Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 51

EXALG510 – EXALG519

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2015

EXALG510 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015.

Trouvez toutes les paires (x_1, x_2) de nombres réels satisfaisant la condition suivante : il existe des nombres réels non nuls a, b, c tels que x_1 et x_2 soient deux racines de $ax^2 + bx + c$ et que $-x_1$ et $-x_2$ soient deux raines de $bx^2 + cx + a$.
(On admet l'éventualité que $x_1 = x_2$.) Expliquez soigneusement votre raisonnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans :

On a : $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{a}{b}$ donc $a^2 = cb$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $-(x_1 + x_2) = -\frac{c}{b}$ donc $b^2 = -ac$ ou $c = -\frac{b^2}{a}$

Donc : $a^2 = -\frac{b^3}{a}$ càd $a = -b \Rightarrow b^2 = cb$ or $b \neq 0 \Rightarrow b = c$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ se transforme en

$-bx^2 + bx + b = 0$ avec $b \neq 0$

$x^2 - x - 1 = 0$

Conclusion : x_1 et x_2 sont les nombres d'or $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Le 10 septembre 2015.

EXALG511 – EPL, UCL, LLN, septembre 2015.

Jean-Pierre, Piotr et Laurent jouent à un jeu avec des jetons de casino rouges (valeur 5$) et bleus (valeurs 10$). D'après la règle, après chaque partie le perdant verse à chacun des deux autres un montant égal à leur mise. S'il n'a pas assez de jetons pour le faire, il est éliminé et le montant de sa mise est réparti également entre les deux autres.
Les trois compères disposent d'un paquet de jetons pour un total de 120$.
Avant de commencer à jouer, Piotr dispose de la plus grosse somme, et Jean-Pierre de la plus petite. A chaque partie chacun mise tous ses jetons.
Au bout de trois parties, chacun des joueurs en a perdu une, mais aucun n'a été éliminé, et ils se retrouvent avec la même valeur en main. Quelle était la mise de chacun au départ?
A partir de là, déterminez la quantité minimale de jetons rouges dans le paquet.
Expliquez soigneusement votre raisonnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans :

Piotr : x jetons
Laurent : y jetons $\quad z \le y \le x$
Jean-Pierre : z jetons

Piotr perd : $\begin{cases} \text{P} \to x-y-z \\ \text{L} \to 2y \\ \text{JP} \to 2z \end{cases}$

Laurent perd : $\begin{cases} \text{P} \to 2x-2y-2z \\ \text{L} \to 3y-x-z \\ \text{JP} \to 4z \end{cases}$

Jean-Pierre perd: $\begin{cases} \text{P} \to 4x-4y-4z=40 \\ \text{L} \to -2x+6y-2z=40 \\ \text{JP} \to -x-y+7z=40 \end{cases}$

Système de 3 équations à 3 inconnues dont la solution est

$$\begin{cases} x = 65\ \$ \\ y = 35\ \$ \\ z = 20\ \$ \end{cases}$$

Conclusion : il y a au moins 2 jetons rouges à 5$

Le 10 septembre 2015.

EXALG512 – Polytech, Umons, Mons, Groupe D, Juillet 2015.

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{(x-a)x^5}}{x^2} \leq \sqrt{2}$$

avec a un paramètre réel.

$$\frac{\sqrt{(x-a)x^5}}{x^2} \leq \sqrt{2}$$

CE : $(x-a)x \geq 0$ et $x \neq 0$

1er cas : $a = 0$

L'équation devient : $\dfrac{x^2\sqrt{x}}{x^2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2}$ avec $x > 0 \Rightarrow x \in \left]0,2\right]$

2ème cas : $a > 0$

Les CE sont alors $x \in \leftarrow,0\left[\cup\right[a,\rightarrow$

L'équation devient : $\sqrt{(x-a)x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow (x-a)x \leq 2$ $\left(\text{Les 2 membres sont positifs}\right)$

Les racines sont : $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$

La solution est alors : $x \in \left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+8}}{2},0\right[\cup \left[a,\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right]$

3ème cas : $a < 0$

Les CE sont alors $x \in \leftarrow,a\left[\cup\right[0,\rightarrow$

L'équation devient : $\sqrt{(x-a)x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow (x-a)x \leq 2$ $\left(\text{Les 2 membres sont positifs}\right)$

Les racines sont : $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+8}}{2}$

La solution est alors : $x \in \left[\dfrac{a-\sqrt{a^2+8}}{2},a\right] \cup \left]0,\dfrac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right]$

Le 10 septembre 2015.

