Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 50

EXALG500 – EXALG509

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Juillet 2015

EXALG500 – EPL, UCL, LLN, série 1, juillet 2015.

Soit p un paramètre réel. Discuter et résoudre dans les nombres complexes, l'équation :

$$(z-i)^4 + p\left(z^2+1\right)^2 = 0$$

Donner les solutions sous la forme $a+bi$.

Solution proposée par Nicole Berckmans :

Rappelons que $z^2+i=(z-i)(z+i)$. Dès lors l'équation s'écrit :

$$(z-i)^2\left[(z-i)^2+p(z+i)^2\right]=0$$

$\boxed{z=i}$ est une première solution. Ensuite il reste à résoudre :

$$(z-i)^2+p(z+i)^2 \quad \text{ou encore} \quad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2=-p$$

Remarquons que $z=-i$ n'est pas solution.

Trois cas peuvent se présenter pour le réel p.

1er cas : $p=0$ $\quad \Rightarrow S=\{i\}$

2ème cas : $p<0 \Rightarrow \dfrac{z-i}{z+i}=\pm\sqrt{-p} \Rightarrow z-i=\pm\sqrt{-p}\,(z+i) \Rightarrow z\left(1\mp\sqrt{-p}\right)=i\left(1\pm\sqrt{-p}\right)$

Si $p=-1 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \boxed{S=\{0\}}$

Si $p\neq-1 \Rightarrow \boxed{S=\left\{i, \dfrac{1+\sqrt{-p}}{1-\sqrt{-p}}i, \dfrac{1-\sqrt{-p}}{1+\sqrt{-p}}i\right\}}$

3ème cas : $p>0 \Rightarrow \dfrac{z-i}{z+i}=\pm\sqrt{p}i \Rightarrow z-i=\pm\sqrt{p}i(z+i)=\pm\sqrt{p}\,(iz-1)$

$$\Rightarrow z\left(1\mp\sqrt{p}i\right)=\mp\sqrt{p}+i$$

$$\Rightarrow z=\frac{\mp\sqrt{p}+i}{1\mp\sqrt{p}i}\cdot\frac{1\pm\sqrt{p}i}{1\pm\sqrt{p}i}=\frac{\mp\sqrt{p}\mp\sqrt{p}-pi+i}{1+p}=\frac{\pm2\sqrt{p}}{1+p}+\frac{(1-p)i}{1+p}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\left\{i, \frac{2\sqrt{p}}{1+p}+\frac{(1-p)i}{1+p}, \frac{-2\sqrt{p}}{1+p}+\frac{(1-p)i}{1+p}\right\}}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Si $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$, l'équation devient $(z-i)^4 = 0$ avec comme solutions $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = i$.

Si $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$, l'équation se transforme comme suit :

$$\begin{aligned}(z-i)^4 + p(z^2+1)^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z-i)^4 + p(z-i)^2(z+i)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (z-i)^2\left((z-i)^2 + p(z+i)^2\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (z-i)^2\left((1+p)z^2 - 2(1-p)iz - (1+p)\right) = 0\end{aligned}$$

On a donc toujours les racines $z_1 = z_2 = i$, tandis que z_3 et z_4 sont les solutions de l'équation :

$(1+p)z^2 - 2(1-p)iz - (1+p) = 0$

Le discriminant est égal à :

$\Delta = -4(1-p)^2 + 4(1+p)^2 = 16p$

Si $\boldsymbol{p} > 0$, alors $\sqrt{\Delta} = 4p$ et

$$z_{3,4} = \frac{1}{2(1+p)}\left(2(1-p)i \pm 4\sqrt{p}\right) = \frac{\pm 2\sqrt{p} + (1-p)i}{1+p}$$

Si $\boldsymbol{p} < 0$, alors $\sqrt{\Delta} = 4i\sqrt{-p}$ et

$$z_{3,4} = \frac{1}{2(1+p)}\left(2(1-p)i \pm 4i\sqrt{-p}\right) = \frac{1-p \pm 2\sqrt{-p}}{1+p}i$$

Résumé final

$p > 0 \qquad S = \left\{i\,;i\,;\,\frac{2\sqrt{p}}{1+p} + \frac{1-p}{1+p}i\,;\,\frac{-2\sqrt{p}}{1+p} + \frac{1-p}{1+p}i\right\}$

$p = 0 \qquad S = \{i\,;i\,;i\,;i\}$

$p < 0 \qquad S = \left\{i\,;i\,;\,\frac{1-p+2\sqrt{-p}}{1+p}i\,;\,\frac{1-p-2\sqrt{-p}}{1+p}i\right\}$

Le 10 septembre 2015. Modifié le 12 mai 2016 (Jan Frans Broeckx). Modifié le 3 aout 2017 (Maïté Swaelens)

EXALG501 – EPL, UCL, LLN, série 1,juillet 2015.

