Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 53

EXALG530 – EXALG539

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2016

EXALG530 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Soit $i \in \mathbb{C}$ l'unité imaginaire (satisfaisant $i^2 = -1$). Déterminez pour quels nombre réels $r > 0$ et entiers $n \in \mathbb{Z}$ on a l'égalité

$$(1+i)^{1024} = \left[r\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right) \right]^n$$

Même question pour

$$(1+i)^{1024} = \left[r\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \right) \right]^n$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans :

(1) On sait que $1+i = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

On doit avoir $\left(\sqrt{2}\right)^{1024} \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}.1024\right) = r^n \,\text{cis}\, n\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}^{\,1024} = r^n \\ 256\pi = \frac{n}{3}2\pi + 2k\pi \end{cases}$

Conclusion : n est un multiple non nul de 3 et $r = 2^{\frac{512}{n}}$

(2) $\begin{cases} \sqrt{2}^{\,1025} = r^n \\ 1025\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}n + 2k\pi \Rightarrow 231\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}n + 2k\pi \text{ ce qui est impossible pou } n \text{ entier.} \end{cases}$

Le 25 octobre 2016.

EXALG531 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Déterminez pour quels nombres réels $a,\ b$ le polynôme suivant est le carré d'un polynôme à coefficients réels :

$$x^6 + ax^4 - bx^3 + bx^2 - \frac{ab}{2}x + 1$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Jacques Collot :

Soit donc a et b tels que le polynôme donné soit le carré d'un polynôme $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. On doit donc avoir

$$x^6 + ax^4 - bx^3 + bx^2 - \frac{ab}{2}x + 1 = \left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta\right)^2$$

On développe et on identifie les coefficients.

$$\begin{array}{llll}
x^6: & \alpha^2 = 1 & (1) & \Rightarrow \alpha = \pm 1 \\
x^5: & 2\alpha\beta = 0 & (2) & \Rightarrow \beta = 0 \text{ car } \alpha \neq 0 \\
x^4: & \beta^2 + 2\alpha\gamma = a & (3) & \Rightarrow 2\alpha\gamma = a \\
x^3: & 2\beta\gamma + 2\alpha\delta = -b & (4) & \Rightarrow 2\alpha\delta = -b \text{ donc } \alpha \text{ et } \delta \text{ sont de signes opposés} \\
x^2: & 2\beta\delta + \gamma^2 = b & (5) & \Rightarrow \gamma^2 = b \text{ donc } b > 0 \\
x^1: & 2\gamma\delta = -\dfrac{ab}{2} & (6) & \\
x^0: & \delta^2 = 1 & (7) & \Rightarrow \delta = \mp 1
\end{array}$$

De $(1),(4)$ et (7) : $b = -2\alpha\delta = -2(\pm 1)(\mp 1) = 2 \Rightarrow \gamma = \pm\sqrt{2} \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$

Autrement dit :

<u>1er cas : $\alpha = 1$</u> : on obtient deux séries de valeurs :

$A \equiv a = +2\sqrt{2}\ ;\ b = 2\ ;\ \gamma = +\sqrt{2}\ ;\ \delta = -1$

$B \equiv a = -2\sqrt{2}\ ;\ b = 2\ ;\ \gamma = \sqrt{2}\ ;\ \delta = -1$

Ce qui correspond aux égalités suivantes :

$$A \Rightarrow x^6 + 2\sqrt{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = \left(x^3 + \sqrt{2}x - 1\right)^2$$

$$B \Rightarrow x^6 - 2\sqrt{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = \left(x^3 - \sqrt{2}x - 1\right)^2$$

<u>2éme cas : $\alpha = -1$</u> : on obtient deux séries de valeurs :

$C \equiv a = +2\sqrt{2}\ ;\ b = 2\ ;\ \gamma = +\sqrt{2}\ ;\ \delta = 1$

$D \equiv a = -2\sqrt{2}\ ;\ b = 2\ ;\ \gamma = \sqrt{2}\ ;\ \delta = 1$

Ce qui correspond aux égalités suivantes :

$$C \Rightarrow x^6 + 2\sqrt{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = \left(-x^3 - \sqrt{2}x + 1\right)^2$$

$$D \Rightarrow x^6 - 2\sqrt{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = \left(-x^3 + \sqrt{2}x + 1\right)^2$$

On voit que A et C d'une part et B et D d'autre part conduisent aux mêmes expressions.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{a = \pm 2\sqrt{2}\ ;\ b = 2\ ;\ Q(x) = \pm x^3 \pm \sqrt{2}x \mp 1}$

Le 8 novembre 2016.

