Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 59

EXALG590 – EXALG599

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2018

EXALG590 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

(1) Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquelles l'inégalité suivante est satisfaite $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$\frac{5x^2 - mx + 5}{(x+1)^2} < 6$$

Réponse :

(2) Un marchand ambulant se vante de pouvoir confectionner 110 cornets de glaces à deux boules différentes. Combien de parfums différents doit-il avoir en stock pour y parvenir?

Réponse :

(3) Quatre réels positifs a_2, a_2, a_3 et a_4 sont en progression géométrique. On donne $a_4 = (2000)^2$ et $a_3 - a_2 = (1000)^2$. Que vaut a_1 ?

Réponse :

$a_1 =$

(4) On note $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$. Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $z^{2018} = 1$ et $z + \bar{z} > 0$

Réponse :

(5) Calculez l'opération matricielle $A + 2B^T$ des matrices réelles A et B suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse :

Solution proposée par Marc Decoux

(1) $\dfrac{5x^2-mx+5}{(x+1)^2}<6, \quad \forall x\neq -1$

$\Rightarrow \quad 5x^2-mx<6(x+1)^2, \quad \forall x\neq -1$

$\Rightarrow \quad 5x^2-mx-6\left(x^2+2x+1\right)<0, \quad \forall x\neq -1$

$\Rightarrow \quad -x^2-(m+12)x-1<0, \quad \forall x\neq -1$

$\Rightarrow \rho<0$ avec $\rho=(m+12)^2-4<0$

$(m+12-2)(m+12+2)<0$

$(m+10)(m+14)<0$

m		-14		-10	
ρ	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \boxed{\rho<0\Leftrightarrow -14<m<-10}\mu$

(2) La disposition des deux boules sur le cornet n'intervient pas.

$n=$ nombre de parfums différents.

$\Rightarrow 110=C_n^2\Rightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!}=110\Rightarrow n(n-1)-220=0$

$\Rightarrow n^2-n-220=0$. On garde la racine positive $(n>0)$,

ce qui donne: $\quad n=\dfrac{+1+\sqrt{881}}{2}\simeq 15.34\simeq \boxed{16}$

(3)

$$\begin{array}{llll}
a_1 & a_3-a_1=1000^2 & & a_4=2000^2 \\
a_2=ka_1 & k^2a_1-ka_1=1000^2 & & k^3a_1=2000^2 \\
a_3=k^2a_1 & ka_1(k-1)=1000^2 & (2*) & k^2.ka_1=2000^2 \quad (3*) \\
a_4=k^3a_1 \quad (1*) & & &
\end{array}$$

$(2*)$ et $(3*)\Rightarrow \dfrac{k-1}{1000^2}=\dfrac{k^2}{2000^2}\Rightarrow k-1=\dfrac{k^2}{4}\Rightarrow (k-2)^2=0\Rightarrow k=2$

$(1*)\Rightarrow a_1=\dfrac{a_4}{k^3}=\dfrac{2000^2}{8}=\boxed{500\,000}$

$(4)\ z^{2018}=1, \qquad z+\bar{z}>0 \Rightarrow x+iy+x-iy>0 \Rightarrow x>0$

z est donc la racine $(2018)^{ème}$ de $1=1\operatorname{cis}0°$. Ces racines de 1 sont les sommets d'un polygone régulier dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 $\left(=\sqrt[2018]{1}\right)$.

Aucun sommet ne se trouve sur l'axe imaginaire $(x=0)$. En effet, on vérifie que si i est solution on doit avoir $(\operatorname{cis}90°)^{2018}=1$,

or $(\operatorname{cis}90°)^{2018}=(\cos 90°+i\sin 90°)^{2018}=i^{2018}=\left(i^2\right)^{1009}=-1\neq 1$

Il y a donc 1009 solutions à gauche de l'axe imaginaire et 1009 à droite

On conclut que pour $x>0$, il y a $\boxed{1009}$ sommets donc autant de nombres z qui sont solutions.

$$(5)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1/4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A+2B^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 1/4\\ 4 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1/2 & 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 10\\ 1/2 & 5/2\end{pmatrix}}$$

Le 14 novembre 2018

EXALG591 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln\left(x^3-2x^2-29x+30\right)\leq 10+\ln\left(x-6\right)$$

(Expliquer soigneusement sotre raisonnement.)

