Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 55

EXALG550 – EXALG559

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2017

EXALG550 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016.

Dans le cadre de l'Euro de football, un ingénieur de l'UMONS conçoit 3 robots (R_1, R_2, R_3) pour remettre e état le terrain après chaque match.

- Si les trois robots fonctionnent ensemble, le travail est réalisé en 5 heures.
- Si les trois robots fonctionnent ensemble pendant 3 heures, le travail peut alors être fini par R_2 en 9 heures.
- Si R_3 travaille toute la nui (pendant 10h) avant de s'arrêter, les robots R_1 et R_2 peuvent finir en tamdem le travail au petit matin en 1 heure.

Combien d'heures seraient nécessaires si chaque robot devait faire le travail seul?

Indication : Considerez $v_1, v_2 v_3$ les vitesse de travail de chacun des 3 robots $\left(\text{en } [\text{m}^2 / h]\right)$ et A la surface totale d'un terraun $\left(\text{en } [\text{m}^2]\right)$.

Solution proposée par Fabienne Zoetard :

$$\begin{cases} 5v_1 + 5v_2 + 5v_3 = A \\ 3v_1 + 3v_2 + 3v_3 + 5v_2 = A \\ 10v_3 + 1v_1 + 1v_2 = A \end{cases}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3 & 12 & 3 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A \\ A \end{pmatrix}$

$$Det\ B = 1(15-60) - 1(15-15) + 10(60-15) = 9 \times 45$$

$$B^{-1} = \frac{1}{9 \times 45} \begin{pmatrix} 47 & -27 & -9 \\ -45 & 45 & 0 \\ -45 & 0 & 45 \end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9 \times 45} \begin{pmatrix} 47 & -45 & -45 \\ -27 & 45 & 0 \\ -9 & 0 & 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9 \times 45} \begin{pmatrix} 27 \\ 18 \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{15} A \\ v_2 = \dfrac{2}{45} A \\ v_3 = \dfrac{4}{45} A \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{Conclusion}} : \begin{cases} \text{15h pour } R_1 \\ \text{22h30' pour } R_2 \\ \text{11h15' pour } R_3 \end{cases}$$

Solution proposée par Robert Moulan

Autre solution (pour ceux que le calcul matriciel rebute)

Il faut noter qu'il n'y a pas 4 inconnues A, v_1, v_2, v_3 , mais 3 : les rapports $\frac{A}{v_1}, \frac{A}{v_2}, \frac{A}{v_3}$ (heures)

Optons pour *x, y, z* au lieu de v_1, v_2, v_3 .

Le système s'écrit : $\begin{cases} A = 5(x+y+z) & (1) \rightarrow x+y+z = \frac{A}{5} \quad (1)' \\ A = 3(x+y+z) + 9y & (2) \rightarrow x+y+z = \frac{A}{3} - 3y \quad (2)' \\ A = 10z + x + y & (3) \rightarrow x+y = A - 10z \quad (3)' \end{cases}$

(2)'– (1)' → $\frac{2A}{15} - 3y = 0$ ou $y = \frac{2A}{45}$ soit $\frac{A}{y} = \frac{45}{2}$ (heure)ou 22 h30′

Eliminons $x + y$ entre (1)' et (3)' : $A - 9z = \frac{A}{5} \rightarrow z = \frac{4A}{45} \rightarrow \frac{A}{z} = \frac{45}{4}$ $(heure)$ ou 11h15′

Enfin (3)' donne :$x = A - y - 10z = \frac{43A}{45} - \frac{40A}{45} = \frac{3A}{45} \rightarrow \frac{A}{x} = 15$ (heure)

Donc le 3e robot est le plus rapide

Le 31 janvier 2017. Modifié le 1 février 2018 (Robert Moulan)