EXALG532 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

On considère l'équation suivante, où m est un paramètre réel :

$$x^2 - 2mx + 4 = 0$$

Déterminez m de sorte que l'équation admette deux racines réelles qui vérifient chacune l'inégalité :

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy et Nicole Berckmans:

Première méthode

$x^2-2mx+4$ admet deux racines distinctes si $\dfrac{\Delta}{4}=m^2-4>0$ càd $m<-2$ ou $m>2$ $\quad(*)$

Appelons x_1 et x_2 les deux racines de $f(x)=x^2-2mx+4$.

Remarquons que $x_1+x_2=2m \Rightarrow m=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ donc m est le milieu de $[x_1x_2]$

La parabole $y=x^2-3x+2$ admet deux racines 1 et 2.

Comme c'est une parabole à concavité positive, l'inégalité $x^2-3x+2>0$ sera vérifiée si les racines x_1 et x_2 sont soit en dessous de 1 soit au dessus de 2.

Nous avons 3 cas : $\begin{cases} x_1<x_2<1<2 & (1) \\ x_1<1<2<x_2 & (2) \\ 1<2<x_1<x_2 & (3) \end{cases}$

1er cas : $x_1<x_2<1<2$ Dans ce cas, 1 est situé en dehors des racines de f et à droite de la demi-somme des racines

x		x_1		m		x_2		1		2
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

On doit donc avoir $\begin{cases} f(1)=5-2m>0 \\ m<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<\dfrac{5}{2} \\ m<1 \end{cases}$

En tenant compte de $(*)$, on conclut : $m<-2$

2ème cas : $x_1<1<2<x_2$ Dans ce cas, 1 et 2 sont situés entre les racines x_1 et x_2

x		x_1		1		2		x_2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

On doit donc avoir $\begin{cases} f(1)=5-2m<0 \\ f(2)=4(2-m)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2}<m \\ 2<m \end{cases} \Rightarrow \dfrac{5}{2}<m$

3ème cas : $1<2<x_1<x_2$ Dans ce cas, 2 est en dehors des racines et à gauche de la demi-somme

x		1		2		x_1		m		x_2	
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

On doit donc avoir $\begin{cases} f(2)=4(2-m)>0 \\ 2<m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ 2<m \end{cases}$ Impossible

Conclusion : $\boxed{m\in\left]\leftarrow;-2\right[\cup\left]\dfrac{5}{2};\rightarrow\right[}$

Deuxième méthode

$x^2 - 2mx + 4 = 0$ admet deux racines $x_1 = m - \sqrt{m^2 - 4}$ et $x_2 = m + \sqrt{m^2 - 4}$ à condition que $m^2 - 4 > 0$ càd $m \in \left]\leftarrow; -2\right[\cup \left]2, \rightarrow\right[$

De plus ces deux racines doivent vérifier $x^2 - 3x + 2 > 0$

or

x		1		2	
$x^2 - 3x + 2 >$	+	0	$-$	0	+

Donc x_1 et x_2 doivent se situer en dehors de $[1,2]$.

On remarque aussi que $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = m \Rightarrow x_1 < m < x_2$

1er cas : $m < -2$: et donc $x_1 < 2m < -2 < 1$ ou $\quad x_1 \quad m \quad -2 \quad 1 \quad 2$

Vérifions que dans ce cas $x_2 < 1$

$$x_2 = m + \sqrt{m^2 - 4} < 1 \Rightarrow \sqrt{2m^2 - 4} < 1 - m$$

Les deux membres étant positifs, on élève au carré

$$\Rightarrow m^2 - 4 < (1 - m)^2 \Rightarrow m < \frac{5}{2}$$ ce qui est vérifié lorsque $m < -2$

