Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 57

EXALG570 – EXALG579

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2017

EXALG570 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx :

Il s'agit d'une équation bicarrée. On y pose donc :

$$z^2 = t \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{t}$$

(1) Résolution de l'équation du second degré en t :

$$t^2 - (5 - 14i)t - (24 + 10i) = 0$$

Discriminant :

$$\Delta = (5 - 14i)^2 + 4(24 + 10i) = -75 - 100i$$

Racines carrées du discriminant :

$$\sqrt{\Delta} = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 &= -75 \\ 2xy &= -100 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 &= 5625 \\ 4x^2y^2 &= 10000 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2)^2 = 15625$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= 125 \\ x^2 - y^2 &= -75 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= 25 \\ y^2 &= 100 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= \pm 5 \\ y &= \pm 10 \end{cases} \text{ avec signes opposés}$$

$$\sqrt{\Delta} = \pm(5 - 10i)$$

Solutions de l'équation en t :

$$t_1 = \tfrac{1}{2}(5 - 14i + 5 - 10i) = 5 - 12i$$
$$t_2 = \tfrac{1}{2}(5 - 14i - 5 + 10i) = -2i$$

(2) Racines carrées de t_1 :

$$\sqrt{t_1} = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 &= 5 \\ 2xy &= -12 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 &= 25 \\ 4x^2y^2 &= 144 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad (x^2 + y^2)^2 = 169$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 &= 13 \\ x^2 - y^2 &= 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= 9 \\ y^2 &= 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= \pm 3 \\ y &= \pm 2 \end{cases} \text{ avec signes opposés}$$

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} = \pm(3 - 2i)$$

(3) Racines carrées de t_2 : $z_{3,4} = \pm\sqrt{t_2} = \pm\sqrt{-2i} = \pm(1 - i)$

(4) L'ensemble des solutions de l'équation bicarrée en z est donc :

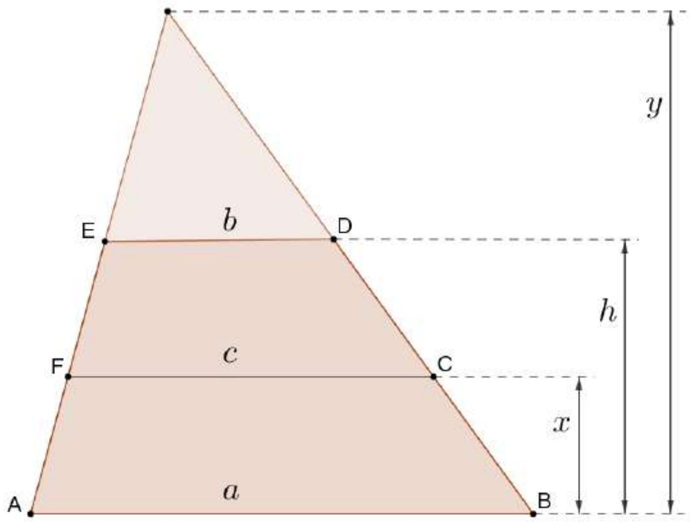
$$\boldsymbol{S = \{3 - 2i\,, 2i - 3\,, 1 - i\,, i - 1\}}$$

Le 10 octobre 2017

EXALG571 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Un trapèze convexe a pour bases a et $b(a > b)$ et pour hauteur h.
A quelle distance x de la base a faut-il mener une parallèle aux bases pour partager le trapèze en deux parties de même aire.

Solution proposée par Fabienne Zoetard :



Il faut déterminer x tel que l'aire de $ABDE$ soit égale à deux fois l'aire de $ABCF$. Il faut donc exprimer c en fonction de x.