EXALG551 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Déterminer en fonction du paramètre réel a tous les polynômes

$$P(x) = x^3 - ax^2 + a^2x + a$$

tels que le reste de la division de P par $x + a$ vaut le triple de la division de P par $x - a$.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Le reste de la division de P par $x + a$ est $P(-a) = -a^3 - a^3 - a^3 + a = a(1 - 3a^2)$

Le reste de la division de P par $x - a$ est $P(+a) = a^3 - a^3 + a^3 + a = a(1 + a^2)$

La condition est donc que $\quad a(1 - 3a^2) = 3a(1 + a^2)$

$$\Leftrightarrow \; 2a(3a^2 + 1) = 0$$

Si $a = 0$ alors $P(x) = x^3$, $x + a = x - a = x$ et les deux restes sont zéro. La condition est alors vérifiée.

Si $a \neq 0$ alors la condition devient $a^2 = -\frac{1}{3}$, ce qui est impossible dans les réels.

La seule solution est donc $a = 0$ et $P(x) = x^3$.

Le 25 octobre 2016.

EXALG552 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\sqrt{x^2+3x-4}-x>1$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

L'inéquation s'écrit encore comme

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}>x+1$$

CE : $x\in\,]-\infty\,;\,-4]\cup[1\,;\,+\infty[$

Si $x<-1$ alors le membre de droit est négatif tandis que celui de gauche, s'il existe, est positif ; l'inégalité est donc satisfaite. Une 1e partie de la solution est donc $S_1=\,]-\infty\,;\,-4]$.

Si $x>1$ alors les deux membres, s'ils existent, sont positifs et on peut élever l'inéquation au carré en maintenant le sens de l'inégalité :

$$(x+4)(x-1)>(x+1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3x-4>x^2+2x+1 \quad\Rightarrow\quad x>5$$

La 2e partie de la solution est donc $S_2=\,]5\,;\,+\infty[$

Solution complète :

$$S=\,]-\infty\,;\,-4]\,\cup\,]5\,;\,+\infty[$$

Le 25 octobre 2016.

EXALG553 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+my+2z=5 \\ 7x+3y+(m-5)z=7 \end{cases}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Déterminant de la matrice des coefficients

$$\begin{aligned} \det\mathcal{A} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 5 & 0 & m-6 \end{vmatrix} \\ &= 5.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} + (m-6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix} \\ &= 5(6-m)+(m-6)(2m+3) \\ &= 2(m-1)(m-6) \end{aligned}$$

$\det\mathcal{A}=0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{1\,,6\}$

Les cas particuliers

1) $m = 1$

Le système devient

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+y+2z=5 \\ 7x+3y-4z=7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2(\mathrm{E}_1)-3(\mathrm{E}_2): \\ (\mathrm{E}_3): \end{matrix} \begin{cases} 7x+3y-4z=-7 \\ 7x+3y-4z=+7 \end{cases} \quad \text{Absurde !}$$

Le système est ***impossible*** et sa solution est $S=\emptyset$.

2) $m = 6$

Le système devient

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -x+6y+2z=5 \\ 7x+3y+z=7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x+z=4-3y \\ -x+2z=5-6y \\ 7x+z=7-3y \end{cases} \begin{vmatrix} -1 \\ \\ +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +7 \\ \\ -2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x=3 \\ 5z=14-15y \end{cases}$$

Le système est ***simplement indéterminé*** et sa solution est $S=\left\{\left(\frac{3}{5}\,;k\,;\frac{14}{5}-3k\right)\middle|\, k\in\mathbb{R}\right\}$

Le cas général : $m \in \mathbb{R} \;\; \backslash\{1\,;6\}$

Le système est ***déterminé*** et donc Cramerien :

$$\det\mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = 2(m-6)(2m-9)$$

$$\det\mathcal{A}_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = 14(m-6)$$

$$\det\mathcal{A}_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14(m-6)$$

$$S=\left\{\left(\frac{2m-9}{m-1}\,;\frac{7}{m-1}\,;\frac{-7}{m-1}\right)\right\}$$

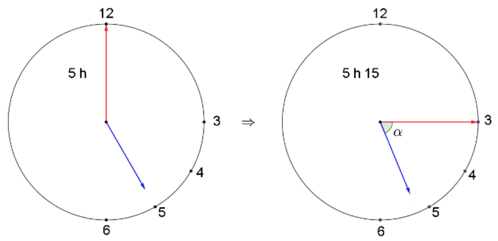
<u>**Remarque :**</u> Cet exercice est identique à EXALG496 à une permutation des inconnues près.