2ème cas : $2 < m$: et donc $2 < m < x_2$

Vérifions que dans ce cas $2 < x_1$

$$2 < x_1 = m - \sqrt{m^2 - 4} \Rightarrow \sqrt{m^2 - 4} < m - 2$$

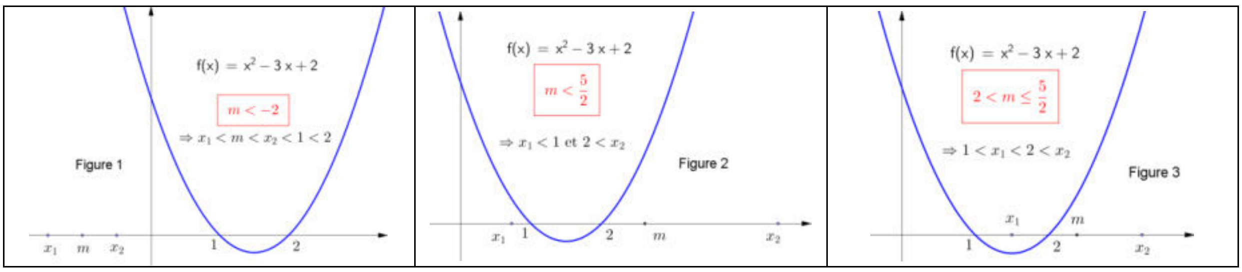
$$\Rightarrow m^2 - 4 < (m - 2)^2 = m^2 - 4m + 4 \Rightarrow m < 2$$ ce qui est rejeté.

Toujours dans le cas $2 < m,$ peut-on dire que $x_1 < 1 \Rightarrow m - \sqrt{m^2 - 4} < 1$

$\Rightarrow m - 1 < \sqrt{m^2 - 4}$ Inéquation dont les deux membres sont positifs.

$$\Rightarrow (m-1)^2 < m^2 - 4 \Rightarrow -2m + 1 < -4 \Rightarrow \frac{5}{2} < m.$$

Dans le cas $2 < m,$ on doit donc aussi avoir : $\dfrac{5}{2} < m$ pour que x_1 et x_2 se situent à l'extérieur de $[1,2]$



<u>Conclusion</u>

(1) Si $m < -2$ alors $x_1 < m < x_2 < 1 < 2$ Figure 1

(2) Si $\frac{5}{2} < m$ alors $x_1 < 1$ et $2 < x_2$ Figure 2

(3) Si $2 < m \leq \frac{5}{2}$ alors $1 < x_1 < 2 < x_2$ Figure 3

(4) Si $-2 \leq m \leq 2$ 1 ou pas de racine

Réponse : $\boxed{m \in \left] \leftarrow ;2 \right[\cup \left] \frac{5}{2} ;\rightarrow \right[}$

Le 25 octobre 2016.

EXALG533 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Laurent, Jean-Pierre et Piotr maçonnent par équipe de deux et pendant trois jours un mur d'une surface totale de 22,5 m^2. Dans une même équipe, chacun démarre et arrête ses activités en même temps. En raison des conditions climatiques, les journées sont de durée variable.

Laurent travaille au rythme de 1 m^2 de mur par heure, Piotr met deux fois plus de temps pour une même surface, et Jean-Pierre travaille à un rythme équivalent à la moyenne des deux autres.

Le premier jour, Laurent et Jean-Pierre travaillent ensemble. Le second jour ce sont Jean-Pierre et Piotr, et le dernier jour il s'agit de Piotr et Laurent. On sait également que Laurent a posé au total 12m^2 et Piotr 3m^2.

On souhaite savoir quelle surface de mur a été posée pour chacun des jours.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

	L	JP	P	Σ	Rép
1er jour	x	$\frac{3}{4}x$		$\frac{7}{4}x$	14 m^2
2ème jour		$\frac{3}{4}y$	$\frac{y}{2}$	$\frac{5}{4}y$	2.5 m^2
3ème jour	z		$\frac{z}{2}$	$\frac{3}{2}z$	6 m^2

On obtient alors un système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} x+z=12 \\ \frac{y}{2}+\frac{z}{2}=3 \\ \frac{7}{4}x+\frac{5}{4}y+\frac{3}{2}z=\frac{45}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=8\ \text{m}^2;\ y=2\ \text{m}^2;\ z=4\ \text{m}^2}$$

Le 6 novembre 2016.

