

Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 52

EXALG520 – EXALG529

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2016

EXALG520 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant en fonction du paramètre réel m , le système

$$\begin{cases} mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m-m^2 \\ x + y + z = 1-m \end{cases}$$

Le système s'écrit aussi :

$$\begin{cases} x + y + z = 1-m \\ mx + (1-m)y + (1-m)z = m^2 \\ mx + (1+m)y + (1+m)z = m-m^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2=L_2-mL_1 \\ L_3=L_3-mL_1}} \begin{cases} x + y + z = 1-m \\ (1-2m)y + (1-2m)z = 2m^2 - m \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système n'est possible que si : $2m^2 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

1er cas : $m = 0$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Système simplement indéterminé : } \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

2ème cas : $m = \frac{1}{2}$

Le système devient :

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = \frac{1}{2} \\ x + 3y + 3z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Système simplement indéterminé : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

EXALG521 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

a) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & e^{-k} & e^{-2k} \\ e^k & -e & e^k \\ e^{2k} & e^{-k} & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible?

b) Calculer la matrice inverse de A_k pour $k = \ln 2$. (La réponse finale étant une matrice simplifiée au maximum et ne contenant aucun exposant).

Solution proposée par Hugues Vermeiren :

1. Développons le déterminant de A_k , directement, selon la première colonne:

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= 1 \cdot (-e - 1) - e^k \cdot (e^{-k} - e^{-3k}) + e^{2k} \cdot (1 + e^{1-2k}) \\ &= e^{2k} + e^{-2k} - 2 \\ &= (e^k - e^{-k})^2 \end{aligned}$$

$$\det(A_k) = 0 \iff e^k = e^{-k} \iff k = 0$$

La matrice A_k est inversible si et seulement si k est non nul.

2. Calculons les éléments de l'inverse de la matrice $A_{\ln 2} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & -e & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Méthode de Gauss:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = x' \\ 2x - ey + 2z = y' \\ 4x + \frac{1}{2}y + z = z' \end{cases} \quad \text{Exprimons les } x, y, z \text{ linéairement en fonction des } x', y', z'.$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 + eL_1$ fournissent:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = x' \\ (1+e)x + (1+\frac{1}{4}e)z = \frac{1}{2}y' + ex' \\ 3 + \frac{3}{4}z = z' - x' \end{cases}$$

$L_3 \rightarrow (1+e)L_3 - 3L_2$ donne le système triangulaire (échelonné):

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = & x' \\ (1+e)x + (1+\frac{1}{4}e)z = & \frac{1}{2}y' + ex' \\ -\frac{9}{4}z = & (-4e-1)x' - \frac{3}{2}y' + (1+e)z' \end{cases}$$

De là:

$$\circ z = \frac{4}{9}(4e+1)x' + \frac{2}{3}y' - \frac{4}{9}(1+e)z'$$

$$\circ (1+e)x = \frac{1}{2}y' + ex' - \frac{4+e}{4} \left(\frac{4}{9}(4e+1)x' + \frac{2}{3}y' - \frac{4}{9}(1+e)z' \right)$$

Avec un peu de courage et de patience...

$$x = -\frac{4}{9}(1+e)x' - \frac{1}{6}y' + \frac{4+e}{9}z'$$

$$\circ y = 2x' - 2x - \frac{1}{2}z$$

$$= 2x' - 2 \left(-\frac{4}{9}(1+e)x' - \frac{1}{6}y' + \frac{4+e}{9}z' \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}(4e+1)x' + \frac{2}{3}y' - \frac{4}{9}(1+e)z' \right)$$

Ce qui se simplifie en :

$$y = \frac{8}{3}x' - \frac{2}{3}z'$$

La matrice inverse de $A_{\ln 2}$ est finalement:

$$A_{\ln 2}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9}(1+e) & -\frac{1}{6} & \frac{1}{9}(4+e) \\ \frac{8}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9}(1+4e) & \frac{2}{3} & -\frac{4}{9}(1+e) \end{pmatrix}$$

Le 3 février 2016.