Le 8 septembre 2017

EXALG554 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017.

Il est 5h15. Dans combien de temps l'aiguille des minutes se superposea-t-elle pour la première fois avec celle des heures.

Solution proposée par Fabienne Zoetard :



La petite aiguille parcourt 0.5° par minute et la grande 6° par minute.

A 5h15, l'angle α entre la grande et la petite aiguille sera de

$$\alpha = 60° + 15 \times 0.5° = 67.5°$$

x minutes plus tard, la petite aiguille aura parcouru $0.5x$ et la grande $6x$

Elle se superposeront quand

$$67.5 + 0.5x = 6x \Rightarrow x = \frac{135}{11}\text{ min}$$

Ou encore : 12 min 16 s 36/100

Le 8 septembre 2017

EXALG555 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

1.1 (QCM) On a 4 sacs de perles, des rouges, des vertes, des bleues et des jaunes. Combien de colliers différents de 20 perles peut-on former, sachant qu'un collier se porte indifféremment dans un sens ou dans l'autre?

Réponse : □ $\frac{20!}{16!}$ □ $\frac{20!}{16!2!}$ □ $20!$ □ $\frac{20!}{2}$ □ 4^{20} □ $\frac{4^{20}}{2}$

1.2 (QCM) Que vaut la trace de l'inverse de la matrice suivante?

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Réponse : □ 0 □ 3 □ $\frac{7}{2}$ □ 11 □ $\frac{23}{2}$

1.3 (QCM) Quel polynôme irréductible apparaît dans la factorisation du polynôme?

$$2x^{14} - 512x^6$$

Réponse : □ $x-1$ □ x^2+4 □ x^3-1 □ x^4-4 □ $2x^4-256$

1.4 (COMP) Quelles sont, dans les réels, les conditions d'existence des solutions de l'inéquation suivante :

$$\log_{0.5}\left(x^2 - 5x + 6\right) > 1$$

où $\log_{0.5}$ est le logarithme en base 0.5?

Réponse : □

1.5 (COMP) Sachant que les solutions dans les nombres complexes $(z \in \mathbb{Z})$ de l'équation $iz^2 - z - i = 0$ sont de la forme $a - bi$ et $-a - bi$ (où i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$), donnez les termes $|a|$ et $|b|$.

Réponse : $|a| =$ □ et $|b| =$ □

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

1. Cette question a été annulée car la bonne réponse ne se trouve pas dans les solutions proposée. Nous donnons néanmoins la bonne solution.

   Le collier possède un fermoir (car sens)

   On enfile les perles à partie du fermoi.

   Un enfilage palyndromique est égal à son symétrique

   Un enfilage non palyndromique et son symétrique correspondent au même collier (deux enfilages différents mais même collier)

   · Nombre total d'enfilages : $N_T = 4^{20}$

   · Nombre d'enfilages palyndromiques $= N_P = 4^{10}$

   · Nombre d'enfilages non palyndromiques $= N_N = N_T - N_p = 4^{20} - 4^{10}$

   · Nombre de colliers $= N_P + \dfrac{N_N}{2} = 4^{10} + \dfrac{4^{20} - 4^{10}}{2} = \boxed{\dfrac{4^{20} + 4^{10}}{2}}$

2. Les interrogateurs ont donné la déinition de la trace d'une matrice carré $A = \left(a_{ij}\right)$:

   $\mathrm{Tr}\left(A\right) = \sum_i a_{ii}$. Autrement dit, c'est la somme des éléments de la diagonale principale.

