**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

# ALG 54

**EXALG540 – EXALG549**

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2016

## EXALG540 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

**Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction des paramètres $m, k \in \mathbb{R}$, l'équation**

$$\frac{k}{x+\frac{1}{1-\frac{1}{k}}}=m$$

---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx :**

**CE** ① $k \neq 0$

② $k \neq 1$

Sous ces conditions :

$$\frac{k}{x+\frac{1}{1-\frac{1}{k}}}=m \iff \frac{k}{x+\frac{k}{k-1}}=m$$

$$\iff \frac{k(k-1)}{(k-1)x+k}=m$$

$$\iff m(k-1)x+mk=k(k-1)$$

$$\iff m(k-1)x=k(k-m-1)$$

**CE** ③ $m \neq 0$

La solution est alors :

$$x=\frac{k(k-m-1)}{m(k-1)}$$

---

Le 25 octobre 2016.

# EXALG541 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

1) Factoriser au maximum dans $\mathbb{C}$, le polynôme

$$x^7 + 48x^2 + 16 + 3x^5 - \left(x^4 + 3x^6 + 16x^3 + 48x\right)$$

2) Donner un exemple de polynôme ayant au moins un coefficient complexe non réel, admettant exactement deux racines réelles et deux racines complexes non réelles (les 4 racines étant distinctes deux à deux). Justifier brièvement votre choix.

3) a) Déterminer les valeurs des paramètres réels $m$ et $p$ pour que le polynôme

$$P(x) = x^3 - 3mpx + m^3 + p^3$$

soit divisible par $x + m + p$.

b) Pour les valeurs de $m$ et $p$ trouvées au a), déterminer le quotient de la division de $P(x)$ par $x + m + p$.

---

**Solution proposée par Jan Frans Broeckx :**

1) Un polynôme est divisible par $(x-1)$ si et seulement si la somme de ses coefficients est zéro. Nous appliquons trois fois de suite cette propriété, en calculant à chaque fois le quotient par la règle de Horner. Ensuite nous utilisons trois fois $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\begin{aligned}
& x^7-3x^6+3x^5-x^4-16x^3+48x^2-48x+16 \\
= \ & (x-1)\left(x^6-2x^5+x^4-16x^2+32x-16\right) \\
= \ & (x-1)^2(x^5-x^4-16x+16) \\
= \ & (x-1)^3(x^4-16) \\
= \ & (x-1)^3\left(x^2-4\right)^2\left(x^2+4\right)^2 \\
= \ & (x-1)^3(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)
\end{aligned}$$

2) Afin de simplifier au maximum les calculs, choisissons $+1$ et $-1$ comme les deux racines réelles, et $+i$ comme une des racines complexes non réelles. Pour qu'au moins un coefficient soit complexe non réel, il faut que la deuxième racine complexe non réelle soit différente du complexe conjugué de la première ; choisissons-la comme $-2i$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)(x+1)(x-i)(x+2i) \\
&= \left(x^2-1\right)\left(x^2+ix+2\right) \\
&= x^4+ix^3+x^2-ix-2
\end{aligned}$$

3) Le polynôme est $P(x)=x^3-3mpx+m^3+p^3$ avec $m,p\in\mathbb{R}$.

a) Le polynôme est divisible par $x+m+p=\left(x-\left(-(m+p)\right)\right)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
P\left(-(m+p)\right)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -(m+p)^3+3mp(m+p)+m^3+p^3=0 \\
&\Leftrightarrow \quad -(m^3+3m^2p+3mp^2+p^3)+(3m^2p+3mp^2)+m^3+p^3=0 \\
&\Leftrightarrow \quad 0=0
\end{aligned}$$

Le polynôme est donc divisible par $x+m+p$ pour *tout* $m,p\in\mathbb{R}$.

b) On peut calculer le quotient de la division par la règle de Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $0$ | $-3mp$ | $m^3+p^3$ |
| $-(m+p)$ | | $-(m+p)$ | $(m+p)^2$ | $-(m^3+p^3)$ |
| | $1$ | $-(m+p)$ | $m^2-mp+p^2$ | $0$ |

où nous avons utilisé l'identité $m^3+p^3=(m+p)(m^2-mp+p^2)$.

Le quotient est donc : $Q(x)=x^2-(m+p)x+(m^2-mp+p^2)$

Le 25 octobre 2016.