On a : $\dfrac{a}{y}=\dfrac{c}{y-x}=\dfrac{b}{y-h}\Rightarrow\begin{cases} c=\dfrac{a(y-x)}{y}=a\left(1-\dfrac{x}{y}\right) \\ a(y-h)=by\Rightarrow y=\dfrac{ah}{a-b}\end{cases}\Rightarrow c=a\left(1-\dfrac{x(a-b)}{ah}\right)$

On doit avoir : $\mathscr{A}_{ABDE}=\mathscr{A}_{ABCF}\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}h=2\dfrac{1}{2}\left(a+a-\dfrac{x(a-b)}{h}\right)x$

$\Rightarrow 2\dfrac{a-b}{h}x^2-4ax+(a+b)h=0 \qquad (1)$

Equation du second degré dont : $\Delta=16a^2-4\times 2\dfrac{a-b}{h}(a+b)h=...=8(a^2+b^2)$

$\Rightarrow x=\dfrac{4a\pm 2\sqrt{2(a^2+b^2)}}{4(a-b)}.h.$

Notons que $a^2+b^2<2a^2$ donc $4a-2\sqrt{2(a^2+b^2)}>4a-2\sqrt{2\times 2a^2}>4a-4a=0$

Les deux solutions de l'équation (1) sont donc positives. Or il faut que $0<x<h$

c'est-à-dire $0<\dfrac{2a+\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}<1$ ou $0<\dfrac{2a-\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}<1$

Pour choisir entre les deux solutions prenons un exemple :

$a=5;b=3;h=2$

- $x=\dfrac{2a+\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h=\dfrac{10+\sqrt{68}}{2}>2$ à rejeter
- $x=\dfrac{2a-\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h=\dfrac{10-\sqrt{68}}{2}\simeq 0.877$

$\Rightarrow c=a\left(1-\dfrac{x(a-b)}{ah}\right)=5\left(1-\dfrac{0.877\times 2}{10}\right)\simeq 4.123$

On vérifie : $\mathscr{A}_{ABDE}=\dfrac{8}{2}\times 2=8$ et $\mathscr{A}_{ABCF}=\dfrac{9.123}{2}\times 0.877\simeq 4$

EXALG572 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Résoudre l'inéquation suivante pur $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} \geq 6$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard :

$$\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} \geq 6 \qquad \text{CE:}(x+1)(x+3) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} - 6 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3+32x+18-6\left(x^2+4x+3\right)}{x^2+4x+3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-6x^2+8x}{x^2+4x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{x\left(x^2-6x+8\right)}{x^2+4x+3} \geq 0$$

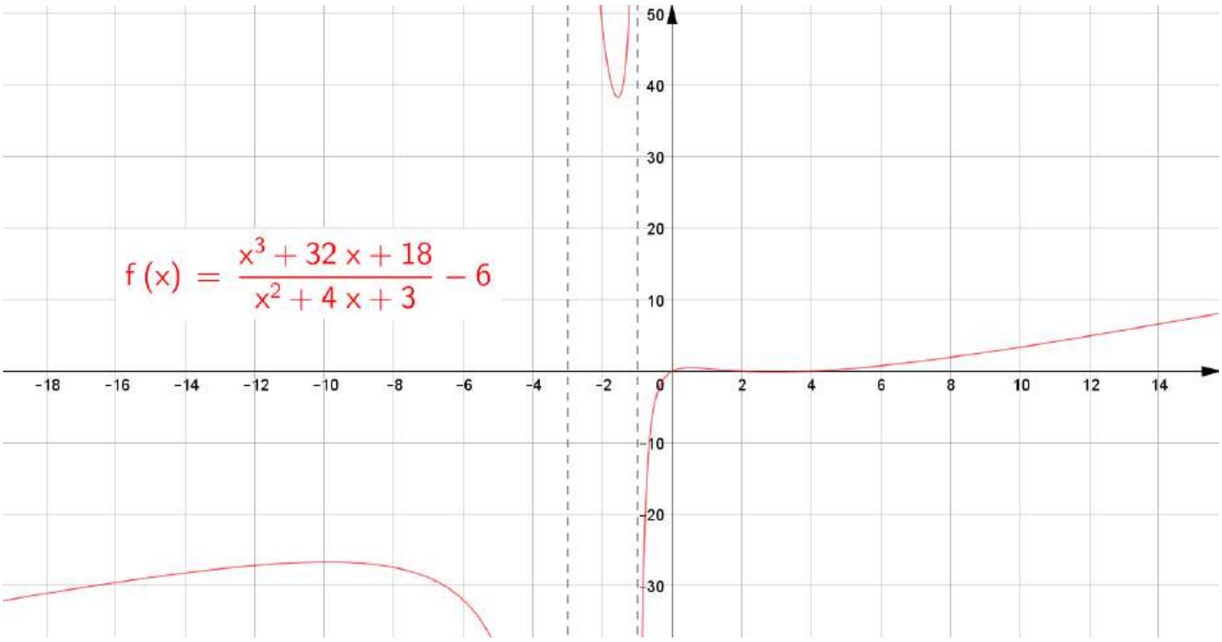
Les zéros sont : $\begin{cases} \boxed{N} : x=0, x=2, x=4 \\ \boxed{D} : x=-1, x=-3 \end{cases}$