EXALG522 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 1} \leq x$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. L'inéquation se réécrit en

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} \leq x - |x-2|,$$

d'où la condition d'existence $x \in]-\infty : -1] \cup [1 : +\infty[$. Le membre de droite est positif seulement dans l'intervalle $[1 : +\infty[$, qui contiendra donc toutes les solutions éventuelles de l'inéquation. Dans cet intervalle, on peut élever au carré, ce qui donne

$$x^2 - 1 \leq x^2 - 2x|x-2| + x^2 - 4x + 4,$$

c'est-à-dire

$$0 \leq x^2 - 2x(|x-2| + 2) + 5.$$

Dans l'intervalle $[1 : 2]$, on a $|x-2| = 2-x$, ce qui permet une nouvelle simplification en

$$0 \leq 3x^2 - 8x + 5$$

et puis en

$$0 \leq (3x-5)(x-1).$$

Le membre de droite est positif dans l'ensemble $\{1\} \cup [5/3 : 2]$, qui sera inclus dans l'ensemble des solutions.

Dans l'intervalle $[2 : +\infty[$, on a $|x-2| = x-2$, ce qui permet une simplification en

$$0 \leq -x^2 + 5,$$

Le membre de droite est positif dans le sous-intervalle $[2 : \sqrt{5}]$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est l'ensemble $\{1\} \cup [5/3 : \sqrt{5}]$.

Le 10 septembre 2015.

EXALG523 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2015.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^8 - 2z^4 \cos a + 1 = 0$$

dans laquelle a est un paramètre réel.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. On pose d'abord $Z = z^4$; l'équation

$$Z^2 - 2Z \cos a + 1 = 0$$

admet les deux solutions complexes conjuguées $\cos a \pm i \sin a$, que l'on écrit aussi $\text{cis}(\pm a)$. Les huit solutions de l'équation initiale sont les racines quatrièmes de ces nombres, c'est-à-dire

$$\text{cis} \frac{\pm a + 2k\pi}{4} ; k = 0, 1, 2, 3.$$

Le 10 septembre 2015.

EXALG524 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y - z = -1 \\ -x + ay + z = -1 \\ ax + ay + z = a \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Le déterminant du système vaut $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$; il s'annule pour $a = -1$. Dans ce cas, le système se réécrit en

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ -x - y + z = -1 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

Des deux premières équations on déduit par addition $x = 1$ et par soustraction on déduit $y = z$; le système est simplement indéterminé et le triplet solution est $x = 1, y = \lambda, z = -\lambda$.

Si $a \neq -1$, on a une solution unique, qui est $x = 1, y = -1, z = a$.

Le 6 octobre 2015.

EXALG525 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

On donne les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 3d \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $d > c > 0$

On demande de déterminer a, b, c et d sachant que

$$BA^{-1}X = C, \quad 9a^2d^2 - 6abcd = 36 \quad \text{et} \quad 2\log_2 c + \log_2 d = 4$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

Solution. On obtient successivement

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA^{-1}X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix},$$

d'où on tire $a = 1$ et $b = 3$, puis $9d^2 + 9c^2 - 18cd = 36$, ce qui se réduit à $|d - c| = 2$ et enfin à $d = c + 2$.

On a en plus $2\log_2 c + \log_2 d = \log_2 c^2 d = 4$; $c^2 d = 2^4 = 16$, d'où $c = 2$ et $d = 4$.

Le 10 octobre 2015.