Solution proposée par Marc Decoux

$\ln\left(x^3-2x^2-29x+30\right)\leq 10+\ln\left(x-6\right)$

CE : $(1)\ x^3-2x^2-29x+30>0$

Horner : $\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -29 & 30 \\ \hline 1 & & 1 & -1 & -30 \\ \hline & 1 & -1 & -30 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-1)\left(x^2-x-30\right)$

Ou bien $x^3-x^2-x^2+x-30x+30=(x-1)\left(x^2-x-30\right)$

Par la méthode du ρ, on trouve les racines du deuxième facteur : $x=6,\ x=-5$

Tableau de signes :

x		-5		1		6	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-x-30	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
CE	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow -5<x<1$ ou $x>6$

$(2)\ x-6>0\Rightarrow x>6$

Conclusion : CE : $x>6$

L'équation devient :

$\ln\left(x^3-2x^2-29x+30\right)\leq \ln e^{10}+\ln\left(x-6\right)$

$\Rightarrow x^3-2x^2-29x+30\leq e^{10}\left(x-6\right)$

$\Rightarrow (x-1)(x+5)\cancel{(x-6)}\leq e^{10}\cancel{(x-6)}$ En vertu des CE

$\Rightarrow x^2+4x-\left(5+e^{10}\right)\leq 0 \qquad (1*)$

$\rho=16+4\left(5+e^{10}\right)=4\left(9+e^{10}\right)$

Racines : $\dfrac{-4\pm 2\sqrt{9+e^{10}}}{2}=-2\pm\sqrt{9+e^{10}}$

$\Rightarrow$ Tableau de signes :

x		$-2-\sqrt{9+e^{10}}$		6		$-2+\sqrt{9+e^{10}}$	
$(1*)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{S=\left]6,-2+\sqrt{9+e^{10}}\right]}$

Le 14 novembre 2018

EXALG592 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

Lors des célèbres 24h de Francorchamps, l'EPL aligne un concept-car révolutionnaire aux mains de deux brillants pilotes, Laurent et Bruno, qui tenteront de boucler le plus de tours de circuits possible (le circuit fait 8 km).

La voiture pèse seulement 400 kg à vide et est équipée d'un réservoir de 40 L. On estime grossièrement que la masse volumique de l'essence est de 1 kg/L. En moyenne, la voiture consomme du 20 L au 100 km.

Voici trois faits de course :

- Laurent est le premier à prendre le volant. Sa voiture est équipée de pneus neufs et le pein est fait. Il vide entièrement son réservoir avant de revenir aux stands.
- Lors de cet arrêt, le plein est fait et Laurent repart. Il effectue ainsi seulement 24 tous, mais doit rentrer au stand où l'on constate qu'un pneu vient de crever, car complètement usé.
- Le plein est refait, les pneus changés, et Bruno prend la relève de Laurent qui a bien mérité une petite pause. Avec ce train de pneus neufs, Bruno est capable de vider deux fois son réservoir entièrement, mais lors de son deuxième passage, on constate que les pneus sont à nouveau complètement usés et doivent donc de nouveau être changés.

Sachant que Laurent pèse 80 kg et que le taux d'usure des pneus, que l'on notera α, est linéairement dépendant du poids total de la voiture, déterminez la masse de Bruno, en kg. (Expliquez soigneusement votre raisonnement)

Note : mettez ce problème en équation(s), justifiez toutes vos réponses et arrondissez la masse de Bruno à l'unité la plus proche.

Solution proposée par Marc Decoux

Soit m la masse de Bruno.