## **EXALG542** – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

**a) Pour quelle(s) valeurs(s) du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice**

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{7\pi}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\lambda \end{bmatrix}$$

**est-elle inversible ?**

**b) Calculer la matrice inverse de $M_\lambda$ pour $\lambda = \frac{\pi}{6}$ et simplifier au maximum la réponse.**

---

### Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

**a) Déterminant**

La matrice est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro. Calculons donc d'abord ce déterminant (en notant que $\sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$).

$$\det M_\lambda = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2\lambda - \cos\lambda & 0 & \cos\lambda - \cos 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\cos 2\lambda - \cos\lambda)\begin{vmatrix} \cos\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos 2\lambda - \cos\lambda)\begin{vmatrix} \cos\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos 2\lambda + \cos\lambda \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos 2\lambda - \cos\lambda)(\cos 2\lambda + \cos\lambda)\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos 2\lambda - \cos\lambda)(\cos 2\lambda + \cos\lambda)$$

$$= \cos^2 2\lambda - \cos^2\lambda$$

$$\begin{aligned} \det M_\lambda = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos 2\lambda = \cos\lambda \quad &\text{ou} \quad &\cos 2\lambda = -\cos\lambda = \cos(\pi - \lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad 2\lambda = \pm\lambda + 2k\pi \quad &\text{ou} \quad &2\lambda = \pm(\pi - \lambda) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = 2k\pi \ \text{ ou } \ \lambda = k\frac{2\pi}{3} \quad &\text{ou} \quad &\lambda = \pi + 2k\pi \ \text{ ou } \ \lambda = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

En résumé, $\det M_\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $M_\lambda$ inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \backslash \left\{k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**b) Matrice inverse de $M_{\pi/6}$.**

$$M_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad \det M_{\pi/6} = \cos^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{adj} M_{\pi/6} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{\pi/6}{}^{-1} = \frac{1}{\det M_{\pi/6}} \left(\operatorname{adj} M_{\pi/6}\right)^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} & -2 \\ -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$

---

Le 25 octobre 2016.

# EXALG543 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

**Résoudre dans $\mathbb{R}$, en discutant en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$, l'inéquation**

$$4a + 4 \leq x^2 < 2x + 2ax$$

**Indiquer un résumé final de la discussion, les réponses étant simplifiées au maximum.**

---

## Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

1) Inéquation de gauche : $x^2 \geq 4(a+1)$
   a) Si $a \leq -1$ alors vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b) Si $a > -1$ alors vérifiée si $|x| \geq 2\sqrt{a+1}$.
2) Inéquation de droite : $x\big(x - 2(a+1)\big) < 0$
   a) Si $a < -1$ alors vérifiée pour $x \in \left]2(a+1)\,;0\right[$.

      Etant donné que l'inéquation de gauche est vérifiée pour $x \in \mathbb{R}$, cet intervalle est également la solution de la double inéquation.
   b) Si $a = -1$ alors $x^2 < 0$ : jamais !
   c) Si $a > -1$ alors vérifiée pour $x \in \left]0\,;2(a+1)\right[$.

      Etant donné que l'inéquation de gauche est vérifiée pour $|x| \geq 2\sqrt{a+1}$, il faut, pour qu'il y ait une solution, que $2(a+1) > 2\sqrt{a+1}$ et donc que $a > 0$. Dans ce cas la solution de la double inéquation est $\in \left[2\sqrt{a+1}\,;2(a+1)\right[$ , sinon le solution est vide.
3) Résumé final :

   Si $a < -1$ alors $S = \left]2(a+1)\,;0\right[$ ;

   si $a \in [-1\,;0]$ alors $S = \emptyset$ ;

   si $a > 0$ alors $= \left[2\sqrt{a+1}\,;2(a+1)\right[$ .

---

Le 25 octobre 2016.