   Soit A la matrice donnée. On a $|A| = -2$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ * & -14 & * \\ * & * & 8 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(A^{-1}\right) = -\dfrac{1}{2}(-1-14+8) = \dfrac{7}{2}$

3. $2x^{14} - 512x^6 = 2x^6\left(x^8 - 256\right) = 2x^6\left(x^4 - 16\right)\left(x^4 + 16\right) = 2x^6\left(x^2 - 4\right)\boxed{\left(x^2 + 4\right)}\left(x^4 + 16\right)$

   Variante :

   Dans la liste proposée, seuls $x-1$ et x^2+4 sont irréductibles. Or $x-1$ ne divise par $2x^{14} - 512x^6$ puisque $P(1) = 2 - 512 = -510 \neq 0$

4. $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x < 2 \text{ ou } x > 3}$

5. $iz^2 - z - i = 0 \Rightarrow \Delta = -3 \Rightarrow z = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2i} = \begin{cases} \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2i}.\dfrac{i}{i} = \dfrac{i+\sqrt{3}}{-2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} \\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i}.\dfrac{i}{i} = \dfrac{i-\sqrt{3}}{-2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \boxed{|a| = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ |b| = \dfrac{1}{2}}$

Variante

Multiplions par i l'équation $iz^2 - z - i = 0 \Rightarrow z^2 + iz - 1 = 0$

Somme des racines : $z_1 + z_2 = -2bi = -1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$

Produit des racines : $z_1.z_2 = -1 = (a - bi)(-a - bi) = -a^2 - b^2 = -a^2 - \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{|a| = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ |b| = \dfrac{1}{2}}$

Le 20 septembre 2017

EXALG556 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

Laurent reçoit de sa grand-tante une valise contenant 100 000 €. Il souhaite placer ce capital en banque pour en retirer un maximum de profit. Il visite deux banques, BIP et EPLFius. BIP lui propose un taux d'intérêt annuel de 0.25% avec des frais de gestion de 10 € après six mois; tandis que EPLFius propose un taux d'intérêt annuel de 0.2% avec des frais de gestion de 7 € après six mois.

(a) Dans quelle banque Laurent doit-il placer son argent pour que celui-ci fructifie au mieux?

(b) Quel montant peut-il retirer tous les six mois en banque en gardant le capital constant?

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Marc Decoux :

	BIP	EPLFius
Taux	0.00250/an	0.002/an
	0.00125 / 6 mois	0.001/6 mois
	$t_1 = \frac{125}{10000} = \frac{1}{800}$	$t_2 = \frac{1}{1000}$
Frais	$f_1 = 10$	$f_2 = 7$

Etablissons une formule donnant le capital C_i en fonction du nombre de demi-année n

n	Capital
1	$C_1 = C + (tC - f) = C(1+t) - f$
2	$C_2 = C_1(tC_1 - f) = \ldots = C(1+t)^2 - (2+t)f$
3	$C_3 = C_2(tC_2 - f) = \ldots = C(1+t)^3 - (3+t)f$
...	...
n	$C_n = C_{n-1}(tC_2 - f) = \ldots = C(1+t)^n - (n+t)f$

$\underline{n=1}$: BIF : $\quad C_1^B = C(1+t_1) - f_1 = 100000 \times \frac{801}{800} - 10 = 100115$ €

EPLFius $\quad C_1^E = C(1+t_2) - f_2 = 100000 \times \frac{1001}{1000} - 7 = 100\,093$ €

BIF rapporte plus que EPLFius après 6 mois.