La consommation de la voiture (donc la perte de masse est $\dfrac{20 \text{ L}}{100 \text{ km}} = 0.2$ kg/km

<u>Faits de course</u>

Laurent:

(1) A 0 km parcouru, la masse totale de la voiture M comprend la masse de Laurent, de la voiture et du plein d'essence : $M_0 = 80 + 400 + 40 = 520$ kg

(2) A 200 km parcourus (40 L d'essence consommés), on refait le plein et la masse de la voiture est de nouveau : $M_{200} = 80 + 400 + 40 = 520$ kg

Laurent parcourt encore : $24 \times 8 = 192$ km et donc après 392 km parcourus les pneus sont usés.

Bruno:

(3) A 0 km parcouru, la voiture à une masse totale de $M_0^{'} = m + 400 + 40 = m + 440$ kg

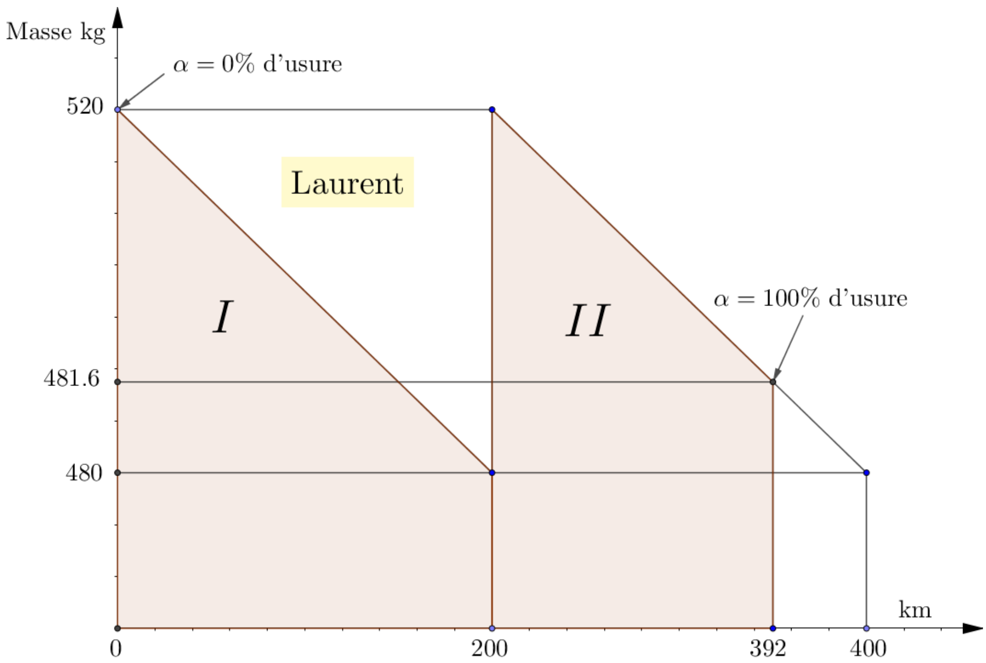
A 200 km parcourus, on refait le plein et la masse de la voiture est de nouveau :