## **EXALG544** – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $x^8+4$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont : [http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/](http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/)**

*Solution.* L'équation $x^8+4=0$ peut se récrire $x^8 = 4\,\mathrm{cis}\,\pi$. En posant $\rho = \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2}$, l'ensemble des huit solutions complexes peut s'écrire $\{\rho\,\mathrm{cis}\,[(2k+1)\pi/8] : k = -4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.
En tenant compte de l'égalité

$$(x-\rho\,\mathrm{cis}\,\alpha)(x-\rho\,\mathrm{cis}\,(-\alpha)) = (x^2 - 2\rho\,x\cos\alpha + \rho^2)\,,$$

valable pour tous réels $\rho$ et $\alpha$ et pour tout complexe $x$, la factorisation demandée s'écrit:

$$(x^2-2\sqrt[4]{2}\,x\cos(\pi/8)+\sqrt{2})(x^2-2\sqrt[4]{2}\,x\cos(3\pi/8)+\sqrt{2})(x^2-2\sqrt[4]{2}\,x\cos(5\pi/8)+\sqrt{2})(x^2-2\sqrt[4]{2}\,x\cos(7\pi/8)+\sqrt{2})\,.$$

On peut aussi utiliser les égalités

$$2\cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}} = -2\cos(7\pi/8) \quad \text{et} \quad 2\cos(3\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}} = -2\cos(5\pi/8)\,;$$

cela permet de récrire la factorisation en

$$(x^2-\sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt[4]{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}x+\sqrt{2})\,,$$

et enfin en

$$(x^2-\sqrt{2\sqrt{2}+2}\,x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2\sqrt{2}-2}\,x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2\sqrt{2}-2}\,x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2\sqrt{2}+2}\,x+\sqrt{2})\,.$$

*Remarque.* On utilise la formule $1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$ pour obtenir la valeur de $\cos(k\pi/8)$ en fonction de celle de $\cos(k\pi/4)$.

*Remarque.* On utilise la formule $1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$ pour obtenir la valeur de $\cos(k\pi/8)$ en fonction de celle de $\cos(k\pi/4)$.

*Variante élémentaire, plus directe.* On observe d'abord ceci:

$$x^8+4 = x^8+4x^4+4-4x^4 = (x^4+2)^2-(2x^2)^2 = (x^4+2x^2+2)(x^4-2x^2+2)\,.$$

On achève la factorisation en utilisant ceci:

$$x^4 \pm 2x^2 + 2 = (x^2+\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2}\mp 2)x^2 = (x^2+\sqrt{2\sqrt{2}\mp 2}\,x+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2\sqrt{2}\mp 2}\,x+\sqrt{2})\,.$$

---

Le 16 janvier 2017

## **EXALG545** – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

Résoudre le système suivant, dans lequel $m$ est un paramètre réel :

$$\begin{cases} mx + y = m+1 \\ m^3 + (2m-1)\,y = m^3+1 \end{cases}$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont : [http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/](http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/)**

*Solution.* Le déterminant du système est:

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ m^3 & 2m-1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m^2 & 2m-1 \end{vmatrix} = -m(m^2-2m+1) = -m(m-1)^2\,;$$

il s'annule pour $m=0$ et pour $m=1$.
Si $m=0$, le système se réduit aux équations $y=1$ et $-y=1$ et est clairement impossible.
Si $m=1$, le système se réduit aux équations $x+y=2$ et $x+y=2$; il est indéterminé et $(x,y)=(\lambda,2-\lambda)$ est une solution quelle que soit la valeur du paramètre $\lambda$.
Si $m$ est un réel distinct de 0 et de 1, le système admet une solution unique, qui est:

$$x = \frac{(m+1)(m-2)}{m(m-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{m+1}{m-1}\,.$$

---

Le 16 janvier 2017

## EXALG546 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Un polynôme réel $f(x)$ et son polynôme dérivé $f'(x)$ s'annulent tous les deux en $x = 2$. Montrer que $f(x)$ est un multiple de $(x-2)^2$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont : http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/**

*Solution.* Il existe un polynôme unique $q(x)$ et deux réels uniques $a$ et $b$ tels que $f(x) = q(x)(x-2)^2 + a(x-2) + b$. On a alors $f'(x) = [q'(x)(x-2) + 2q(x)](x-2) + a$. De $f'(2) = 0$ on tire $a = 0$; ensuite, de $f(2) = 0$ on tire $b = 0$.

---

Le 16 janvier 2017.