EXALG513 – Polytech, Umons, Mons, Groupe E, Juillet 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter en fonction du paramètre réel m le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ \sqrt{xy}=m-x-y \end{cases}$$

Solution proposée par Martin Scohier:

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 & (1) \\ \sqrt{xy}=m-x-y & (2) \end{cases}$$

CE: $x \geq 0;\ y \geq 0;\ m \geq x+y;\ 0<m \leq 1$

En effet, si $m=0$, la seule solution possible pour l'équation (2) est $x=y=0$, ce qui est impossible pour l'équation (1).

D'autre part, l'équation (2) peut s'écrire : $m=2\sqrt{xy}+\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2-\sqrt{xy}$

$\Rightarrow m=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\sqrt{xy}=1-\sqrt{xy}\leq 1$

On change de variable : $a=\sqrt{x}$ et $b=\sqrt{y}$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=m-a^2-b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1-b \\ (1-b)b=m-(1-b)^2-b^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow b^2-b-(m-1)=0 \end{cases}$$

On a alors : $\Delta=4m-3$

Si $m=\dfrac{3}{4}\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$ et $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \boxed{x=y=\dfrac{1}{4}}$

Si $4m-3>0\Rightarrow m>\dfrac{3}{4}$

$$b=\frac{1+\sqrt{4m-3}}{2} \quad \text{et} \quad a=\frac{1-\sqrt{4m-3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=m-\frac{1+\sqrt{4m-3}}{2},\ y=m-\frac{1-\sqrt{4m-3}}{2}} \text{ avec } 0<m\leq 1$$

ou bien $b=\dfrac{1-\sqrt{4m-3}}{2}$ et $a=\dfrac{1+\sqrt{4m-3}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{x=m-\frac{1-\sqrt{4m-3}}{2},\ y=m-\frac{1+\sqrt{4m-3}}{2}} \text{ avec } 0<m\leq 1$$

Le 10 septembre 2015.

EXALG514 – Pol, ERM, Bruxelles, 2008.

Déterminer les nombres réels a et b de telle manière que les polynômes

$$P(x) = x^3 + ax^2 - 14x + 12 \text{ et } Q(x) = x^3 + bx^2 + 10x - 24$$

soient tous les deux divisibles par le même polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est égal à 1.

Solution proposée par Hugues Vermeiren :

Soit $D(x) = x^2 + px + q$ le polynôme divisant $P(x)$ et $Q(x)$.
$P(x)$ et $Q(x)$ doivent alors se factoriser de la manière suivante:

$$\begin{cases} P(x) = x^3 + a\,x^2 - 14\,x + 12 = (x+k)\cdot(x^2 + p\,x + q) \\ Q(x) = x^3 + b\,x^2 + 10\,x - 24 = (x+l)\cdot(x^2 + p\,x + q) \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} x^3 + a\,x^2 - 14\,x + 12 = x^3 + (p+k)x^2 + (q + k\,p)x + q\,k \\ x^3 + b\,x^2 + 10\,x - 24 = x^3 + (p+l)x^2 + (q + l\,p)x + q\,l \end{cases}$$

où k, l, q sont non nuls puisque $P(0) \neq 0$ et $Q(0) \neq 0$.

Par identification des coefficients des termes de même degré on obtient 2×3 équations

$$\begin{cases} p + k = a & L_1 \\ q + k\,p = -14 & L_2 \\ q\,k = 12 & L_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} p + l = b & L_4 \\ q + l\,p = 10 & L_5 \\ q\,l = -24 & L_6 \end{cases}$$

- L_3/L_6 donne :

$$\frac{q\,k}{q\,l} = \frac{12}{-24} \quad \text{ou} \quad \boxed{l = -2k}\ (E_1)$$

- $L_5 - L_2$ fournit:

$$\begin{aligned} l\,p - k\,p &= 24 \\ p\cdot(l-k) &= 24 \\ p\cdot(-2k-k) &= 24 \\ p\cdot(-3k) &= 24 \qquad \Longleftrightarrow \boxed{p = \frac{-8}{k}}\ (E_2) \end{aligned}$$

- De L_6, on tire:

$$q = \frac{-24}{l} = \frac{-24}{-2k} \quad \text{ou} \quad \boxed{q = \frac{12}{k}}\ (E_3)$$

- En substituant (E_2) et (E_3) dans L_2 :

$$\frac{12}{k} + k \cdot \left(\frac{-8}{k}\right) = -14 \iff \boxed{k = -2}$$

- De là: $\boxed{l = 4}$, $\boxed{q = -6}$ et $\boxed{p = 4}$.
- Finalement, L_1 et L_2 fournissent les valeurs de a et de b:

$$a = p + k = 4 - 2 \Longrightarrow \boxed{a = 2}$$
$$b = p + l = 4 + 4 \Longrightarrow \boxed{b = 8}$$

Conclusion: Le polynôme du second degré divisant $P(x)$ et $Q(x)$ est

$$D(x) = x^2 + 4x - 6 \quad \text{dont les racines sont} \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{10}$$

De plus,

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 14x + 12 = (x - 2) \cdot (x^2 + 4x - 6)$$
$$Q(x) = x^3 + 8x^3 + 10x - 24 = (x + 4) \cdot (x^2 + 4x - 6)$$

Accessoirement, on a obtenu les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$.