Soit l'équation :

$$3x^3 - 12x^2 + 4x + a = 0$$

Déterminer a et les racines de l'équation, sachant que ces racines sont trois nombres en progession arithmétique.

Solution proposée par Nicole Berckmans :

Posons $l-r, l, l+r$ les 3 nombres racines de cette équation.

$$3(x-l+r)(x-l)(x-l-r) = 3x^3 - 12x^2 + 4x + a$$

Méthode des coefficients indéterminés.

Coef de x^3 : $3=3$

Coef de x^2 : $-3(l-r+l+l-r) = -12 \Rightarrow \boxed{l = \frac{4}{3}}$

Coef de x : $3\left(l(l-r)+l(l+r)+l^2-r^2\right) = 4 \Rightarrow 9l^2 - 3r^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r=2}$

Coef de x^0 : $3l\left(r^2-l^2\right) = a \Rightarrow \boxed{a = \frac{80}{9}}$

<u>Réponse</u> : $a = \frac{80}{9}$

Les 3 racines sont : $-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}$

Le 10 septembre 2015.

EXALG502 – EPL, UCL, LLN, série 1, juillet 2015.

Résoudre l'équation en x :

$$\log_3\left(3^x+1\right)=-x-2+\log_3 4$$

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\log_3\left(3^x+1\right)=-x-2+\log_3 4 \Rightarrow \log_3\left(3^x+1\right)=\log_3\frac{4}{3^x.9}$$

Posons : $y=3^x$

L'equation devient :

$$y+1=\frac{4}{9y}\Rightarrow 9y^2+9y-4=0\Rightarrow\begin{cases} y=-\dfrac{4}{3} \text{ à exclure} \\ y=\dfrac{1}{3}=3^{-1}\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=-1}$

Le 10 septembre 2015.

EXALG503 – EPL, UCL, LLN, série 1, juillet 2015.

Rosaria comtemple l'huile qu'elle a obtenu en pressant les olives de la récolte de 2014. Avec cette huile, elle pourrait remplir exactement 35 bouteilles et 24 bidons, mais comme elle n'a que 25 bouteilles et 20 bidons, il va lui rester deux seaux pleins. "Mauvaise année" pense-t-elle, "l'an passé j'ai eu le double d'huile, et j'ai pu remplir exactement 100 bouteilles et 30 bidons après avoir donné 3 seaux pleins d'huile à mon voisin".
Déterminer combien de bouteilles on peut remplir avec le contenu d'un seau.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$X =$ litre d'huile obtenu après la récolte de 2014

$bo =$ litre d'huile dans une bouteille

$bi =$ litre d'huile dans un bidon

$s =$ litre d'huile dans un seau

On donne : $X = 35bo + 24bi = 25bo + 20bi + 25$

$$2X = 100bo + 30bi + 3s$$

On demande : $1s = x.bo \qquad x\,?$

$$2X = 100bo + 30bi + 3s \underset{(ii)}{=} 70bo + 48bi \underset{(i)}{=} 50bo + 40bi + 4s$$

$$(i) \Rightarrow 8bi = -20bo + 4s \Rightarrow 2bi = -5bo + s$$

$$(ii) \Rightarrow 30bo + 3s = 18bi$$

$$= -45bo + 95$$

$$75bo = 6s$$

Donc $6s = 72bo + 3bo \Rightarrow 1s = 12bo + \dfrac{1}{2}bo$

Avec 1 seau d'huile, on remplit 12 bouteilles et une demi-bouteille.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Mise en équations

Appelons : T = quantité d'huile obtenue en 2014

x = contenu d'une bouteille

y = contenu d'un bidon

z = contenu d'un seau

Les données se traduisent comme suit :

$$\begin{cases} 35x + 24y & = & \mathrm{T} & \quad (\mathrm{E1}) \\ 25x + 20y + 2z & = & \mathrm{T} & \quad (\mathrm{E2}) \\ 100x + 30y + 3z & = & 2\mathrm{T} & \quad (\mathrm{E3}) \end{cases}$$

Résolution

Il faut éliminer les variables T et y parmi ces 3 équations afin de trouver une relation entre x et z.