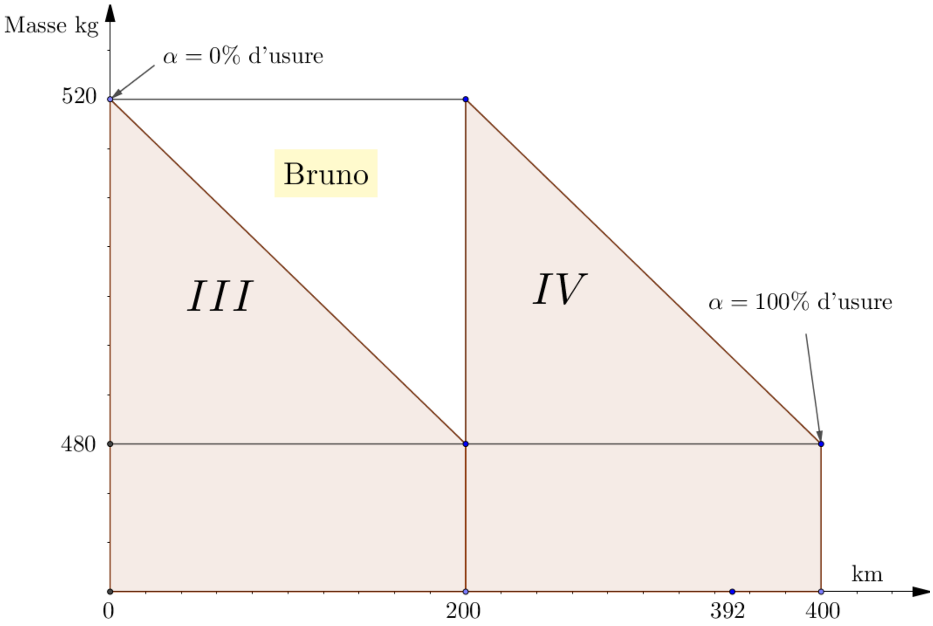
$M_{200}^{'} = m + 440$ kg

Bruno parcourt alors 200 km et à 400 km parcourus les pneus sont usés.

Nous savons que le taux d'usure α est proportionnel au poids total de la voiture, donc proportionnel à la masse totale de la voiture.

Or la diminution de la masse totale est linéaire, donc α est une fonction linéaire de la masse totale. $\alpha = kM$





Puisque l'usure doit être la même pour Laurent et Bruno, la somme des aires des trapèzes I et II doit être égale à la somme des aires des trapèzes III et IV :

$$S_I + S_{II} = S_{III} + S_{IV} \qquad \text{avec } S_{III} = S_{IV}$$

$$\frac{(520+480)\times 200}{2} + \frac{(520+481.6)\times 192}{2} = 2\times\frac{((440+m)+(400+m))\times 200}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1000\times 200 + 1001.6\times 192 = (840+2m)\times 400$$

$$\Rightarrow \qquad 2m = \frac{1000\times 20 + 1001.6\times 192}{400} - 840 \Rightarrow m = 70.384 \simeq \boxed{70 \text{ kg}}$$

Rappel : un taux est le rapport de la variation de la fonction par la variation de la variable.

En passant à la limite, on conclut qu'un taux n'est rien d'autre qu'une dérivée.

Ici, α est une fonction du poids, donc une fonction de la masse et donc une fonction de la distance parcourue, soit $\alpha = f(x)$.

L'usure des pneux est donc obtenue en intégrant $f(x)$. Cette intégrale est égale à l'aire des trapèzes définit ci-dessus.

EXALG593 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

(1) Représentez sous la forme $a+bi$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, l'expression suivante :

$$\left(\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$$

Réponse :

(2) Un facteur doit distribuer 5 enveloppes dans 5 boîtes aux lettres différentes. Incapable de déchiffrer l'adresse des destinataires, il décide de répartir les 5 enveloppes de manière aléatoire dans les 5 boîtes aux lettres. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à distribuer le courrier correctement dans au moins 3 des 5 boîtes aux lettres? Donnez le résultat sous forme de fraction de nombres entiers.

Réponse :

(3) La division d'un polynôme $P(x)$ par $(2x+1)^2$ donne un quotient égal à son reste, valant $2x+1$. Déterminez le coefficient du monôme de puissance 2 de $P(x)$

Réponse :

(4) Déterminez la valeur de $n\in\mathbb{Z}$ telle que

$$\sum_{i=0}^{n} 3.2^i = 765$$

Réponse :

(5) Calculez la valeur du déterminant de la matrice A suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Réponse :

Solution proposée par Martine Devillers et Catherine Leroy

$$(1)\left(\frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\right)^4=\left(\frac{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}.\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

$$=\left(\frac{(1-\sqrt{3})+i(\sqrt{3}+3)-i(\sqrt{3}-3)+(\sqrt{3}+3)}{4}\right)^4=\left(\frac{4+4i}{4}\right)^4=(1+i)^4$$

$$=\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4=4\operatorname{cis}\pi=\boxed{-4}$$

(2) Il n'y a que deux possibilités soit 3 enveloppes sont bien distribuées, soit c'est 5 enveloppes.