## EXALG547 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{4x^2-8x+3} \le \frac{2}{4x^2-8x+4}$$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont : [http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/](http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/)**

*Solution.* L'inéquation peut s'écrire:

$$\frac{1}{(2x-3)(2x-1)} \le \frac{2}{(2x-2)^2}.$$

La condition d'existence est $x \notin \{1/2,\, 1,\, 3/2\}$. On observe que le membre de droite est toujours positif dans son domaine d'existence; le membre de gauche est positif en dehors de l'intervalle $[1/2 : 3/2]$ et négatif dans l'intervalle $]1/2 : 3/2[$. On sait donc déjà que les intervalles $]1/2 : 1[$ et $]1 : 3/2[$ sont inclus dans l'ensemble des solutions.

En dehors de l'intervalle $[1/2 : 3/2]$, l'inéquation peut s'écrire

$$4x^2-8x+4 \le 2(4x^2-8x+3),$$

c'est-à-dire $4x^2-8x+2 \ge 0$ ou encore

$$(2x-2-\sqrt{2})(2x-2+\sqrt{2}) \ge 0.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$]-\infty : 1-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup \ ]1/2 : 1[ \ \cup \ ]1 : 3/2[ \ \cup \ [1+\frac{\sqrt{2}}{2} : +\infty[.$$

---

Le 16 janvier 2017.

.

# EXALG548 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$\ln^4\left(x^2+4x+3\right)\geq 16$$

On donne

$$e^{-2}\simeq 0.14$$
$$e^{2}\simeq 7.39$$

---

## Solution proposée par Fabienne Zoetard :

$\ln^4\left(x^2+4x+3\right)\geq 16$

$CE: x^2+4x+3>0 \Rightarrow (x+3)(x+1)>0 \Rightarrow x\in\leftarrow;-3[\cup]-1;\rightarrow$

Factorisons l'expression donnée :

$\left(\ln^2\left(x^2+4x+3\right)+4\right)\left(\ln\left(x^2+4x+3\right)+2\right)\left(\ln\left(x^2+4x+3\right)-2\right)\geq 0$

Le premier facteur ne peut être nul et est toujours positif.

Il faut donc soit $\ln\left(x^2+4x+3\right)\geq 2$, soit $\ln\left(x^2+4x+3\right)\leq -2$

1er cas : $\ln\left(x^2+4x+3\right)\geq 2$

$\Rightarrow x^2+4x+3\geq e^2 \Rightarrow x^2+4x+3-e^2\geq 0$

Cette équation a pour solutions : $-2-\sqrt{1+e^2}\simeq -4.9$ et $-2+\sqrt{1+e^2}\simeq 0.9$

Compte de la $CE$, on en déduit que $x\in\leftarrow;-2-\sqrt{1+e^2}\left.\right]\cup\left[-2+\sqrt{1+e^2};\rightarrow\right.$

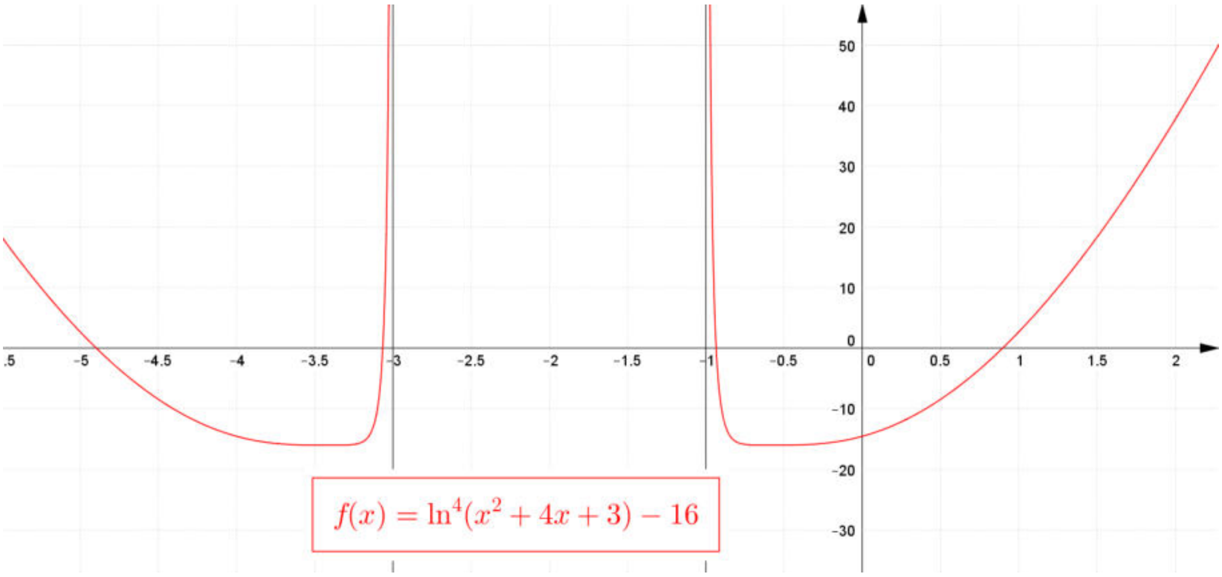
2ème cas : $\ln\left(x^2+4x+3\right)\leq -2 \Rightarrow x^2+4x+3\leq e^{-2} \Rightarrow x^2+4x+3-e^{-2}\leq 0$