Le 6 octobre 2015.

EXALG515 – POL, ERM, Bruxelles, 2005.

On donne les matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

On demande

1. de démontrer qu'il existe des nombres réels a et b pour lesquels on a

$$\left(A+aI_3\right).B=b.C^{-1}$$

2. De déterminer A^{-1}

Solution proposée par Hugues Vermeiren :

1. La matrice C est inversible car son déterminant vaut $\det C = 4\times 4\times 1 = 16$.
L'égalité $(A + a\,I_3)\cdot B = b\cdot C^{-1}$ est donc équivalente à $(A+a\,I_3)\cdot B\cdot C = b\cdot I_3$. (Ceci permet d'éviter le calcul de C^{-1})
On doit donc avoir, le second facteur du premier membre étant le produit $B\cdot C$:

$$\begin{pmatrix}2+a & 2 & 2\\ 0 & 4+a & 0\\ 3 & -3 & 1+a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix}10+2a & 6+2a & 6+2a\\ 0 & 16+4a & 0\\ 9+3a & -9-3a & 7+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}\qquad (E_1)$$

Si les m_{ij} désignent les coefficients de la matrice du membre de gauche:
- $m_{12} = 6+2a = 0 \iff a=-3$,
- $m_{11} = 10+2a = b \iff 10+2(-3) = b \iff b = 4$.

On vérifie alors sans peine que ces valeurs de a et de b sont compatibles avec l'égalité matricielle E_1 .

2. Calcul de la matrice inverse de A.
   - **Méthode A**: Cofacteurs
   La matrice inverse (si elle existe!) est la transposée de la matrice des cofacteurs divisée par le déterminant de la matrice à inverser.
   Ici on a : $\det A = 8-24=-16$, A est donc inversible.
   La matrice A_c des cofacteurs (mineurs affectés du signe $(i+j)^{-1}$) est :

$$A_C=\begin{pmatrix}4 & 0 & -12\\ -8 & -4 & 12\\ -8 & 0 & 8\end{pmatrix}\quad\overset{Transposée}{\longrightarrow}\quad A_C^t=\begin{pmatrix}4 & -8 & -8\\ 0 & -4 & 0\\ -12 & 12 & 8\end{pmatrix}$$

En divisant cette matrice par $\det A=-16$ on obtient:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac14 & \frac12 & \frac12\\ 0 & \frac14 & 0\\ \frac34 & -\frac34 & -\frac12\end{pmatrix}$$

- **Méthode B**: Méthode de Gauss (pivot)

Principe: Si A est une matrice inversible 3×3 : $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Donc, si on parvient à exprimer linéairement les x, y, z en fonction des x', y', z' les coefficients obtenus seront les éléments de la matrice inverse de A. Pour cela, on peut utiliser la méthode de gauss (triangulation par combinaisons linéaires).

En partant de la matrice A de l'énoncé:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = x' \\ 4y = y' \\ 3x - 3y + z = z' \end{cases}$$

La combinaison linéaire $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L_1$ fournit

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = x' \\ 4y = y' \\ 4x - 8y = 2z' - x' \end{cases}$$

Ce système est (déjà!) triangulaire; on s'en aperçoit en permutant les lignes 2 et 3 ainsi que les colonnes 1 et 2.

- De L_2, on tire : $y = \dfrac{1}{4}y'$,
- De L_3 : $4x = 2z' - x' + 8y = 2z' - x' + 2y' \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{4}x' + \dfrac{1}{2}y' + \dfrac{1}{2}z'$
- Et par substitution dans L_1 : $2z = x' - 2x - 2y = \dfrac{3}{2}x' - \dfrac{3}{2}y' - z' \Longrightarrow z = \dfrac{3}{4}x' - \dfrac{3}{4}y' - \dfrac{1}{2}z'$

On trouve à nouveau (et heureusement): $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Le 10 octobre 2015.

EXALG516 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètres $m \in \mathbb{R}$, le polynôme

$$x^4 + mx^3 + m^2x^2 + m^3x + 1$$

a) est-il divisible par $(x+1)^2$?

b) est-il une fonction paire?

Solution proposée par Jan Frans Broeckx:

a) Pour que le polynôme soit divisible par $(x+1)^2$, il faut que le polynôme ***et*** sa dérivée première soient divisibles par $x+1$.

Le critère pour qu'un polynôme soit divisible par $x+1$ est que la somme des coefficients des puissances paires de la variable soit égale à la somme des puissances impaires.

