x = 2}$

Les deux solutions vérifient les CE.

EXALG055 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre

$$\begin{cases} \log_x e + \log_y e = \dfrac{7}{3} \\ \log_e xy = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$CE: \ 1)\ x > 0$$
$$2)\ y > 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{1}{\ln y} = \dfrac{7}{3} \\ \ln xy = \dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln y + \ln x = \dfrac{7}{3} \ln x \ln y \\ \ln xy = \dfrac{7}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ln xy = \dfrac{7}{3} \ln x \ln y \\ \ln xy = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\ln x \ln y = \frac{3}{2} \rightarrow \ln x + \frac{3}{2\ln x} = \frac{7}{2} \rightarrow 2\ln^2 x - 7\ln x + 3 = 0$$

$$\rightarrow \ln x_1 = 3 \quad et \quad \ln x_2 = \frac{1}{2}$$

$$1)\ \ln x = 3 \rightarrow \boxed{x = e^3} \rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{y = \sqrt{e}}$$

$$2)\ \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \sqrt{e}} \rightarrow \ln y = 3 \rightarrow \boxed{y = e^3}$$

EXALG056 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation suivante en x :

$$\sqrt{e^{-x}-3}+\sqrt{e^{-x}}=a$$

et discuter le nombre de solutions selon la valeur du paramètre *a*.

CE : 1) $e^{-x}-3\geq 0 \rightarrow e^{-x}\geq 3 \rightarrow x\leq -\ln 3$

2) $a\geq 0$

Creusons un petit peu ces conditions d'existence :

Remarquons que le premier membre de l'équation définit une fonction en x qui est décroissante si x croît. Donc comme le maximum de x est $-\ln 3$.

En remplaçant x par cette valeur, on trouve : $a=\sqrt{3}$

En d'autres termes, on obtient une CE plus restrictive sur a : $a\geq\sqrt{3}$

Résolvons maintenant l'équation :

$$e^{-x}-3=\left(a-\sqrt{e^{-x}}\right)^2=a^2-2a\sqrt{e^{-x}}+e^{-x}$$

$$\rightarrow 2a\sqrt{e^{-x}}=a^2+3 \rightarrow \sqrt{e^{-x}}=\frac{a^2+3}{2a} \rightarrow e^{-x}=\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2$$

$$\rightarrow x=-2\ln\frac{a^2+3}{2a}$$

Reprenons la CE 1 : $\rightarrow \quad x=-2\ln\frac{a^2+3}{2a}\leq -\ln 3 \rightarrow \ln\frac{a^2+3}{2a}\geq \ln\sqrt{3}$

$\rightarrow a^2+3\geq 2\sqrt{3}\,a \rightarrow \left(a-\sqrt{3}\right)^2\geq 0 \rightarrow$ Ce qui est toujours vérifié.

On arrive à une condition moins restrictive sur a !!!!!!

Conclusion :

Si $a\geq\sqrt{3}$, une solution $x=-2\ln\frac{a^2+3}{2a}$

Si $a<\sqrt{3}$, pas de solution

EXALG057 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation :

$$\log_2(x+1)+\log_4 x<1$$

CE : 1) $x>0$

Donc :

$\log_2(x+1)+\log_2 x\log_4 2<1 \;\rightarrow\; \log_2(x+1)+\dfrac{1}{2}\log_2 x<1$

$\rightarrow\; \log_2 x^{\frac{1}{2}}(x+1)<1 \;\rightarrow\; \log_2 x^{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_2 2$

$\rightarrow\; x^{\frac{1}{2}}(x+1)<2 \;\rightarrow\; x(x+1)^2<4 \;\rightarrow\; x^3+2x^2+x-4<0$

$\rightarrow\; (x-1)(x^2+3x+4)<0$

Or le Δ de x^2+3x+4 est négatif, d'où la solution : $\boxed{0<x<1}$

EXALG058 – Polytech, Umons, Mons, 1992.

Calculer la n-ième puissance de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution proposée par Hugues Vermeiren

1. **Méthode de récurrence**

On calcule à la main les premières puissances de M, on devine ce qui se passe et on essaie une récurrence...
On trouve successivement :

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 21 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 36 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 55 & 10 & 1 \end{pmatrix} .$$

Les éléments a_{21} et a_{32} semblent être de la forme $2n$
Les éléments a_{31} semblent constituer la suite : $u_n = \{3, 10, 21, 36, 55, \ldots\}$ dont les différences successives sont $\Delta_n = \{7, 11, 15, 19 \ldots\} = \{3 + 4n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Les termes de u_n sont donc (sans doute!) les sommes partielles de la suite Δ_n, qui est arithmétique de raison 4, soit :

$$u_n = n \cdot \frac{\Delta_n + \Delta_{n-1}}{2} = n \cdot \frac{3 + [3 + 4(n-1)]}{2} = n(2n+1) .$$

Supposons donc que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 2n^2 + 5n + 3 & 2n+2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $2n^2 + 5n + 3 = (n+1)\,[2(n+1)+1]$, l'hypothèse de récurrence est vérifiée.

2. **Binôme de Newton et matrice nilpotente**

On décompose M en une somme de deux matrices 3×3 qui commutent et on applique le binôme de Newton.
(Si les matrices A et B ne commutent pas, on n'a même pas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.)