$$\text{Cas favorables : }\left.\begin{array}{l}\text{3 enveloppes - } C_5^3=\dfrac{5!}{3!2!}=10\text{ cas}\\ \text{5 enveloppes - } 1\text{ cas}\end{array}\right\}\text{ Total : 11 cas}$$

Cas possibles : $P_5!=120$

Conclusion : $\boxed{p=\dfrac{11}{120}}$

(3) $P(x)=Q(x)(2x+1)^2+R(x)$ avec $Q(x)=R(x)=2x+1$

$$\Rightarrow P(x)=(2x+1)^3+2x+1=8x^3+12x^2+8x+2\Rightarrow\boxed{12}$$

$$(4)\sum_{i=0}^{n}3.2^i=765\Rightarrow 3\sum_{i=0}^{n}2^i=765\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}2^i=255\Rightarrow 1.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=255$$

$$\Rightarrow 2^{n+1}=256\Rightarrow 2^{n+1}=2^8\Rightarrow\boxed{n=7}$$

(5) A est une matrice triangulaire. Le déterminant est égale au produit des éléments diagonaux. $|A|=1\times4\times5=\boxed{20}$

EXALG594 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\log_x(10)+2\log_{10x}(10)+3\log_{100x}(10)=0$$

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)

Solution proposée par Martine Devillers et Catherine Leroy

CE : $x>0$ et $x\neq 1$ et $x\neq 1/10$ et $x\neq 1/100$

On remet tout en log de base 10 :

$$\frac{1}{\log x}+\frac{2}{\log 10x}+\frac{3}{\log 100x}=0\Rightarrow\frac{1}{\log x}+\frac{2}{1+\log x}+\frac{3}{2+\log x}=0$$

Posons $y=\log x$ et mettons au même dénominateur pour obtenir :

$$(1+y)(2+y)+2y(2+y)+3y(1+y)=0$$

$$\Rightarrow\qquad 2+10y+6y^2=0\Rightarrow y=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

$$\Rightarrow\qquad \log x=\frac{-5-\sqrt{13}}{6}\text{ ou }\log x=\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{S=\left\{10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}},10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\right\}}$

Le 20 novembre 2018

EXALG595 - EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

C'est l'histoire de trois maraîchers qui ont des modes de culture bien différents.
Le premier, Laurent, est convaincu qu'il faut agir pour le bien de la planète. Il est à la tête d'une coopérative qui cultive ses tomates à l'ancienne, à la main et sans produit chimique, sur une terre de 20 hectares. Il vend ses tomates aux différents marchés bio pour la modique somme de 3,10 €/kg.
Le second, Donald, cultive de manière industrielle : herbicides, arrosage automatique, récolte robotisée,. . . Il est très fier de son énorme investissement qu'il a fait il y a quatre ans pour rénover son exploitation de 60 hectares. Ses tomates sont les moins chères du marché (2,10 €/kg seulement!) et servent à faire des soupes en boîte.
Le troisième, Ernest, est fainéant et ne sait pas trop quoi penser. Il trouve cependant que les produits chimiques ce n'est quand même pas très bon pour la santé ! Il tient donc une petite exploitation biologique de 45 hectares. Comme il n'aime pas trop se fatiguer, il l'a malgré tout automatisée pour une somme équivalente à trois-quart de l'investissement de Donald. C'était il y a quatre ans également. Ses tomates partent comme des petits pains dans les supermarchés, à 2,40 €/kg ce qui lui assure un très beau chiffre d'affaire.
Lors du *Forum International de l'Agriculture et de la Tomate* (FIAT), nos trois maraîchers se retrouvent et comparent leurs différents revenus. A la surprise générale, Ernest est le plus riche. Il emmagasine un bénéfice sur les quatre dernières années de 3,75 millions d'euros. Quelle n'est pas la déception de Donald de constater que même Laurent a gagné cinquante mille euros de plus que lui sur la même période. Il n'y comprend rien : il a pourtant un rendement de production par hectare et par mois 20% supérieur à celui d'Ernest et Laurent ; son bénéfice sur quatre ans s'élève quand même à 3,2 millions d'euros ! Ernest lui réplique que, par rapport à ses propres coûts d'entretien par hectare et par mois, Donald supporte un surcoût de 15%. A titre de comparaison, Laurent, qui doit tout faire à la main, affiche un surcoût de 20%.
Soyez l'arbitre de ce débat. On vous demande de calculer trois valeurs :

(1) Le rendement de production par hectare et par mois de Laurent ;

(2) L'investissement initial qui a fait la fierté de Donald, il y a quatre ans;

(3) Les coûts d'entretien en euros par hectare et par mois d'Ernest.