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E1} - \mathrm{E2} & \Rightarrow \\ \mathrm{E3} - 2.\mathrm{E2} & \Rightarrow \end{array} \begin{cases} 10x + 4y - 2z & = & 0 \\ 50x - 10y - z & = & 0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad 150x - 12z = 0$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{150}{12}x = 12{,}5x$$

Réponse

Avec le contenu d'un sceau d'huile on peut remplir 12,5 bouteilles.

Le 10 septembre 2015. Modifié le 12 mai 2016 (Jan Frans Broeckx)

EXALG504 – EPL, UCL, LLN, série 2, juillet 2015.

Déterminez à quelle condition sur les nombres réels x, y le nombre complexe $z = x + yi$ est tel que $\dfrac{z+2}{z-2i}$ est un nombre imaginaire pur (ou nul)

Solution proposée par Martine Devillers :

$$\frac{z+2}{z-2i} = \frac{(x+2)+iy}{x+i(y-2)} = \frac{(x+2+iy)(x-i(y-2))}{x^2+(y-2)^2}$$

Partie réelle : $(x+2)x + y(y-2) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

Conclusion : Cercle de centre $(-1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, excepté le point $(0,2)$

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\frac{z+2}{z+2i} = bi \Rightarrow z+2 = bzi + 2b \Rightarrow (1-bi) = 2(b-1) \Rightarrow z = \frac{2(b-1)}{1-bi}$$

$$z = \frac{2(b-1)(1+bi)}{1+b^2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2(b-1)}{1+b^2} & (i) \\ y = \dfrac{2(b-1)b}{1+b^2} & (ii) \end{cases}$$

Eliminons $b = \dfrac{y}{x}$ $\quad (x \neq 0)$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)x = 2\left(\frac{y}{x}-1\right) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad (iii)$$

Conclusion : Cercle de centre $(-1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$, excepté le point $(0,2)$

En effet, si $x=0$ dans (i), alors $y=0$ dans (ii).

Par contre si $x=0$ dans (iii) alors $y^2-2y=0$ et donc $y=0$ ou $y=2$.

Dès lors $x=0$ et $y=2$ est un point à exclure du lieu.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

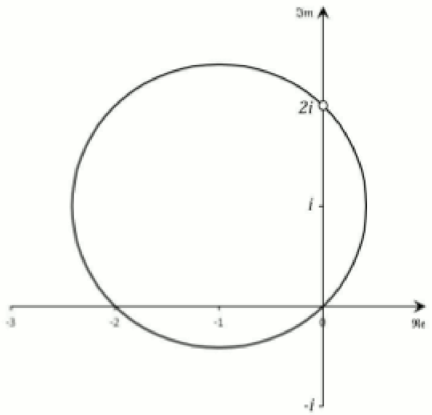
CE : $z \neq 2i$

Sous cette condition, on peut transformer l'expression, qu'on appellera r, comme suit :

$$\begin{aligned} r &= \frac{z+2}{z-2i} = \frac{x+iy+2}{x+iy-2i} \\ &= \frac{(x+2)+iy}{x+(y-2)i} \cdot \frac{x-(y-2)i}{x-(y-2)i} \\ &= \frac{x(x+2)+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + i \cdot \frac{xy-(x+2)(y-2)}{x^2+(y-2)^2} \end{aligned}$$

L'expression r est imaginaire pur si :

$$\begin{aligned} & x(x+2)+y(y-2)=0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+2x+y^2-2y=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)=2 \\ \Leftrightarrow\ & \boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2=2} \end{aligned}$$



Cette dernière équation représente un cercle dans le plan de Gauss, de centre $z_C = i - 1$ et de rayon 2, dont on doit enlever le point $z = 2i$ par la condition d'existence.

Remarque :

Il n'y a aucune raison d'exclure le point $z = 0$. En effet, lorsque $x = y = 0$, l'expression r est égale à

$$r = \frac{2}{-2i} = -\frac{1}{i} = i$$

ce qui est bien un nombre imaginaire pur.

Le 10 septembre 2015. Modifié le 9 juin 2016 (Jan Frans Broeckx)

EXALG505 – EPL, UCL, LLN, série 2, juillet 2015.