EXALG534 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

On considère les systèmes d'équations suivants à coefficients réels :

$$(I):\begin{cases} x-y-z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases} \qquad (II):\begin{cases} ax-ay-az=a^2 \\ 2ax+a^3y-2az=a \end{cases}$$

Déterminez pour quelle(s) valeur(s) réelle(s) du paramètre a les systèmes (I) et (II) ont les mêmes solutions (c'est-à-dire que toute solution dans $\mathbb{R}^3$ du système (I) est solution du système (II) et toute solution dans $\mathbb{R}^3$ du système (II)) est solution du système (I)).
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

$$(I):\begin{cases} x-y-z=1 & (1) \\ -x+y+z=1 & (2) \end{cases} \qquad (II):\begin{cases} ax-ay-az=a^2 & (3) \\ 2ax+a^3y-2az=a & (4) \end{cases}$$

Recherchons les solutions de (I): $\begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow y=1 \\ \text{dans } (1) \Rightarrow z=x \end{cases}$

$\Rightarrow S_{(I)}:\{(k,1,k)\,|\,k\in\mathbb{R}\}$ Système simplement indéterminé.

Pour que les solutions de (I) soient soutions de (II), il faut:

$(3) \Rightarrow ax-a-ax=a^2 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases}$

Il n'y a donc que deux valeurs de a à envisager.

Si $a=0$, le système (II) s'écrit $\begin{cases} 0x+0y+0z=0 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow S_{(II,a=0)}:\{(k,k',k'')\,|\,k,k',k''\in\mathbb{R}\}$ Système triplement indéterminé.

La valeur de $a=0$ est à rejeter car dans ce cas , les sytèmes (I) et (II) n'ont pas les mêmes solutions. (Toute solution du système (II) n'est pas solution du système (I))

Si $a=-1$, le sytème (II) s'écrit $\begin{cases} -x+y+z=1 & (5) \\ -2x-y+2z=-1 & (6) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (5)+(6) \Rightarrow z=x \\ \text{dans } (5) \Rightarrow y=1 \end{cases}$

$\Rightarrow S_{(II,a=-1)}:\{(k,1,k)\,|\,k\in\mathbb{R}\}$ Système simplement indéterminé

La valeur de $a=-1$ est à garder car dans ce cas les systèmes (I) et (II) ont les mêmes solutions.

Conclusion : $\boxed{\text{les deux systèmes ont les mêmes solutions si } a=-1}$

Le 6 novembre 2016.

EXALG535 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Quatre nombres réels strictement positifs sont en progression géométrique. Si l'on soustrait le premier du deuxième, on obtient 42. Si l'on soustrait le premier du troisième, on obtient 105. Que vaut le quatrième ?
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

Soient x, qx, q^2x, q^3x les 4 nombres. On a :

$$\begin{cases} qx - x = 42 \\ q^2x - x = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(q-1) = 42 \\ x(q-1)(q+1) = 105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(q-1) = 42 \\ q+1 = \dfrac{105}{42} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(q-1) = 42 \\ q = \dfrac{63}{42} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 84 \\ q = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne la suite :

$x = 84$

$qx = 126$

$q^2x = 189$

$q^3x = 283.5$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{le quatrième nombre vaut } 283.5}$

Le 6 novembre 2016.

EXALG536 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Trouvez toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\log_4 \ (x + 3) + \log_{16} \ (x) < 1$$

où $\log_4$ représente le logarithme en base 4, et $\log_{16}$ celui en base 16.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

CE : $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

$$\log_4(x+3)+\log_{16}(x)<1 \Rightarrow \log_4(x+3)+\frac{\log_4 x}{\log_4 16}<1 \Rightarrow 2\log_4(x+1)+\log_4(x)<2$$

$$\Rightarrow \log_4(x+3)^2+\log_4(x)<2 \Rightarrow \log_4\left[(x+3)^3 x\right]<2 \Rightarrow (x+3)^3 x<4^2$$

$$\Rightarrow (x^2+6x+9)x-16<0 \Rightarrow x^3+6x^2+9x-16<0$$

Horner : $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 9 & -16 \\ 1 & & 1 & 7 & 16 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 0 \end{array} \Rightarrow \underbrace{(x^2+7x+16)}_{\Delta=49-4\times16<0}(x-1)<0 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow x<1$

Conclusion : $\boxed{S :]\,0;1\,[}$

Le 6 novembre 2016.