Si $M = A + B$, si A et B commmutent et si les puissances de A et de B s'expriment simplement, la méthode peut fonctionner.

Un bon choix pour B est la matrice identité I: elle commute avec toutes les autres.

$$M = A + I \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $I^n = I$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de l'exposant 3, toutes les puissances de A sont nulles!
Une matrice dont une des puissances est nulle est une matrice **nilpotente**.

Comme A et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton:

$$M^n = (A+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \cdot I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k$$

Les coefficients $\binom{n}{k}$ se notent aussi C_n^k.

Mais $A^k = 0$ pour $k \geqslant 3$, donc:

$$M^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^k = \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 = I + n \cdot A + \frac{n(n-1)}{2} \cdot A^2$$

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2n & 0 & 0 \\ 3n & 2n & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n(2n+1) & 2n & 0 \end{pmatrix}.$$

Note de Jacques COLLOT

Pour trouver l'expression de l'élément a_{31}, on peut utiliser la méthode de Newton des différences divisées. (Voir ci-après quelques exemples qui expliquent la méthode).

n	$P(n)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	3			
		7		
2	10		2	
		11		0
3	21		2	
		15		0
4	36		2	
		19		
5	55			

$$\Rightarrow P(n) = 3 + 7(x-1) + 2(x-1)(x-2) + 0(x-1)(x-2)(x-3) = x(2x+1)$$

Exemple 1

Trouver un polynôme $P(x)$ qui pour $x = 2,3,4,5$ prend les valeurs $3,2,-1,-6$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
2	3			
		$\dfrac{2-3}{3-2}=-1$		
3	2		$\dfrac{-1-(-3)}{4-2}=-1$	
		$\dfrac{-1-2}{4-3}=-3$		$\dfrac{-1-(-1)}{5-2}=0$
4	-1		$\dfrac{-5-(-3)}{5-3}=-1$	
		$\dfrac{-6-(-1)}{5-4}=-5$		
5	-6			

$$\Rightarrow P(x)=3-1(x-2)-1(x-2)(x-3)+0(x-2)(x-3)(x-4)=x^2+4x+1$$

Exemple 2

$x=\{0,1,2,3,4,5,\} \Rightarrow P(x)=\{1,3,6,12,23,41\}$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0	1				
		$\dfrac{3-1}{1-0}=2$			
1	3		$\dfrac{3-2}{2-0}=\dfrac{1}{2}$		
		$\dfrac{6-3}{2-1}=3$		$\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{3-0}=\dfrac{1}{3}$	
2	6		$\dfrac{6-3}{3-1}=\dfrac{3}{2}$		0
		$\dfrac{12-6}{3-2}=6$		$\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{4-1}=\dfrac{1}{3}$	
3	12		$\dfrac{11-6}{4-2}=\dfrac{5}{2}$		0
		$\dfrac{23-12}{4-3}=11$		$\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}{4-2}=\dfrac{1}{3}$	
4	23		$\dfrac{18-11}{5-3}=\dfrac{9}{2}$		
		$\dfrac{41-23}{5-4}=18$			
5	41				

$$\Rightarrow P(x)=1+2(x-0)+\frac{1}{2}(x-0)(x-1)+\frac{1}{3}(x-0)(x-1)(x-2)+0(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{6}x+1$$

Exemple 3

$x=\{-1,0,2,6,8\} \Rightarrow P(x)=\{0,-4,-6,-322,-828\}$

x	$P(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
-1	0				
		$\frac{-4-0}{0-(-1)}=-4$			
0	-4		$\frac{-1-(-4)}{2-(-1)}=1$		
		$\frac{-6-(-4)}{2-0}=-1$		$\frac{-13-1}{6-(-1)}=-2$	
2	-6		$\frac{-79-(-1)}{6-0}=-13$		0
		$\frac{-322-(-6)}{6-2}=-79$		$\frac{-29-(-13)}{8-0}=-2$	
6	-322		$\frac{-253-(-79)}{8-2}=-29$		
		$\frac{-828-(-322)}{8-6}=-253$			
8	-828				

$$P(x)=0-4(x-(-1))+1(x-(-1))(x-0)-2(x-(-1))(x-0)(x-2)+0(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-6)$$
$$=-2x^3+3x^2+x-4$$

Modifié le 1 août 2005. (Steve Tumson). Modifié le 3 novembre 05 (Severy). Modifié le 22 février 2016 (Hugues Vermeiren)

EXALG059 – EPB, ULB, Bruxelles

Déterminer A de telle façon que

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

En vertu de la règle de multiplication des matrices, on détermine que A est composé de 3 lignes et de 2 colonnes . $\left([m.n].[n.p]=[m.p]\right)$

<u>Méthode 1</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$, en effectuant la multiplication et après identification,

on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 = 3 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 8 \\ -2a_1 + a_2 + 2a_3 = 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -b_1 + 2b_2 = 4 \\ b_1 + 2b_2 + b_3 = 5 \\ -2b_1 + b_2 + 2b_3 = 6 \end{cases}$$

dont la résolution donne la solution : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Méthode 2</u>

On a : $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} . A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Il suffit donc de calculer l'inverse de la matrice carrée.

Après calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne finalement :

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Modifié le 27 octobre 2017