$\underline{n \geq 2}$: $C_n^B = C(1+t_1)^n - (n+t_1) f_1$ et $C_n^E = C(1+t_2)^n - (n+t_2) f_2$

$$\Rightarrow C_n^B - C_n^E = C\left[(1+t_1)^n - (1+t_2)^n\right] + (n+t_2) f_2 - (n+t_1) f_1$$

$$= C\left[\left(\frac{801}{800}\right)^n - \left(\frac{1001}{1000}\right)^n\right] + \left(n + \frac{1}{1000}\right) \times 7 - \left(n + \frac{1}{800}\right) \times 10$$

$$= \ldots = C\left[\left(\frac{801}{800}\right)^n - \left(\frac{1001}{1000}\right)^n\right] - \left(3n + \frac{11}{2000}\right) = F(n)$$

Etudions le signe de $F(n)$

$\cdot\, F(2) = 44.05$ € > 0 BIF rapporte plus après 2×6 mois

$\cdot\, F$ est strictement croissante car :

$$F'(n) = C\left[\ln\frac{801}{800}.\left(\frac{801}{800}\right)^n - \ln\frac{1001}{1000}.\left(\frac{1001}{1000}\right)^n\right] - 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\ln\frac{801}{800}.\left(\frac{801}{800}\right)^n - \ln\frac{1001}{1000}.\left(\frac{1001}{1000}\right)^n}_{=G(n)} > \frac{3}{100000}$$

$* \, G(n)$ est strictement croissante car

$$G'(n) = \ln^2\frac{801}{800}.\left(\frac{801}{800}\right)^n - \ln^2\frac{1001}{1000}.\left(\frac{1001}{1000}\right)^n$$

$$\frac{801}{800} > \frac{1001}{1000}$$

$$\ln\frac{801}{800} > \ln\frac{1001}{1000}$$

$$\ln^2\frac{801}{800} > \ln^2\frac{1001}{1000}$$

$$\ln^2\frac{801}{800}.\left(\frac{801}{800}\right)^n > \ln^2\frac{1001}{1000}.\left(\frac{1001}{1000}\right)^n$$

$$\Rightarrow G'(n) > 0$$

$$\Rightarrow G(n) > \frac{3}{100000},\ n \geq 2 \Rightarrow F'(n) > 0$$

$\Rightarrow F(n)$ est strictement corissante

$\Rightarrow C_n^B - C_n^E > 0 \Rightarrow C_n^B > C_n^E$

BIF rapporte toujours plus que EPLFius

b) Après 6 mois $(n=1)$ BIF procure une gain de 115 €. Retirer ce gain ramène le capital à 100 000 €.

Remarque

Un taux annuel de 0.25% par an n'est pas égal à un taux de 0.125% pour 6 mois mais bien à $\sqrt{1.0025} - 1 = 0.1242\%$. De même, 0.2% par an correspond à 0.09995% pour 6 mois. Les différences étant tès faibles, nous garderons, 0.125% et 0.1% pour simplifier.

Solution proposée par Jean Callewaert et Nicole Berckmans :

Nous reprenons la même notation que Marc Decoux.

$C_1^B = C(1+t_1) - f_1 = 1.00125C - 10 = 100115$ €

$C_1^E = C(1+t_2) - f_2 = 1.001C - 7 = 100093$ €

<u>Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}_0 : C_n^E < C_n^B$</u>

C'est vrai pour $n = 1$

Si c'est vrai pour $n,$ démontrons que l'inéquation est vérifiée pour $(n+1)$.

On a : $C_{n+1}^B = C_n^B \times 1.00125 - 10 \geq C_n^E \times 1.00125 - 10$ car $C_n^B \geq C_n^E$

Or $C_{n+1}^E = C_n^E \times 1.001 - 7.$

Voyons sous quelle condition on a :

$C_n^E \times 1.00125 - 10 \geq C_n^E \times 1.001 - 7$

$\Rightarrow \quad C_n^E \times 0.00025 \geq 3$

$$\Rightarrow \quad C_n^E \geq \frac{3}{0.00025} = 12000 \text{ €}$$

Ce qui est vrai puisque la mise de départ est de 100000 €

Il reste à prouver que si la mise de départ est de 100000 €, alors pour tout n :

$C_n^E \geq 100000$ €

Reprenons une démonstration par récurrence.