EXALG526 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Soit $i \in \mathbb{C}$ l'unité imaginaire (satisfaisant $i^2 = -1$). Résolvez l'équation suivante dans laquelle $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1$$

Représentez toutes les solutions graphiquement dans un même plan complexe.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = \text{cis}(2k\pi) \quad k \in \mathbb{C} \quad \text{CE: } z \neq i$$

$$\frac{z+i}{z-1} = \text{cis}\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(a) k=0 \quad \frac{z+i}{z-1} = 1 \Rightarrow z+i = z-i \quad \text{Impossible}$$

$$(b) k=1 \quad \frac{z+i}{z-1} = i \Rightarrow z+i = iz-i \Rightarrow z = -\frac{2i}{1-i} = 1-i$$

$$(c) k=2 \quad \frac{z+i}{z-1} = -1 \Rightarrow z+i = -z+1 \Rightarrow z = \frac{1-i}{2}$$

$$(d) k=3 \quad \frac{z+i}{z-1} = -i \Rightarrow z+i = -iz+i \Rightarrow z = 0$$

Conclusion : On obtient donc trois points alignés. $\left\{1-i, \frac{1-i}{2}, 0\right\}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

CE: $z \neq 1$

Méthode 1

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1 &\Leftrightarrow (z+i)^4 = (z-1)^4 \\ &\Leftrightarrow z^4 + 4iz^3 - 6z^2 - 4iz + 1 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 \\ &\Leftrightarrow 4(1+i)z^3 - 12z^2 + 4(1-i)z = 0 \\ &\Leftrightarrow 4z((1+i)z^2 - 3z + (1-i)) = 0 \\ &\Rightarrow z_1 = 0 \\ &\text{et } z_2 \text{ et } z_3 \text{ sont les solutions de } (1+i)z^2 - 3z + (1-i) = 0 \\ &\Delta = 9 - 4(1+i)(1-i) = 1 \quad \sqrt{\Delta} = 1 \\ z_{2,3} = \frac{1}{2(1+i)}(3 \pm 1) &= \begin{cases} z_2 = \frac{2}{1+i} = 1-i \\ z_3 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

$$S = \left\{ 0, 1-i, \frac{1-i}{2} \right\}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}\text{Posons } Z = \frac{z+i}{z-1} &\Leftrightarrow (z-1)Z = z+i \\ &\Leftrightarrow (Z-1)z = Z+i \quad \text{avec } Z \neq 1 \text{ sinon } 0 = i \text{ (absurde)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{Z+i}{Z-1}\end{aligned}$$

$$Z^4 = 1 = \text{cis } 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$Z_k = \text{cis } k \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0 = 1 \quad \text{à rejeter}$$

$$Z_1 = i \Rightarrow z_1 = \frac{i+i}{i-1} = 1-i$$

$$Z_2 = -1 \Rightarrow z_2 = \frac{-1+i}{-1-1} = \frac{1-i}{2}$$

$$Z_3 = -i \Rightarrow z_3 = \frac{-i+i}{-i-1} = 0$$

$$S = \left\{ 0, 1-i, \frac{1-i}{2} \right\}$$

Solution proposée par Jacques Collot :

On a $z \neq 1$

$$\left(\frac{z+i}{z-1}\right)^4 = 1 \Rightarrow (z+i)^4 - (z-1)^4 = 0 \Rightarrow [(z+i)^2 - (z-1)^2][(z+i)^2 + (z-1)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (z+i-z+1)(z+i+z-1)(z^2 + 2iz - 1 + z^2 - 2z + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (i+1)(2z+i-1)[2z^2 + 2(i-1)z] = 0 \Rightarrow 2z(2z+i-1)(z+i-1) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\left\{0, \frac{1-i}{2}, 1-i\right\}}$

Le 25 octobre 2016.