Cette équation a pour solutions : $-2-\sqrt{1+e^{-2}}\simeq -3.07$ et $-2+\sqrt{1+e^{-2}}\simeq -0.93$

Compte de la $CE$, on en déduit que $x\in\left[-2-\sqrt{1+e^{-2}};-3\right[\cup\left]-1;-2+\sqrt{1+e^{-2}}\right]$

Conclusion :

$$\boxed{x\in\leftarrow;-2-\sqrt{1+e^2}\left.\right]\cup\left[-2-\sqrt{1+e^{-2}};-3\right[\cup\left]-1;-2+\sqrt{1+e^{-2}}\right]\cup\left[-2+\sqrt{1+e^2};\rightarrow\right.}$$




Le 25 octobre 2016.

# EXALG549 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Résoudre et discuter l'équation suivante $\left(a\in\mathbb{R}^{+}\right)$:

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=a(a-1)$$

---

## Solution proposée par Fabienne Zoetard :

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=a(a-1)\qquad\qquad CE: x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$$

1er cas : $a=0$ ou $a=1$

$$x^2\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)=0$$

Le second facteur est toujours positif et non nul $\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$

2ème cas : $0<a<1$

$$\underset{>0}{x^2}\underbrace{\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)}_{>0}=\underbrace{a(a-1)}_{<0}\Rightarrow \text{Impossible}$$

3ème cas : $a>1$

$$x^2\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=a(a-1)\Rightarrow x^2\left(2x^2+2\right)-a(a-1)\left(x^4-2x^2+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad x^4\left[2-a(a-1)\right]+x^2\left[2+2a(a-1)\right]-a(a-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad x^4\left(-a^2+a+2\right)+2x^2\left(a^2-a+1\right)-a(a-1)=0$$

$$\Rightarrow\quad -x^4(a+1)(a-2)+2x^2\left(a^2-a+1\right)-a(a-1)=0$$

- si $a=2$, l'équation devient : $6x^2=2\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- si $a\neq 2$, l'équation est une équation bicarrée.

$$\Delta'=\left(a^2-a+1\right)^2-(a+1)(a-2)a(a-1)$$

$$=\ldots.=4a^2-4a+1=(2a-1)^2$$

$$\Rightarrow\quad \sqrt{\Delta'}=2a-1\Rightarrow x=\frac{a^2-a+1\pm(2a-1)}{(a+1)(a-2)}$$

$$\Rightarrow\quad (a)\quad x^2=\frac{a^2-a+1-2a+1}{(a+1)(a-2)}=\frac{a^2-3a+2}{(a+1)(a-2)}=\frac{(a-1)(a-2)}{(a+1)(a-2)}=\frac{a-1}{a+1}$$

$$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\quad \text{car } \frac{a-1}{a+1}>0$$

$$\Rightarrow\quad (b)\quad x^2=\frac{a^2-a+1+2a-1}{(a+1)(a-2)}=\frac{a(a+1)}{(a+1)(a-2)}=\frac{a}{a-2}$$

$$\Rightarrow\quad \text{si } a>2: x=\pm\sqrt{\frac{a}{a-1}a}\qquad \text{car } \frac{a}{a-1}>0$$

$$\text{si } 1<a<2,\ \text{pas de solution car } \frac{a}{a-1}<0$$

Conclusion

| | |
|---|---|
| $a = 0$ | $x = 0$ |
| $o < a < 1$ | Pas de solution |
| $a = 1$ | $x = 0$ |
| $1 < a < 2$ | $x = \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}$ |
| $a = 2$ | $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $a > 2$ | $x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}$ |

Le 31 janvier 2017