Trouvez les nombres réels $x > 0$ pour lesquelles l'équation suivante est satisfaite :

$$2^{3x}\left(8^x+4\right)^2=8\left(8^{2x}+1\right)+\left(32\right)^{3x}$$

Solution proposée par Martine Devillers :

Remarque : $2^{3x}=8^x$ et $\left(32\right)^{3x}=\left(8\times 4\right)^{3x}=8^{3x}.4^{3x}=8^{3x}.8^{2x}=8^{5x}$

L'équation peut s'écrire :

$$8^x\left(8^{2x}+8\times 8^x+16\right)=8.8^{2x}+8+8^{5x}$$

$$8^{5x}-8^{3x}-16\times 8^x+8=0$$

Posons $y=8^x$. Puisque $x>0$, on a $y>8^0=1$

$$y^5-y^3-16y+8=0$$

Division par Horner suivant $\left(y-2\right)$

$$\left(y-2\right)\left(y^4+2y^3+3y^2+6y-4\right)=0$$

Puisque $y>1$, on a : $y^4+2y^3+3y^2+6y-4>1+2+3+6-4=8.$

Conclusion : $y=2$ càd $8^x=2\Rightarrow 2^{3x}=2^1\Rightarrow \boxed{x=\dfrac{1}{3}}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

$$2^{3x}(8^x+4)^2=8(8^{2x}+1)+32^{3x}$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{3x}(2^{3x}+4)^2-8(8^{2x}+1)-2^{15x}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{9x}\underline{+8.2^{6x}}+16.2^{3x}\underline{-8.2^{6x}}-8-2^{15x}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{15x}-2^{9x}-16.2^{3x}+8=0$$

Posons dans cette équation $t=2^{3x}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{3}\log_2 t$ avec $t>1$ puisque $x>0$; l'équation et t est alors :

$$t^5-t^3\pm 16t+8=0$$

Ce polynôme du 5e degré n'est ni divisible par $(t+1)$ ni par $(t-1)$. Si nous essayons, à tout hasard, la divisibilité par $(t-a)$, avec a un diviseur entier du terme indépendant 8, alors nous remarquons qu'il est divisible par $(t-2)$. La règle de Horner donne alors :

$$(t-2)(t^4+2t^3+3t^2+6t-4)=0$$

Pour $t>1$, le polynôme du 4e degré est supérieur à $1+2+3+6-4=8$, et ne possède donc pas de racines. La seule racine, supérieure à 1, de l'équation en t est donc $t=2$, et la seule solution du problème est :

$$x=\frac{1}{3}\log_2 2=\frac{1}{3}$$

Le 10 septembre 2015. Modifié le 9 juin 2016 (Jan Frans Broeckx). Modifié le 4 septembre 2016 (Frédéric Blondeel)

EXALG506 – EPL, UCL, LLN, série 2, juillet 2015.

Déterminez pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel a le système suivant n'admet pas de solution :

$$\begin{cases} ax+z=1 & (1) \\ 2x+ay=2 & (2) \\ 3x+y+z=3 & (3) \end{cases}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans :

Cette solution n'utilise pas la notion de déterminant.

De (1), on déduit : $z=1-ax \qquad (1')$

Par substitution dans (3), on obtient :

$$(3-a)x+y=2 \qquad (3')$$

$$\Rightarrow \qquad y=2+(a-3)x$$

Par substitution dans (2), on a :

$$2x+2a+a(a-3)x=2 \qquad (2')$$

$$\left(a^2-3a+2\right)x=2-2a$$

$$(a-1)(a-2)x=2(1-a) \qquad (2'')$$

Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, on trouve une valeur pour x, ensuite pour y et enfin pour z.

Si $a=2$, alors l'équation $(2'')$ est impossible.

Si $a=1$, alors l'équation $(2'')$ est indéterminé et le système admet une infinité de solution.

Conclusion : le systèmes est impossible pour $\boxed{a=2}$

Solution proposée par Martine Devillers :

Cette méthode utilise la notion de déterminant :

Le déterminant du système est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ... = (a-1)(a-2)$$

Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$ alors le système a une solution.