Ce qui donne le tableau de signe suivant :

x		-3		-1		0		2		4	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-6x+8	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+4x+3	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x\left(x^2-6x+8\right)}{x^2+4x+3}$	$-$	$//$	$+$	$//$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \boxed{S : \left]-3,-1\right[\cup \left[0,2\right] \cup \left[4,+\infty\right[}$$

Note : si on représente la fonction : $f = \frac{x\left(x^2-6x+8\right)}{x^2+4x+3}$, il faut choisir convenablement la fenêtre d'affichage pour voir le minimum positif dans l'intervalle $\left[-3,-1\right]$



Le 20 octobre 2017

EXALG573 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2013.

Résoudre :

$$\sqrt{x^2+6x+8} < \sqrt{x^2+6x+11}-1$$

CE : 1) $x^2+6x+8 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ ou $x \geq -2$

2) $x^2+6x+11 \geq 0$ Toujours vérifié

3) $\sqrt{x^2+6x+11}-1>0 \Rightarrow x^2+6x+10>0$ Toujours vérifié

$\Rightarrow x \in \left]\leftarrow;-4\right] \cup \left[-2,\rightarrow\right[$

On élève l'équation au carré, les membres de l'inéquation sont positifs:

$$x^2+6x+8 < x^2+6x+11-2\sqrt{x^2+6x+11}+1$$

$$\Rightarrow \quad 2 > \sqrt{x^2+6x+11}$$

Les 2 membres sont positifs ce qui n'engendre pas de conditions supplémentaires.

On élève l'équation au carré :

$$4 > x^2+6x+11 \Rightarrow x^2+6x+7<0 \Rightarrow x \in \left]-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right[$$

Compte tenu des CE, on conclut

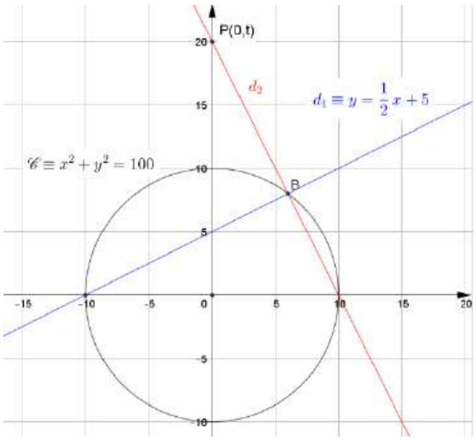
$$\boxed{x \in \left]-3-\sqrt{2};-4\right] \cup \left[-2,-3+\sqrt{2}\right[}$$

Le 7 novembre 2017

EXALG574 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2013.

La droite d_1 d'équation $x-2y+10=0$ rencontre le cercle d'équation $x^2+y^2=100$ au point B dans le premier quadrant. Une droite passant par B, perpendiculaire à la droite d_1 coupe l'axe des y au point P de coordonnées $(0,t)$. Déterminer la valeur de t.

Solution proposée par Fabienne Zoetard.



$$B=\mathscr{C}\cap d \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\dfrac{1}{2}x+5 \end{cases} \Rightarrow x^2+\frac{1}{4}x^2+25+5x=100 \Rightarrow x^2+4x-60=0$$

Cette équation a pour solution $x=6$ et $x=-10$. On garde $x=6$, car on est dans le premier quadrant. Il en résulte : $B(6,8)$

La droite d_2 a pour pente -2 et pour équation $d_2 \equiv y-8=-2(x-6) \Rightarrow y-2x+20$

L'ordonnée a l'origine de d_2 est $20 \Rightarrow P(0,20)$ et donc $t=20$

Le 8 novembre 2017

EXALG575 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$

$$|x+1|+|x-2|<3$$

On se débarrasse des valeurs absolues en considérant les cas suivants :

1) $\underline{x<-1}$. L'équation devient : $-x-4-x+2<3 \Rightarrow x>-1$ ce qui est incompatible avec la condition.

