Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 56

EXALG560 – EXALG569

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXALG560 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Huit vaches occupent une prairie de quatre cents mètres carrés. En sept semaines, elles ont consommé l'entiereté de l'herbe qui s'y trouve ainsi que celle qui a eu le temps de repousser. Dans les mêmes circonstances, neuf vaches auraient eu suffisamment d'herbe à manger pendant huit semaines dans une prairie de cinq cents mètres carrés.
En posant que h représente la quantité initiale d'herbe au mètre carré et que r représente la quantité d'herbe qui a repoussé par mètre carré durant une semaine, combien de vaches peut-on nourrir pendant douze semaines dans une prairie de six cents mètres carrés? (Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

	Vaches	Aire	Durée	Volume mangé
(1)	8	400	7	$400h+6\times 400r$
(2)	9	500	8	$500h+7\times 400r$
(3)	n	600	12	$600h+11\times 600r$

$n=?$

h et r étant (à prioir) différents, ni h ni r ne représente la quantité consommée par une vache en une semaine.

$q=$ quantité mangée par une vache en une semaine.

	Vaches	Aire	Durée	Volume mangé
(1')	8	400	7	$q\times 8\times 7$
(2')	9	500	8	$q\times 9\times 8$
(3')	n	600	12	$q\times n\times 12$

$$\Rightarrow\begin{cases}(1)=(1') & 56q=400h+2400r\\(2)=(2') & 72q=500h+3500r\\(3)=(3') & 12qn=600h+6600r\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7q=50h+300r & E_1\\18q=125h+875r & E_2\\nq=50h+550r & E_3\end{cases}$$

De E_1 et E_2, on tire $\begin{cases}h=\dfrac{29}{250}q\\r=\dfrac{1}{250}q\end{cases}\Rightarrow E_3: nq=\dfrac{50\times 29}{250}q+\dfrac{550}{250}q\Rightarrow n=\dfrac{29}{5}+\dfrac{11}{5}=8$

Réponse : $\boxed{\text{8 vaches}}$

Le 20 septembre 2017

EXALG561 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

1.1 (QCM) Vingt thèmes sont au programme d'un examen oral. Si l'étudiant tire au sort deux de ces thèmes et traite au choix, l'un de ceux-ci, combien de thèmes au minimum doit-il avoir révisé pour avoir au moins neuf chances sur dix de pouvoir traiter un thème qu'il a révisé?

Réponse : ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 12 ☐ 14

1.2 (QCM) Calculer le déterminant de la matrice $A = BC$ où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse : ☐ 0 ☐ 1 ☐ 5 ☐ 11 ☐ Une autre valeur

1.3 (QCM) Soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$ où i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$.

Quelle doit être la condition portant qur l'entier naturel n tel que z^n est un nombre strictement positif?

Réponse :

☐ n est pair

☐ n est impair

☐ n est un multiple de 3

☐ n est un multiple pair de 3

☐ n est un multiple impair de 3

☐ z^n n'est jamais réel et ce quel que soit n

1.4 (COMP) Donnez, dans les réels, les solutions de l'inéquation suivante.

$$\ln\left(\frac{1-x}{x-3}\right) \leq 0$$

où ln est le logarithme népérien (logarithme en base e).

Réponse : ☐

1.5 (COMP) Donnez, dans les réels, les solutions de l'équation suivante :

$$2|x-6| - |5-x| = 6$$

Réponse : ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

1. Si r est le nombre de thèmes étudiés :

Nombre de cas possible : C_{20}^2 Choisir 2 thèmes parmi les 20 proposés.