Si $a = 1$ alors le système devient

$$\begin{cases} x + z = 1 & (1) \\ 2x + y = 2 & (2) \\ 3x + y + z = 3 & (3) \end{cases}$$

Ce système est indéterminé car $(3) = (1) + (2)$

Si $a = 2$ alors le système devient

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 - 2x \\ y = 1 - x \\ 3x + (1-x) + (1-2x) = 3 \Rightarrow 2 = 3 \quad \text{Impossible} \end{cases}$$

Conclusion : le système n'a pas de solution pour $\boxed{a = 2}$

Le 10 septembre 2015. Modifié le 9 juin 2016 (Jan Frans Broeckx)

EXALG507 – EPL, UCL, LLN, série 2, juillet 2015.

Le magazine EPL news est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1800 nouveaux abonnés chaque année, et que d'une année à l'autre 15% des abonnés ne se réabonnent pas. En 2014, il y avait 8000 abonnés. En quel année le magazine dépassera-t-il (d'après le modèle) la barre des 11000 abonnés?
(Expliquez soigneusement votre raisonnement)

Solution proposée par Martine Devillers :

A l'aide d'une calculette :

$f(0) =$ nb d'abonnements en 2014 $= 8000$

$f(1) =$ nb d'abonnements en 2014+1 $= 0.85 f(0) + 1800$

$f(2) =$ nb d'abonnements en 201421 $= 0.85 f(1) + 1800$

etc $\Rightarrow$ $f(9) = 11073.53$ Réponse : $\boxed{2023}$

Par l'algèbre

$$f(0) = 8000$$

$$f(1) = 0.85 f(0) + 1800 = 0.85 \times 8000 + 1800$$

$$f(2) = (0.85)^2 \times 8000 + (0.85) \times 1800 + 1800$$

$$f(n) = 0.85 f(n-1) = (0.85)^n + \left[(0.85)^{n-1} + \ldots + 0.85 + 1\right] \times 1800$$

Posons $a = 0.85.$

On a : $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ (Somme d'une progression géométrique)

$$\Rightarrow f(n) = 8000.a^n + 1800.\frac{1-a^n}{1-a} > 11000$$

$$\Rightarrow \quad 80(1-a)a^n + 18(1-a^n) > 110(1-a)$$

$$\Rightarrow \quad a^n\left[80(1-a) - 18\right] > 110(1-a) - 18$$

$$\Rightarrow \quad a^n[-6] > -1.5 \qquad \text{car } a = 0.85$$

$$\Rightarrow \quad a^n < \frac{1.5}{6} = 0.25$$

Puisque nous cherchons $n,$ prenons le logarithme (décimal) des deux membres.

$$n \log 085 < \log 0.25 \Rightarrow n > \frac{\log 0.25}{\log 0.85} = 8.53 \Rightarrow n = 9$$

Conclusion : la barre des 11000 abonnées sera franchie en 2023

Le 10 septembre 2015.

EXALG508 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015.

Déterminer pour quelles valeurs réelles de x, on a

$$\sqrt{\log_2\left(x^2\right)} < \log_2(8x) - 7$$

Expliquez soigneusement votre raisonnement

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$\sqrt{\log_2\left(x^2\right)} < \log_2(8x) - 7 \Rightarrow \sqrt{2\log_2 x} < \log_2 8 + \log_2 x - 7 \qquad (1 \le x)$

Poser : $y = \log_2 x$

$\sqrt{2y} < 3 + y - 7 = y - 4 \qquad (4 < y)$

$2y < (y-4)^2 \Rightarrow 0 < y^2 - 10y + 16$ racines 2 et 8

$\Rightarrow \log_2 2^8 = 8 < y = \log_2 x \Rightarrow \boxed{2^8 < x}$

Remarque : $\log_2$ est une fonction croissante.

Le 10 septembre 2015. Modifié le 19 novembre 2015 (Emilie Jacqmin)

EXALG509 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015.

Déterminez les nombres complexes z tels que

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$$

où i est l'unité imaginaire. Expliquer soigneusement votre raisonnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$z^6 - 2iz^3 - 1 = 0 \Rightarrow \left(z^3 + i\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow z^3 = -i$$

$$\Rightarrow z^3 = \text{cis}\left(-90°\right)$$

$$\Rightarrow z_k = \text{cis}\frac{-90° + k360°}{3}$$

Conclusion :

$$z_0 = \text{cis}\left(-30°\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_1 = \text{cis}\left(90°\right)$$

$$z_2 = \text{cis}\left(210°\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

Le 10 septembre 2015. Modifié le 19 novembre 2015 (Emilie Jacqmin)