(Expliquez soigneusement votre raisonnement.)
Note : mettez ce problème en équation(s), justifiez toutes vos réponses et arrondissez-les de manière à donner un ordre de grandeur adéquat à la problématique. Le "bénéfice" est la différence entre le chiffre d'affaire et l'ensemble des coûts.

Solution proposée par Martine Devillers et Catherine Leroy

Soit x le rendement de production d'Ernest (kg/ha.mois)

y le coût d'entretien d'Ernest (€/ha.mois)

z l'investissement initial de Donald (€)

Construisons un tableau pour résumer les données.

	Surface (ha)	Rendement (kg/ha.mois)	Prix de vente $(€ / kg)$	Coût d'entretien $(€ / \text{ha.mois})$	Investissement initial $(€)$	Bénéfice $(10^6 €)$
Laurent	20	x	3.1	$1.2y$	0	3.25
Donald	60	$1.2x$	2.1	$1.15y$	z	3.2
Ernest	45	x	2.4	y	$0.75z$	3.75

La mise en équation est alors simple, pour une période de 4 ans soit 48 mois :

$$\begin{cases} \text{Ernest :} & 45\times(2.4x-y)\times 48-0.75z=3.75\times 10^6 \\ \text{Donald :} & 60\times(1.2x\times 2.1-1.15y)\times 48-z=3.2\times 10^6 \\ \text{Laurent :} & 20\times(3.1x-1.2y)\times 48-0z=3.25\times 10^6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 5184x-2160y-0.75z=3.75\times 10^6 & (1) \\ 7257.6x-3312y-z=3.2\times 10^6 & (2) \\ 2976x-1152y=3.25\times 10^6 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (3): y=\frac{1}{1152}\left(2976x-3.25\times 10^6\right) \qquad y \text{ en fonction de } x$$

$$(1)+(3)-(2): \frac{z}{4}=3.8\times 10^6-902.4x \qquad z \text{ en fonction de } x$$

En remplaçant y et z en fonction de x dans (1), on a

$$\begin{cases} x=3918,42 \\ y=7301,40 \\ z=1056074,77 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u>

Le rendement de production de Laurent vaut 3 918 kg/ha.mois. L'investissement initial de Donald vaut 1 056 075 €. Les coûts d'entretien d'Ernest valent 7 301 €/ha.mois.

EXALG596 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019, série 1.

.

1) Fournissez la forme trigonométrique (module et argument) du nombre complexe

$$z = \frac{1+i}{1-i}$$

où i est l'unité imaginaire telle que $i^2 = -1$

Module : $\boxed{}$ Argument : $\boxed{}$

2) déterminez les conditions d'existence de l'inéquation suivante :

$$\frac{\ln(x-2)}{\sqrt{x(7-x)}} < 0$$

Réponse : $\boxed{}$

3) La dernière interrogation de mathématique d'une classe de 16 étudiant du 5e secondaire a donné, sur 20, les résultats suivants : 3, 14, 16, 5, 13, 15, 12, 10, 17, 10, 7, 6, 16, 5, 13, 14. Donnez la moyenne et la médiane de ces résultats.

Moyenne : $\boxed{}$ Médiane : $\boxed{}$

4) Donnez la valeur numérique de $\log_5(0.04)$ ou $\log_5$ représente le logarithme en base 5.

Réponse : $\boxed{}$

5) Un aquarium compore 20 poissons rouges et 8 poissons bleus. A l'aide d'une épuisette, on y prélève 4 poissons d'un coup. Quelle est la probabilité de pêcher 2 poissons de chaque couleur?