2) $\underline{x=-1}$. $\Rightarrow 3<3$: impossible.

3) $\underline{-1<x<2}$. $\Rightarrow x+1-x+2<3 \Rightarrow 3>3$: impossible.

4) $\underline{x=2}$. $\Rightarrow 3<3$: impossible.

5) $\underline{x>2}$. $\Rightarrow x+1+x-2<3 \Rightarrow x<2$: ce qui est incompatible avec la condition.

<u>Conclusion</u> : l'inéquation n'a pas de solution.

Le 7 septembre 2018

EXALG576 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

a) A quelles conditions sur les paramètres réels a, b et c le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

b) A quelle condition sur les paramètres réels p et q le polynôme $X^3 + pX + q$ admet-il une racine double? Cette racine est-elle toujours réelle?

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution, partie a. Si $X^4+aX^2+bX+c = (X^2+X+1)Q(X)$, le fait que les coefficients des termes de degrés respectifs 4, 3 et 0 soient 1, 0 et c impose que le polynôme du second degré $Q(x)$ soit $X^2 - X + c$.

Le produit vaut alors $X^4 + cX^2 + (c-1)X + c$, ce qui impose les conditions $a = c$ et $b = c - 1$.

Variante. En divisant formellement X^4+aX^2+bX+c par X^2+X+1, on obtient le quotient X^2-X+a et le reste $(b+1-a)X + (c-a)$. Le reste devant être nul, on a les conditions $b+1 = a$ et $c = a$, équivalentes aux précédentes.

Solution, partie b. L'absence de terme du second degré indique que la somme des trois racines du polynôme est nulle donc, si a est racine double, le polynôme admet aussi une racine simple qui doit être $-2a$ et on a

$$X^3 + pX + q = (X-a)^2(X+2a) = X^3 - 3a^2X + 2a^3\,,$$

d'où on tire $p = -3a^2$ et $q = 2a^3$, ou encore $p^3 = -27a^6$ et $q^2 = 4a^6$. La condition demandée est donc $4p^3 + 27q^2 = 0$. La racine simple $-2a$ et la racine double a sont réelles: on a $a = -3q/2p$.
Cas particulier. Si $p = 0$, on a aussi $q = 0$; le polynôme admet alors la racine triple nulle.
Remarque. Le développement ci-dessus a montré que l'égalité $4p^3 + 27q^2 = 0$ était une condition *nécessaire* à l'existence d'une racine double (ou triple) pour le polynôme proposé mais cette condition est aussi *suffisante*. Le produit $(X+3q/2p)(X+3q/2p)(X-3q/p)$ est le polynôme $X^3-27q^2X/4p^2-27q^3/4p^3$ qui, si l'on tient compte de l'égalité $4p^3 = -27q^2$, se réduit au polynôme proposé. On peut aussi, si x_1, x_2, x_3 sont les racines du polynôme, se servir des égalités $0 = x_1+x_2+x_3$, $p = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ et $q = -x_1x_2x_3$ pour obtenir l'égalité $4p^3+27q^2 = -(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$, qui rend évident le fait que la condition est nécessaire et suffisante.

Le 7 septembre 2018

EXALG577 - FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Résoudre le système suivant, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + az = a \\ ax + a^2 y + a^3 z = a^3 \end{cases}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. La troisième équation se réduit à $0 = 0$ si $a = 0$ ce qui nous incite à traiter d'abord ce cas particulier, pour lequel les deux premières équations se réduisent à $x = 1$ et $x = 0$ respectivement. Le système est donc impossible dans ce cas.

Dans les autres cas ($a \neq 0$), le système se réduit à

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1\,, \\ x + ay + az = a\,, \\ x + ay + a^2 z = a^2\,. \end{cases}$$

Le déterminant du système s'annule toujours puique ses première et troisième lignes sont égales. On distingue trois cas.

Premier cas. Si $a^2 \neq 1$, les première et troisième équations sont incompatibles et le système n'admet pas de solution.

Deuxième cas. Si $a = 1$, le système se réduit à $x + y + z = 1$ et est doublement indéterminé. Pour tous réels λ et μ, le triplet $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu)$ est solution.