Nombre de cas favorable : $\underbrace{C_r^2}_{\text{Il connaît les deux thèmes}} + \underbrace{C_r^1 . C_{20-r}^1}_{\text{Il ne connaît qu'un thème}}$

Il faut : $\dfrac{C_r^2 + C_r^1 C_{20-r}^1}{C_{20}^2} \geq \dfrac{9}{10}$ or $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$\Rightarrow ..... \Rightarrow r^2 - 39r + 342 \leq 0$

$$\Delta = 153 = 9 \times 17 \Rightarrow r = \frac{39 \pm 3\sqrt{17}}{2} = \begin{cases} r \simeq 25.2 \\ r \simeq 13.5 \end{cases}$$

Réponse : $\boxed{r \text{ minimum vaut } 14}$

2. 1er méthode : $BC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{\det(BC) = 0}$

2ème méthode : $\text{rang}(B) \leq 2, \quad \text{rang}(C) \leq 2$

$\text{rang}(BC) \leq \min(\text{rang}(B), \text{rang}(C))$

$\text{rang}(BC) \leq 2 \Rightarrow \det(BC) = 0$

3. $z = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right); \quad z^n = 2^n\,\text{cis}\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$

Conditions : $\begin{cases} \sin\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n\dfrac{\pi}{3} = 2k\pi \Rightarrow \boxed{n = 2 \times 3k}$

4. $\ln\left(\dfrac{1-x}{x-3}\right) \leq 0 \Rightarrow$ conditions : $\begin{cases} \dfrac{1-x}{x-3} > 0 & (1) \\ \dfrac{1-x}{x-3} \leq 1 & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow$

x		1		3	
$1-x$	+	0	–	–	–
$x-3$	–	–	–	0	+
$(1-x)/(x-3)$	–	0	+	/	–

$\Rightarrow x \in \left]1,3\right[$

$(2) \Rightarrow 1 - x \geq x - 3 \Rightarrow x \leq 2$

Réponse : $\boxed{S = \left]1,2\right]}$

5. $2|x-6| - |5-x| = 6 \quad (1)$

(a) Si $x \leq 5$ alors $(1) \Rightarrow 2(6-x) - (5-x) = 6$ donc $x = 1$

(b) Si $5 \leq x \leq 6$ alors $(1) \Rightarrow 2(6-x) - (x-5) = 6 \Rightarrow x = 3$ à rejeter

(c) Si $6 \leq x$ alors $(1) \Rightarrow 2(x-6) - (x-5) = 6$ donc $x = 13$

Réponse : $\boxed{S = \{1,13\}}$

EXALG562 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Bruno possède une citerne d'eau de pluie qu'il souhaite vider en vue de la nettoyer. Il ne dispose pour cela que d'une corde et d'un seau.
En bonne condition physique, Bruno est capable de descendre son seau à la vitesse de 2 m/s et de le remonter à une vitesse de 0.5 m/s. Lors de la première descente, il lui faut 0.9 s pour que son seau touche la surface de l'eau et ensuite 1 s pour qu'il soit juste immergé, et donc rempli. Lors de la première remontée, il lui faut 4 s pour resssortir son seau et 1 s pour le vider. Chaque seau sorti, le niveau de la citerne descend de 4 cm.
Sachant qu'il faut à Bruno 9 minutes et 51 secondes pour atteindre un niveau qui lui permettra de nettoyer sa cuve, combien de fois a-t-il dû plonger son seau dans le puits?
Hypothèse : on suppose que le temps nécessaire du seau pour être immergé et donc rempli, une fois en contact avec l'eau, et le temps nécessaire pour le vider restent constants.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Note : Pour cette question, la machine à calculer est autorisée.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

· La première fois, le temps nécessaire pour descendre et remonter le seau vaut $0.9+1+4+1=6.9$ s

· A chaque fois, il y a 4 cm de plus à parcourir à 2 m/s à la descente soit un temps supplémentaire de $\dfrac{0.04}{2}=0.02$ s, et, pour la remontée un temps supplémentaire de $\dfrac{0.04}{0.5}=0.08$ s. Par conséquent, la descente et la remontée demande $0.02+0.08=0.1$ s de plus.

· Les temps sont donc en progression arithmétique avec $t_1=6.9$ s et $r=0.1$ s.