$P(x) = x^4 + mx^3 + m^2x^2 + m^3x + 1$ divisible par $x+1 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + 2 = m + m^3 \quad (1)$

$P'^{(x)} = 4x^3 + 3mx^2 + 2m^2x + m^3$ divisible par $x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 + 4 = 3m + m^3 \quad (2)$

$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad m^2 + 2 = 2m \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{m^2 - 2m + 2 = 0}$

Le discriminant de cette équation du second degré est négatif ($\Delta = -4$) et ne possède donc aucune solution réelle. La question (a) n'a donc aucune solution dans les réels.

(Dans les complexes il y a deux solutions $m = 1 \pm i$)

b) Pour que le polynôme soit une fonction paire, il faut que les coefficients de x et de x^3 soient zéro. La seule solution est donc $m = 0$ et le polynôme paire est $P(x) = x^4 + 1$.

Le 28 janvier 2016.

EXALG517 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Pour quelle(s) valeur(s) du parmètre $k \in \mathbb{R}$ l'équation

$$(k+2)x^2 - 2kx + 2k - 3 = 0$$

admet-elle

a) 2 solutions complexes distinctes?

b) 2 solutions <u>réelles</u> distinctes dont le produit vaut 1?

Comme $k \in \mathbb{R}$, l'équation proposée est une équation du second dégré à coefficients réelles. On sait qu'une telle équation admet deux solutions réelles distinctes ou confondues, ou bien deux solutions complexes conjuguées et donc distinctes.

a) Pour avoir deux solutions complexes distinctes, il suffit que le Δ soit négatif.

Calculons en fait le Δ', puisque le coefficient du terme en x est positif.

$$\Delta' = k^2 - (k+2)(2k-3) = -k^2 - k + 6 = -(k+3)(k-2) < 0$$

Nous aurons donc deux solutions complexes si : $k \in \leftarrow, -3[\ \cup \ ]2, \rightarrow$

b) Pour avoir deux solutions réelles distinctes dont le produit vaut 1, il faut que

$$\frac{2k-3}{k+2} = 1 \Rightarrow k = 5$$

Or cette valeur correspond à des solutions complexes. Il n'est donc pas possible d'avoir les solutions demandées.

Le 23 février 2016.

EXALG518 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$; le système

$$\begin{cases} x-2y+az=1 \\ x-2ay+z=-2 \\ ax-2y+z=1 \end{cases}$$

Méthode de Carmer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -2a & 1 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1)^2(a+2) \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(2+a)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -2 & -2a & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+2) \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2a & -2 \\ a & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+2)$$

1er cas : $a=1$

Le système devient : $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow$ Système impossible

2ème cas : $a=-2$

Le système devient : $\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ -2x-2y+z=1 \end{cases} \xrightarrow{L_3=-(L_3+L_2)} \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+4y+z=-2 \\ x+4y+z=-2 \end{cases}$

C'est donc un système simplement indéterminé. On pose : $z=\lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y=1+2\lambda \\ x+4y=-2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\dfrac{\lambda+1}{2} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Dans les autres cas.

$$\begin{cases} x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{2(a-1)(a+2)}{2(a-1)^2(a+2)}=\dfrac{1}{a-1} \\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{2(a-1)(a+2)}{2(a-1)^2(a+2)}=\dfrac{1}{a-1} \\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{2(a-1)(a+2)}{2(a-1)^2(a+2)}=\dfrac{1}{a-1} \end{cases} \quad \text{ou encore :} \quad x=y=z$$

Le 23 février 2016.

EXALG519 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre réel a, l'équation

$$\frac{2x+a}{x}-\frac{2x}{x+a}=2$$

L'équation impose : $x+a\neq 0$ et $x\neq 0$.

On a alors : $\frac{2x+a}{x}-\frac{2x}{x+a}=2\Rightarrow (2x+a)(x+a)-2x^2=2x(x+a)$

$\Rightarrow 2x^2-ax-a^2=0\ \Rightarrow x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{4}=\frac{a\pm 3a}{4}=\begin{cases} a \\ -\frac{a}{2}\end{cases}$

La condition $x\neq 0$ est satisfaite si $a\neq 0$

La condition $x+a\neq 0$ est satisfaite $\begin{cases}\text{si } x=a,\ \text{il faut } 2a\neq 0\Rightarrow a\neq 0 \\ \text{si } x=-\frac{a}{2},\ \text{il faut} \Rightarrow \frac{a}{2}\neq 0\Rightarrow a\neq 0\end{cases}$

En résumé : $\boxed{S=\left\{a;-\frac{a}{2}\,|\,a\in\mathbb{R}_0\right\}}$

Le 10 septembre 2015.