Réponse : $\boxed{}$

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $\dfrac{1+}{1-i}=\dfrac{\sqrt{2}\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}=1\,\text{cis}\,\dfrac{\pi}{2}$

Module : 1 Argument : $\dfrac{\pi}{2}$

2) CE : $\begin{cases} x-2>0 \\ x(7-x)>0 \end{cases} \Rightarrow 2<x<7$

3) On met des données par ordre croissant :

2,5,5,6,7,10,10,12,13,13,14,14,15,16,17

Moyenne $=\dfrac{176}{16}=11$ Médiane $=\dfrac{12+13}{2}=12.5$

3) $\text{Log}_5\,0.04=\log_5\dfrac{4}{100}=\log_4\dfrac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=-2$

4) $\dfrac{C_{20}^2 C_8^2}{C_{28}^4}=\dfrac{152}{585}$

Le 7 septembre 2018

EXALG597- EPL, UCL, LLN, juillet 2019, série 1

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour que les solutions de l'équation

$$\frac{3mx^3 + 3mx^2 + 3x}{x - m} = 0$$

soient toutes négatives ou nulles.

L'équation peut s'écrire : $\dfrac{x}{x-m}\left(mx^2 + mx + 1\right) = 0$

On notera S_* l'ensemble des solutions de cette équation.

1) Si $m = 0$, l'équation devient : $\dfrac{x}{x} = 0$ qui n'admet pas de solution

2) Si $m \neq 0$, l'équation admet $x = 0$ comme solution (pas nécessairement unique).

3) Le réalisant de l'équation $mx^2 + mx + 1$ (1) vaut $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4)$

Pour $m = 4$: l'équation (1) admet une racine double : $x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow S_* = \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$

Pour $m < 0$: l'équation (1) admet 2 racines dont le produit $= \dfrac{1}{m} < 0$

Dès lors, une racine est positive et l'autre négative/

Pour $m > 4$: l'équation (1) admet 2 racines

$P = \dfrac{1}{m} > 0$: 2 racines de même signe.

$S = -1 < 0$: donc 2 racines négatives.

Pour $0 < m < 4$: $\Delta < 0$ et l'équation (1) n'admet pas de racines.

Conclusion : $0 < m$

Le 7 septembre 2018

EXALG598 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

Laurent vient d'achever ses études universitaires en marketing et lance son entreprise visant.
à réparer des appareils électroniques défectueux. Il engage pour cela ses trois amis d'université Bruno, Pierre et Yves, diplômés ingénieurs civils.
La facturation est basée sur les heures prestées par chacun des ingénieurs. Il constate que les heures facturées sélèvent à 122 en tout la première semaine. Dix-neuf téléphones portables, onze tablettes et cinq ordinateurs ont été réparés.
La deuxième semaine, le nombre total d'heures prestées reste égal mais pour réparer seulement neuf tablettes et quatre ordinateurs et un certain nombre de téléphones (le relevé des prestations inscrit par les ingénieurs n'est pas clair et personne ne se souvient avec exactitude de la quantité de réparations faites...).
La troisième semaine l'entreprise poursuit ses activités en se tassant un peu. En tout, 96 heures sont facturées pour vingt téléphones douze tablettes et un seul ordinateur.
la dernière semaine de leur premier mois d'activité se clôture sur une petite remontée avec cent heures d'activité tout pile. Ils ont réparé vingt-six téléphones, six tablettes et trois ordinateurs.
Sachant que Bruno, Pierre et Yves ont travaillé au même rythme pendant le mois écoulé, Laurent voudrait savoir combien de téléphones ont été réparés la seconde semaine.
Par ailleurs, pour améliorer les performances de la petite entreprise, il souhaiterait également déterminer le nombre d'heures nécessaires pour réparer un téléphone portable, une tablette et un ordinateur. Donnez un coup de main à Laurent et fournissez lui ces valeurs.