C'est vrai pour $n = 1 : C_1^E = 100093$ € ≥ 100000 €

Si c'est vrai pour $n,$ alors l'inégalité est aussi vraie pour $n+1$

Si $C_n^E \geq 100000$ € alors C_{n+1}^E est aussi plus grand que 100000 €

En effet, $C_{n+1}^E = C_n^E \times 1.001 - 7 \geq 100000 \times 1.001 - 7 = 100093$ €

Solution proposée par Jacques COLLOT

Nous partons de l'équation établie plus haut : $C_n = C(1+t)^n - (n+t)f$

Comme t_1 et t_2 sont très petits, on peut appliquer l'approximation linéaire : $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x$.

Ce qui donne :

$$C_n^B = C(1+nt_1) - (n-t_1)f_1 = (Ct_1 - f_1)n + C - t_1 f_1$$

$$C_n^E = C(1+nt_2) - (n-t_2)f_1 = (Ct_2 - f_2)n + C - t_2 f_2$$

Si on s'intéresse aux intérêts :

$$I_n^B = (Ct_1 - f_1)n - t_1 f_1 \text{ et } I_n^E = (Ct_2 - f_2)n - t_2 f_2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta I = I_n^B - I_n^E = \left[C(t_1 - t_2) - (f_1 - f_2)\right].n - t_1 f_1 + t_2 f_2$$

On remplace pour obtenir :

$$\Delta I = \left[100000 \times \frac{0.125 - 0.1}{100} - (10-7)\right]n - \frac{0.125}{100} \times 10 + \frac{0.1}{100} \times 7$$

$$= 22n - \underbrace{5.5 \times 10^{-3}}_{\text{négligeable}} \simeq 22n > 0$$

Conclusion : BIP est toujours plus intéressant que EPLFius

Le 20 septembre 2017

.

EXALG557 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

Résoudre dans les nombres réels l'inéquation suivante :

$$\left(2\times 5^x-1\right)^2<5^x\times\left(2-25^{\frac{x}{2}}\right)$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

Pas de CE.

Notons que $25^{\frac{x}{2}}=\left(5^2\right)^{\frac{x}{2}}5^x$ et posons $y=5^x$

$\Rightarrow\left(2y-1\right)^2<y\left(2-y\right)\Rightarrow\ldots\Rightarrow 5y^2-6y+1<0$

Les racines de cette équation sont 1 et $\frac{1}{5}$

$\Rightarrow$

y		$\frac{1}{5}$		1	
$5y^2-6y+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow\frac{1}{5}<y<1\Rightarrow 5^{-1}<5^x<5^0\Rightarrow -1<x<0$

Réponse : $\boxed{S=\left]-1,0\right[}$

Le 20 septembre 2017.

EXALG558 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

1.1 (QCM) Quelle est la somme des 99 premiers termes d'une suite arithmétique de raison égale à 8 et dont le premier terme est égal à 123?

Réponse : ☐ 5 445 ☐ 5 567 ☐ 50 985 ☐ 51 500 ☐ 52 015

1.2 (QCM) Que vaut le terme en x^5 du développement de $(2-x)^9$?

Réponse : ☐ -126 ☐ $+126$ ☐ -2016 ☐ $+2016$ ☐ -4032 ☐ $+4032$

1.3 (QCM) Quel est le plus grand commun dénominateur des polynômes

$x^6-7x^4+8x^3-7x+7$ et $3x^5-x^3+3x^2-7$?

Réponse : ☐ $x+1$ ☐ x^3+7x+7 ☐ x^2-2x+1

☐ x^3+1 ☐ $3x^4-3x^3-4x^2+7x-7$ ☐ $3x^5-7x^3+3x^2-7$

1.4 (QCM) Soit l'équation $-z=z^*$ où z^* est le complexe conjugué du nombre complexe z. Alors cette équation admet

☐ des solutions telles que leur partie réelle est strictement positive

☐ deux solutions

☐ une infinité de solutions formant une droite dans le plan complexe.