EXALG537 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Calculez $(1+i)^6$ où $i \in \mathbb{C}$ est l'unité imaginaire (satisfaisant $i^2 = -1$).
A partir de ce résultat, démontrez qu'on peut réaliser autant de combinaisons des six voyelles de la langue française sans répétition en les prenant 2 à 2 qu'en les prenant 4 à 4.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Catherine Leroy :

$$(1)\ (1+i)^6 = (1+i^2+2i)^3 = (2i)^3 = -8i \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(1+i)^6 = 0 \\ \operatorname{Im}(1+i)^6 = -8 \end{cases}$$

(2) Appliquons le binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j}$

$$(1+i)^6 = \sum_{j=0}^{6} C_6^j x^j y^{6-j} = C_6^0 1^0 i^6 + C_6^1 1^1 i^5 + C_6^2 1^2 i^4 + C_6^3 1^3 i^3 + C_6^4 1^4 i^2 + C_6^5 1^5 i^1 + C_6^6 1^6 i^0$$

$$= -C_6^0 + iC_6^1 + C_6^2 - iC_6^3 - C_6^4 + iC_6^5 + C_6^6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(1+i)^6 = -C_6^0 + C_6^2 - C_6^4 + C_6^6 = C_6^2 - C_6^4 \quad \text{car } C_6^0 = C_6^6 = 1 \\ \operatorname{Im}(1+i)^6 = C_6^1 - C_6^3 + C_6^5 \end{cases}$$

En identifiant les parties réelles Re $\Rightarrow C_6^2 - C_6^4 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{C_6^2}_{\text{Nbre de ceombinaisons de voyelles prises 2 à 2}} = \underbrace{C_6^4}_{\text{Nbre de ceombinaisons de voyelles prises 4 à 4}}}$$

Le 6 novembre 2016.

EXALG538 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

1) **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^6 - 1 = 0$.**
2) **Si a et b sont des nombres complexes tel que $a + b \in \mathbb{R}$ et $(a^3 + b^3) \in \mathbb{R}$, déterminer les conditions sur a et b pour que $a^2 - ab + b^2$ soit un complexe non-réel.**

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

1) Les solutions sont les racines sixièmes complexes de $1 = \operatorname{cis} 2k\pi$, donc $x_k = \operatorname{cis} k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$. L'ensemble des six solutions est donc :

   $$S = \left\{1\,, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, -1\,, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

2) Etant donné l'identité

   $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,

   une condition *nécessaire* pour que $a^2 - ab + b^2$ soit un complexe non-réel est que $a + b = 0$ et donc que $b = -a$.

   Dans ce cas, on a que $a^2 - ab + b^2 = 3a^2$, ce qui est un réel si et seulement si a est réel ou imaginaire pure.

   La condition *nécessaire et suffisante* est donc :

   $b = -a \ \in \ \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup \{\alpha i \| \alpha \in \mathbb{R}\})$

Le 25 octobre 2016.

EXALG539 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} m^2x - my + z &= -1 \\ x - my + mz &= -m \\ mx - my + z &= -1 \end{cases}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Déterminant de la matrice des coefficients

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A} &= \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 1 & -m & m \\ m & -m & 1 \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -m \begin{vmatrix} m^2 - m & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= +m^2(m-1)^2
\end{aligned}$$

$\det \mathcal{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{0\,,1\}$

Les cas particuliers

1) $m = 0$

Le système devient

$$\begin{cases} z = -1 \\ x = \ \ 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

Le système est ***simplement indéterminé*** et sa solution est $S = \{(0\,;k\,;\,-1) \| k \in \mathbb{R}\}$.

2) $m = 1$

Le système devient

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Le système est ***doublement indéterminé*** et sa solution est $S = \{(k\,;l\,;\,l - k - 1) \| k, l \in \mathbb{R}\}$

Le cas général : $m \in \mathbb{R}_0 \backslash \{1\}$

Le système est ***déterminé*** et donc Cramerien :

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{A}_x &= \begin{vmatrix} -1 & -m & 1 \\ -m & -m & m \\ -1 & -m & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
\det \mathcal{A}_y &= \begin{vmatrix} m^2 & -1 & 1 \\ 1 & -m & m \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
\det \mathcal{A}_z &= \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 1 & -m & -m \\ m & -m & -1 \end{vmatrix} = -\det \mathcal{A}
\end{aligned}$$

$S = \{(0\,;0\,;\,-1)\}$

Le 25 octobre 2016.