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

a = Nombre d'heures pour réparer un téléphone

b = Nombre d'heures pour réparer une tablette

c = Nombre d'heures pour réparer un ordinateur

x = Nombre de téléphones de la deuxième semaine

	S_1	S_2	S_3	S_4
Heures	122	122	96	100
Téléphone	19	x	20	26
Tablette	11	9	12	6
Ordinateur	5	4	1	3

Ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} 19a+11b+5c=122 \\ xa+9b+4c=122 \\ 20a+12b+c=96 \\ 26a+6b+3c=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\text{ h} \\ b=4\text{ h} \\ c=8\text{ h} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{112-36-32}{2}=27$$

Le 8 octobre 2017

EXALG599-EPL, UCL, LLN, juillet 2019, série 2.

1) Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13. Combien de possibilités d'agencement de réponses a-t-il s'il doit d'office répondre soit à la première question, soit à la deuxième?

Réponse : ☐

2) Un sondage destiné à évaluer la pratique de la course à pied chez les étudiants a donné le résultat repris à la figure 1.

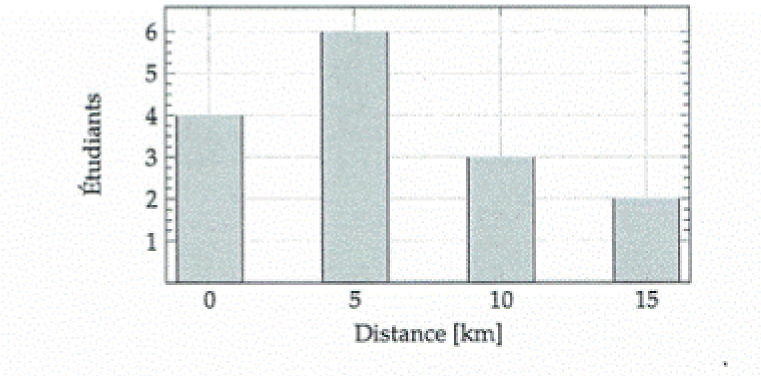


FIGURE 1. Distance moyenne parcourue par les étudiants par semaine.

Donnez la moyenne et l'écart-type de la distance parcourue par ce groupe d'étudiants.

Moyenne : ☐ Ecart-type : ☐

3) Sur une guitare, les notes produites dépendent de la longueur de la corde pincée. L_0 est la longueur de la corde associée au *do*, L_1 est celle associé au *do*#, L_2 au *ré*, et ainsi de suite. Ces longueurs suivent une progression géométrique de raison r. Il y a 12 notes dans une gamme. Sachant que l'octave est la treizième note et qu'elle est obtenue avec une corde moitié moins longue que la première $\left(L_{12} = \frac{L_0}{2}\right)$, déterminez l'expression algébrique de r.

Réponse : ☐

4) Déterminez les conditions d'existence de l'équation suivante :

$$\frac{\ln(x+\pi)}{\exp\left(\sqrt{4\pi^2 - x^2}\right)} = 0$$

Réponse : ☐

5) Déterminez le plus grand commun diviseur (PGCD) des polynômes $x^7 + 1$ et $x^3 + 1$.

Réponse : ☐

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans

1) $2C_{11}^{9} = 2C_{11}^{2} = 110$

2) Moyenne : 6, Ecart-type : $2\sqrt{6}$

3) $r = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$

4) $\left.\begin{array}{l} 0 < x + \pi \Leftrightarrow -\pi < x \\ 0 \leq 4\pi^2 - x^2 \Leftrightarrow -2\pi \leq x \leq 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -\pi < x \leq 2\pi$

5) $x^7 + 1 = (x+1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$x^2 - x + 1$ est non factorisable et ne divise pas $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
x^6 & -x^5 & +x^4 & -x^3 & +x^2 & -x & +1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{8-8}
\underline{-x^6} & \underline{+x^5} & \underline{-x^4} & & & & & x^4 - x \\
0 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & \underline{+x^3} & \underline{-x^2} & \underline{+x} & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Conclusion : le PGCD est $x+1$

Le 7 septembre 2018. Modifié le 23 mai 2020 (Steve Tumson)