EXALG527 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Trouvez tous les polynômes à coefficients réels $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ de degré au plus 4 satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes :

(1) 1 est racine double de $P(x)$

(2) $P(x) = P(1-x)$

Solution proposée par Nicole Berckmans :

(1) $P(x) = (x-1)^2(ax^2 + bx + c)$

(2) $\forall x : P(x) = P(1-x)$ en particulier pour $x = 1 : P(1) = P(0) = 0$ donc $c = 0$

et $\begin{cases} P(x) = (x-1)^2 x(ax+b) & (1) \\ P(1-x) = (1-x-1)^2(1-x)[a(1-x)+b] = x^2(1-x)(-ax+a+b) & (2) \end{cases}$

(1) et (2) par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve

$$\begin{aligned} \text{coef } x^4 : & \quad a = a \\ x^3 : & \quad -2a = -2a \\ x^2 : & \quad -2b = -b \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(x) = ax^2(x-1)^2}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

La première condition signifie que $P(x)$ est divisible par $(x-1)^2$, qui est donc un facteur de $P(x)$. La deuxième condition implique alors que x^2 est un autre facteur de $P(x)$.

Etant donné que le degré de $P(x)$ ne dépasse pas 4, la forme générale du polynôme est alors :

$$P(x) = ax^2(x-1)^2 \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

Le 25 octobre 2016.

EXALG528 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation

$$2(\log x) - 1 = \log\left(x - \frac{25}{10}\right)$$

où log est le logarithme en base 10.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

$$\text{CE : } \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log \frac{x^2}{x - \frac{25}{10}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x - \frac{25}{10}} = 10 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

$$\text{CE : } x > 2,5$$

$$\begin{aligned} 2(\log x) - 1 &= \log\left(x - \frac{25}{10}\right) &\Leftrightarrow \log x^2 - \log 10 &= \log\left(x - \frac{25}{10}\right) \\ &&\Leftrightarrow \log \frac{x^2}{10} &= \log \frac{10x - 25}{10} \\ &&\Leftrightarrow \frac{x^2}{10} &= \frac{10x - 25}{10} \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 &= 0 \\ &&\Leftrightarrow (x - 5)^2 &= 0 \\ &&\Leftrightarrow \mathbf{x = 5} \end{aligned}$$

Le 25 octobre 2016.

EXALG529 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Sur de longues distances, la transmission de courant électrique continu à très haute tension (HVDC) occasionne des pertes de puissance nettement moins élevées que par les lignes à courant alternatif. La plus longue liaison électrique HVDC en service en 2016 est située au Brésil, du Rio Madeira à Araquara. Elle mesure 2400 km et dispose d'une puissance initiale de 7100 MW. La puissance à l'arrivée est de 6606 MW.

- (a) Estimez le pourcentage de perte de puissance par 100 km (en supposant que le pourcentage de perte est uniforme sur toute la longueur du parcours).
- (b) D'autres lignes HVDC sont à l'étude, pour lesquelles la perte de puissance par 100 km sera identique à celle de la ligne de Rio Madeira à Araquara. On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 5% sur ces lignes. Déterminez, à 100 km près, la longueur maximale d'une ligne pour laquelle la perte de puissance reste inférieure à 5%. (Expliquez soigneusement votre raisonnement.)
-

Solution proposée par Catherine Leroy :

- (a) Soit i la perte de puissance par 100 km en %

$$7100 \left(1 - \frac{i}{100}\right)^{24} = 6606 \Rightarrow \left(1 - \frac{i}{100}\right) = \left(\frac{6606}{7100}\right)^{\frac{1}{24}} \Rightarrow i = 0.3 \%$$

0.3 % de perte sur chaque tranche de 100 km et 6.96 % sur 2400 km
car $6606 = 0.9304 \times 7100$

- (b) Soit p la puissance initiale en MW et donc $0.95p$ la puissance finale en MW.

Soit n le nombre de tranches de 100 km : $p \left(1 - \frac{i}{100}\right)^n \geq 0.95p$

$$\Rightarrow 0.997^n \geq 0.95 \Rightarrow n \leq \frac{\log 0.95}{\log 0.997} = \frac{\ln 0.95}{\ln 0.997} = 17.07 \Rightarrow n = 17$$

La longueur recherchée à 100 km près vaut 1700 km

Le 25 octobre 2016.