Troisième cas. Si $a = -1$, le système se réduit à:

$$\begin{cases} x - y + z = 1\,, \\ x - y - z = -1\,, \\ x - y + z = 1\,. \end{cases}$$

Il est alors simplement indéterminé; pour tout réel λ, le triplet $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 1)$ est solution.

Le 7 septembre 2018

EXALG578 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2018.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3+(\text{cis}\,\theta)^2\,|z|=0,$$

dans laquelle θ est un paramètre réel. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de $|z|$?

Donner la forme algébrique des solutions éventuelles dans le cas $\theta=0$.

Rappel. L'expression $\text{cis}\,\theta$ est une abréviation de $(\cos\theta+i\sin\theta)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf

Solution. On peut écrire $z^3=-(\text{cis}\,\theta)^2|z|=-(\text{cis}\,2\theta)|z|=(\text{cis}\,(2\theta+\pi))|z|$.
En prenant le module des deux membres, on obtient $|z^3|=|z|^3=|z|$, ce qui impose $|z|\in\{0,1\}$. On observe immédiatement que 0 est solution de l'équation proposée et que toute autre solution éventuelle peut s'écrire $z=\text{cis}\,\alpha$, où α est solution de l'équation $(\text{cis}\,\alpha)^3=-(\text{cis}\,\theta)^2$, qui peut se récrire $\text{cis}\,3\alpha=\text{cis}\,(2\theta+\pi)$, et encore $\alpha=[2\theta+(2k+1)\pi]/3$, où k est un entier quelconque.
Dans le cas général, l'ensemble des quatre solutions est

$$\{0,\text{cis}\,\frac{2\theta-\pi}{3},\text{cis}\,\frac{2\theta+\pi}{3},-\text{cis}\,\frac{2\theta}{3}\}.$$

Dans le cas particulier $\theta=0$, l'ensemble des solutions est donc

$$\{0,\text{cis}\,\frac{-\pi}{3},\text{cis}\,\frac{\pi}{3},-1\}$$

ou encore

$$\{0,\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\frac{1+i\sqrt{3}}{2},-1\}.$$

Le 8 octobre 2017

EXALG579 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2010.

Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des points (x, y) du plan, avec $y < 0$, qui satisfont l'inéquation :

$$\frac{x(y-1)}{y-2} > 1$$

-+

Observons que le dénominateur n'est jamais nul puisque $y < 0$ et que $0 < \frac{y-1}{y-2} < 1$ ce qui implique que $x > 1$

Puisque $y < 0$, $y-2$ est aussi négatif, l'expression devient :

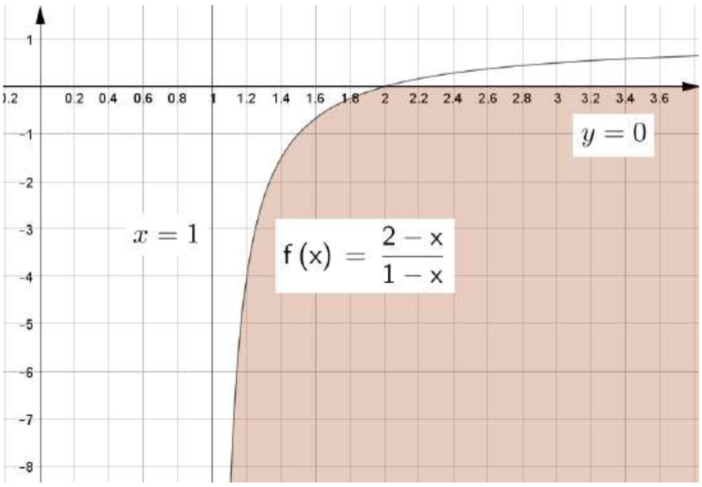
$x(y-1) < y-2 \Rightarrow xy - x < y - 2 \Rightarrow y(x-1) < x-2$

1) Si $x \geq 2$, l'expression sera toujours satisfaite et l'ensemble des points est situé en dessous de l'axe des y.

2) Si $1 < x < 2$, on peut écrire : $y < \frac{x-2}{x-1}$. L'ensemble des points est situé en dessous de la courbe $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ qui est une branche d'hyperbole.

Conclusion :

L'ensemble des points du plan qui satisfait l'équation est donc situé en dessous de la droite $y = 0$, et en dessous de la courbe $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$.



Le 7 septembre 2018