· Or $\sum_1^n t_i = t_1+t_2+...+t_n = 9 \text{ min } 51 \text{ s} = 591 \text{ s}$

$$\Rightarrow S=\frac{n}{2}(t_1+t_n)=\frac{n}{2}\left[t_1+t_1+(n-1)r\right]\Rightarrow 591=\frac{n}{2}\left[6.9+6.9+(n-1)\frac{1}{10}\right]$$

$$\Rightarrow 1182=n\left(13.8+\frac{n}{10}-\frac{1}{10}\right)\Rightarrow n^2+137n-11820=0\Rightarrow n=60$$

Réponse : Il plonge 60 fois le seau dans le puits.

Le 20 septembre 2017

EXALG563 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Trouvez tous les polynômes à coefficients réels $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$.
(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Nicole Berckmans et Marc Decoux :

Si le degré de $P(x)$ vaut n alors le degré de $P(x^2)$ vaut $2n$ et le degré de $(x^2+1)P(x)$ vaut $n+2$. Dès lors, $2n = n+2 \Rightarrow n = 2$.

Posons : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

$P(x^2) = (x^2+1)P(x)$ devient $ax^4 + bx^2 + c = (x^2+1)(ax^2+bx+c)$

Identifions les coefficients :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coef } x^4 : & a = a \\ \text{Coef } x^3 : & 0 = b \\ \text{Coef } x^2 : & b = a + c \\ \text{Coef } x^1 : & 0 = b \\ \text{Coef } x^0 : & c = c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -a \end{cases} \Rightarrow P(x) = a(x^2-1)$$

Le 20 septembre 2017. Modifié le 21 octobre 2018 (Jan Frans Broeckx)

EXALG564 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2017.

Calculer la valeur de l'expression

$$E = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha$$

Suggestion. On peut voir dans l'expression à évaluer la partie imaginaire d'une autre expression facile à calculer.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/

Solution. L'expression réelle E est la partie imaginaire de l'expression complexe

$$C = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{cis} k\alpha\,.$$

(Ajouter la valeur 0 pour l'indice de sommation n'a pas d'importance puisque $\sin 0 = 0$.)
La formule de Moivre permet d'écrire

$$C = \sum_{k=0}^{n} (\operatorname{cis} \alpha)^k\,.$$

Les termes de cette somme forment une suite géométrique; on utilise donc la formule

$$\sum_{k=0}^{n} Z^k = \frac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z}\,,$$

valable pour tout entier naturel n et tout complexe $Z \neq 1$.
On obtient ainsi, si α n'est pas un multiple de 2π,[8]

$$C = \frac{1 - (\operatorname{cis}\alpha)^{n+1}}{1 - \operatorname{cis}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cis}(n+1)\alpha}{1 - \operatorname{cis}\alpha} = \frac{1 - \cos(n+1)\alpha - i\sin(n+1)\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}\,.$$

On applique alors la formule

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd) + i(-ad+bc)}{c^2+d^2}\,,$$

avec $a = 1 - \cos(n+1)\alpha$, $b = -\sin(n+1)\alpha$, $c = 1 - \cos\alpha$ et $d = -\sin\alpha$.
On a $c^2 + d^2 = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha$, d'où

$$E = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = \frac{(1 - \cos(n+1)\alpha)\sin\alpha - (1 - \cos\alpha)\sin(n+1)\alpha}{2 - 2\cos\alpha}\,.$$

Remarque. Quelques manipulations supplémentaires permettraient d'obtenir la forme plus élégante

$$E = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Commentaire. Trop de candidats ont oublié la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique; cette formule est pourtant une conséquence immédiate de l'égalité polynomiale évidente

$$Z^{n+1} - 1 \;=\; (Z-1)\sum_{k=0}^{n} Z^k\,.$$

[8] Si α est un multiple de 2π, on a $\sin k\alpha = 0$ et $E = 0$.

Le 20 septembre 2017

EXALG565 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2017.

Déterminer l'ensemble des valeurs (réelles) de a pour lesquelles l'énoncé

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ si } x \geq a \text{ alors } x^2 - ax + 2 - a \geq 0}$$

est vrai.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont : **http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/**

Solution. Le graphe de la fonction polynomiale $P(x) = x^2 - ax + 2 - a$ est une parabole à concavité tournée vers le haut. La fonction atteint sa valeur minimale sur l'ensemble des réels en $x = a/2$, conformément à la théorie des polynômes du second degré.[9] Cette valeur est $2 - a - a^2/4$.