☐ une infinité de solutions formant un cercle dans le plan complexe.

☐ comme unique solution l'unité imaginaire i (telle que $i^2=-1$)

1.5 (COMP) Quelles sont, dans les réels, les conditions d'existence des solutions de l'équation suivante.

$$\frac{1}{\sqrt[x]{x}}=\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

où $\ln$ est le logarithme népérien (logarithme de base e)

Réponse : ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

1. $S_{99} = \dfrac{(123+(123+98*8)).99}{2} = 50\,985$

2. $(2-x)^9 = \sum_{i=0}^{9} C_9^i 2^{9-i} (-1)^i x^i$. On demande x^5 donc $i=5$

$\Rightarrow C_9^5 2^4 (-1)^5 x^5 = \dfrac{9!2^4}{4!5!} x^5 = -2016x^5$

3. $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7 = (x^3+1)(3x^2-7)$

(x^3+1) divise $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7 = P(x)$ si $P(x) = (x^3+1)Q(x) = 0$ pour $x^3 = -1$

Vérifions $P(x) = 0$ pour $x^3 = -1$

$$P(x) = (x^3)^2 - 7x^3.x + 8x^3 - 7x + 7 = (-1)^2 - 7(-1)x + 8(-1) - 7x + 7 = 0$$

Réponse : $\boxed{x^3+1}$

4. $-z = z^*$ si $z = a+bi$, on $-a-bi = a-bi \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0, b \in \mathbb{R}$

C'est donc l'axe des imaginaires.

Réponse : $\boxed{\text{une droite}}$

5. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = \ln \dfrac{1}{1-x}$ CE: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^{\frac{1}{x}} \neq 0 \Rightarrow x > 0 \\ x > 0 \text{ (base exponentielle)} \Rightarrow 0 < x < 1 \\ 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$

Réponse : $\boxed{x \in \left]\,0,1\,\right[}$

EXALG559 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Cherchez les conditions sur le paramètre réel m pour que les racines réelles x_1 et x_2 de

l'équation $$\frac{mx}{m-1}+\frac{m+1}{x}=x+1$$

Respectent la condition suivante : $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m+1$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

$CE: x \neq 0$

Si $m=1 \Rightarrow S=\varnothing$

Si $m \neq 1$: $mx^2+(m^2-1)=(m-1)x(x+1) \Rightarrow x^2-(m-1)x+(m^2-1)=0 \qquad (1)$

$\Delta>0: (m-1)^2-4(m^2-1)>0 \Rightarrow (m-1)(-3m-5)>0$

m		$-\frac{5}{3}$		1	
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$

$\Rightarrow -\frac{5}{3}<m<1 \qquad (2)$

D'autre part : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2m+1$ ce qui implique que $\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 \neq 0$

Or d'après (1), on sait que $\begin{cases} x_1+x_2=m-1 \\ x_1x_2=m^2-1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1 \qquad (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{m-1}{(m-1)(m+1)}<2m+1 \Rightarrow \frac{1}{m+1}<2m+1$$

On réarrange pour obtenir : $\frac{m(2m+3)}{m+1}>0$

m		$-\frac{3}{2}$		-1		0	
$m(2m+3)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$m+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{m(2m+3)}{m+1}$	$-$	0	$+$	$/$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}<m<-1$ ou $m>0 \qquad (4)$

On met les trois conditions (2), (3) et (4) ensemble

		$-\frac{5}{3}$		$-\frac{3}{2}$		-1		0		1	
(2)	/	/	–	–	–	–	–	–	–	/	/
(3)	–	–	–	–	–	/	–	–	–	–	–
(4)	/	/	/	/	–	/	/	/	–	–	–
Conclusion	/	/	/	/	–	/	/	/	–	/	/

Réponse : $\boxed{m \in \left]-\frac{3}{2},-1\right[\cup \left]0,1\right[}$

Le 20 septembre 2017