Si on se restreint au domaine $\{x : x \geq a\}$, on doit distinguer deux cas.

1. Si $a \leq 0$, alors $a/2$ appartient au domaine; l'énoncé est donc vrai si $2 - a - a^2/4 \geq 0$ et faux sinon. Le polynôme $Q(a) = 2 - a - a^2/4$ admet une racine positive (sans intérêt) et une racine négative qui est $-2(1+\sqrt{3})$. On en déduit que l'ensemble des valeurs négatives de a pour lesquelles l'énoncé est vrai est l'intervalle $[-2(1+\sqrt{3}) : 0]$.[10]

2. Si $a > 0$, alors $a/2$ n'appartient pas au domaine $\{x : x \geq a\}$; la fonction $P(x)$ est alors croissante sur ce domaine et atteint son minimum au point $x = a$; ce minimum vaut $2 - a$. On en déduit que l'ensemble des valeurs strictement positives de a pour lesquelles l'énoncé est vrai est l'intervalle $]0 : 2]$.

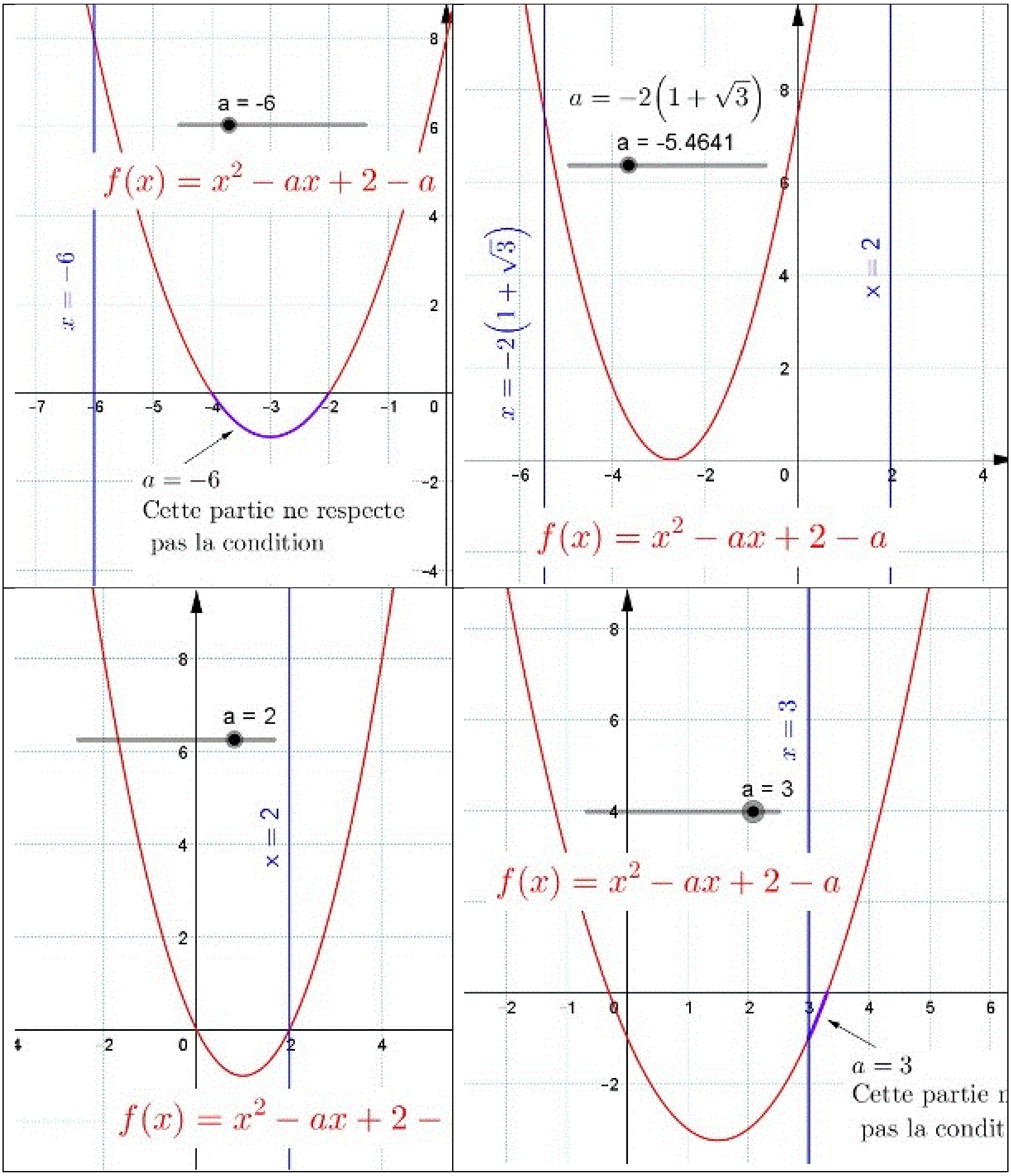
Au final, l'ensemble demandé est donc l'intervalle $[-2(1+\sqrt{3}) : 2]$.

Commentaire. Trop de candidats ont mal lu la question, par exemple en omettant de tenir compte de la condition "si $x \geq a$" de l'encadré.

---

[9] Cette théorie dit notamment que la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint son extremum en $x = -b/2a$; cet extremum est un maximum si $a < 0$ et un minimum si $a > 0$.

[10] On utilise à nouveau la théorie des polynômes du second degré: si a et c sont de signes contraires, la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet une racine négative et une racine positive; $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur des racines.



Le 20 septembre 2017. Modifié le 01 septembre 2020

EXALG566 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2017.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel:

$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ (a-1)x + (a+3)y + (a+1)z = a-1 \\ (a+2)x - y + (2a+2)z = 4 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/

Solution. Le déterminant du système est:

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a-1 & a+3 & a+1 \\ a+2 & -1 & 2a+2 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 3(a+1) & a+1 & a+2 \\ 3(a+1) & a+3 & a+1 \\ 3(a+1) & -1 & 2a+2 \end{vmatrix} = 3(a+1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+3 & a+1 \\ 1 & -1 & 2a+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(L_2,L_3)\leftarrow(L_2-L_1,L_3-L_1)}{=} 3(a+1)\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -a-2 & a \end{vmatrix} = 3(a+1)(2a-a-2) = 3(a+1)(a-2)\,.$$

Les racines du déterminant sont -1 et 2. On va donc distinguer trois cas: $a=-1$, $a=2$ et $a \notin \{-1,2\}$.

Dans le *premier* cas ($a=-1$), le système se réduit à

$$-x+z=-1\,,\ -2x+2y=-2\,,\ x-y=4\,.$$

et on voit que L_2+2L_3 donne $0=6$; le système proposé est impossible (c'est-à-dire qu'il n'admet aucune solution) quand $a=-1$.

Dans le *deuxième* cas ($a=2$), le système se réduit à

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=2\,, \\ x+5y+3z=1\,, \\ 4x-y+6z=4\,. \end{cases}$$

De L_3 on tire $y=4x+6z-4$, valeur que l'on reporte dans L_1 et L_2, ce qui donne respectivement $14x+22z=14$ et $21x+33z=21$; ces équations se réduisent toutes deux à $7x+11z=7$; le système proposé est indéterminé (c'est-à-dire que l'ensemble des solutions est infini) quand $a=2$. On pose $x=\lambda$, réel quelconque; on déduit immédiatement $z=(7-7\lambda)/11=-7(\lambda-1)/11$ puis $y=4\lambda-4+6(7-7\lambda)/11=(\lambda-1)[4-42/11]=2(\lambda-1)/11$. L'ensemble des solutions (x,y,z) quand $a=2$ est donc

$$\left\{\left(\lambda,\ \frac{2(\lambda-1)}{11},\ \frac{-7(\lambda-1)}{11}\right) : \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Dans le *troisième* cas ($a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$), le déterminant est non nul et le système admet une solution unique, donnée par les formules de Cramer. Après simplification, on obtient

$$x=\frac{6a+8}{3(a+1)}\,,\ y=\frac{2}{3(a+1)}\,,\ z=-\frac{3a+1}{3(a+1)}\,.$$

Le 20 septembre 2017

EXALG567 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2017.

Décomposer dans $\mathbb{C}$ le polynôme z^4+1 en un produit du type

$$\left(z^2+b_1z+c_1\right)\left(z^2+b_2z+c_2\right)$$

Si plusieurs possibilités existent, on les donnera toutes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/

Solution. De $-1 = \operatorname{cis}\pi$, on déduit la décomposition unique (à l'ordre des facteurs près) en facteurs du premier degré (dont le coefficient de z est 1):

$$z^4+1 \;=\; (z-\operatorname{cis}\frac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\frac{-3\pi}{4})\,.$$

Les décompositions demandées s'obtiennent en groupant deux à deux les facteurs du premier degré. Si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs, cela peut se faire de trois manières différentes. On a donc $z^4+1 = P_1(z)P_2(z) = Q_1(z)Q_2(z) = R_1(z)R_2(z)$ avec

$$\begin{aligned}
P_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4}) \;=\; z^2-\sqrt{2}z+1\,,\\
P_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) \;=\; z^2+\sqrt{2}z+1\,,\\
Q_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4}) \;=\; z^2-\sqrt{2}iz-1\,,\\
Q_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) \;=\; z^2+\sqrt{2}iz-1\,,\\
R_1(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{-3\pi}{4}) \;=\; z^2-i\,,\\
R_2(z) &= (z-\operatorname{cis}\tfrac{-\pi}{4})(z-\operatorname{cis}\tfrac{3\pi}{4}) \;=\; z^2+i\,.
\end{aligned}$$

Si on tient compte de l'ordre des facteurs, il y a six décompositions possibles.

Le 20 septembre 2017

EXALG568 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

Considérons le polynôme à coefficients réels :

$$Q(x) = x^3 - 13x + \mu$$

Sachant que l'une des racines Q est le tiers d'une autre, déterminer toutes les valeurs possibles de Q. En déduire la (ou les) valeur(s) correspondantes de μ.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Soient x_1, x_2 et x_3 les trois racines de Q. Alors :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x^3 - \underbrace{(x_1+x_2+x_3)}_{=0}x^2 + \underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{=-13}x - \underbrace{x_1x_2x_3}_{=-\mu} \end{aligned}$$

Ainsi, si $x_1 = a$, alors $x_2 = 3a$ (selon l'énoncé) et $x_3 = -4a$ (pour que le coefficient de x^2 s'annule). On a alors du coefficient de x :

$$3a^2 - 4a^2 - 12a^2 = -13 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1$$

Les racines sont donc

$$\{x_1 = +1, x_2 = +3, x_3 = -4\} \text{ avec } \mu = +12 \text{ ou } \{x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = +4\} \text{ avec } \mu = -12.$$

Le 8 octobre 2017

EXALG569 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} 2x + my + z = 3m \\ x - (2m+1)y + 2z = 4 \\ 5x - y + 4z = 3m - 2 \end{cases}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Déterminant de la matrice des coefficients :

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -2m-1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{puisque} \quad (\text{ligne } 2) = -2(\text{ligne } 1) + (\text{ligne } 3)$$

Le système est donc **impossible** avec $\boldsymbol{S = \emptyset}$**,** sauf si les termes indépendants vérifient la même relation, donc si :

$$4 = -2(3m) + (3m - 2) \quad \Leftrightarrow \quad m = -2$$

Si $\boldsymbol{m = -2}$, alors le système est **simplement indéterminé**, et des deux premières équations on trouve, en posant $z = k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -6 - k \\ x + 3y = 4 - 2k \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 8x = -7k - 10 \\ 8y = -3k + 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad S = \left\{ \left(-\tfrac{1}{8}(7k + 10), \tfrac{1}{8}(14 - 3k), k \right) \middle| \, k \in \mathbb{R} \right\}$$

Le 8 octobre 2017