

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

**ALG 61**

**EXALG610 – EXALG619**

<http://matheux.ovh/Accueil.html>

Jacques Collot  
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans  
Fabienne Zoetard

Novembre 2019

## EXALG610 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

Montrer que pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on a

$$\sum_{i=0}^p C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^p (-1)^i C_n^i C_{n-i}^{p-i} = 2^p C_n^p = 0.$$

Suggestion . On montrera d'abord que  $C_n^i C_{n-i}^{p-i} = C_p^i C_n^p$ , pour tous naturels  $i, p, n$  tels que  $i \leq p \leq n$ .

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algre.pdf>

*Solution.* La formule

$$C_u^k = \frac{u!}{k!(u-k)!}$$

permet le développement suivant:

$$C_n^i C_{n-i}^{p-i} = \frac{n! (n-i)!}{i! (n-i)! (p-i)! (n-p)!} = \frac{n! p!}{i! p! (p-i)! (n-p)!} = \frac{p! n!}{i! (p-i)! p! (n-p)!} = C_p^i C_n^p.$$

Ce développement permet de réduire les inégalités à démontrer à:

$$\sum_{i=0}^p C_p^i C_n^p = 2^p C_n^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i C_n^p = 0,$$

puis, en divisant chaque fois les deux membres par  $C_n^p$ , à:

$$\sum_{i=0}^p C_p^i = 2^p \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^p (-1)^i C_p^i = 0.$$

Ces dernières égalités s'obtiennent à partir de la formule de Newton:

$$\sum_{i=0}^p C_p^i x^i = (1+x)^p,$$

en remplaçant  $x$  par 1 pour obtenir l'égalité de gauche, et par  $-1$  pour obtenir celle de droite.

---

Le 7 novembre 2019

## EXALG611 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

On considère l'expression suivante, dans laquelle  $n$  est un paramètre entier naturel:

$$\frac{(2 + i\sqrt{12})^7}{(\sqrt{3} - i)^n}$$

On demande sa valeur, sous forme algébrique et sous forme trigonométrique, quand  $n$  vaut 16 et quand  $n$  vaut 17.

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**

<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

*Solution.* En notant que  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ , on voit que le numérateur de la fraction peut s'écrire  $(4 \operatorname{cis} [\pi/3])^7$  et le dénominateur peut s'écrire  $(2 \operatorname{cis} [-\pi/6])^n$ . Le nombre lui-même peut donc s'écrire

$$2^{14-n} \operatorname{cis} \left( \frac{7\pi}{3} + \frac{n\pi}{6} \right) = 2^{14-n} \operatorname{cis} \left( \frac{(14+n)\pi}{6} \right).$$

Pour  $n = 16$ , ce nombre peut s'écrire  $2^{-2} \operatorname{cis} (5\pi) = \frac{\operatorname{cis} (\pi)}{4} = -\frac{1}{4}$ .

Pour  $n = 17$ , ce nombre peut s'écrire:

$$2^{-3} \operatorname{cis} \left( \frac{31\pi}{6} \right) = 2^{-3} \operatorname{cis} \left( \frac{7\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3} + i}{16}.$$

---

Le 7 novembre 2019

## EXALG612 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante, dans laquelle  $m$  est un paramètre réel:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{2-m}{7x-2x^2-6}$$

Résoudre ensuite l'inéquation associée, obtenue en remplaçant le symbole "=" par le symbole "≤".

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Professeur Pascal Gribomont :**  
<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~gribomon/prov/Algebre.pdf>

*Solution.* On observe d'abord que l'équation peut se réécrire en

$$\frac{1}{x-2} = \frac{m-2}{(x-2)(2x-3)},$$

et que son domaine d'existence est  $D = \mathbb{R} \setminus \{3/2, 2\}$ . Dans ce domaine, l'équation peut se simplifier en  $2x-3 = m-2$ , dont l'unique solution est  $x = (m+1)/2$ , si cette valeur appartient au domaine  $D$ , et donc si  $m \notin \{2, 3\}$ . Pour  $m = 2$  comme pour  $m = 3$ , l'équation n'admet pas de solution.

Pour l'inéquation associée, le même domaine d'existence s'applique. Les points  $x = 3/2$ ,  $x = 2$  et  $x = (m+1)/2$  déterminent sur la droite réelle des intervalles dans lesquels l'inéquation est ou n'est pas vérifiée. Si  $S$  désigne l'ensemble des solutions de l'inéquation, on a les résultats suivants:

- Si  $m < 2$ , alors  $S = \left] -\infty ; \frac{m+1}{2} \right] \cup \left] \frac{3}{2} ; 2 \right[$ ;
- Si  $m = 2$ , alors  $S = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[ \cup \left] \frac{3}{2} ; 2 \right[$ ;
- Si  $2 < m < 3$ , alors  $S = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[ \cup \left[ \frac{m+1}{2} ; 2 \right[$ ;
- Si  $m = 3$ , alors  $S = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$ ;
- Si  $m > 3$ , alors  $S = \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[ \cup \left] 2 ; \frac{m+1}{2} \right[$ .

---

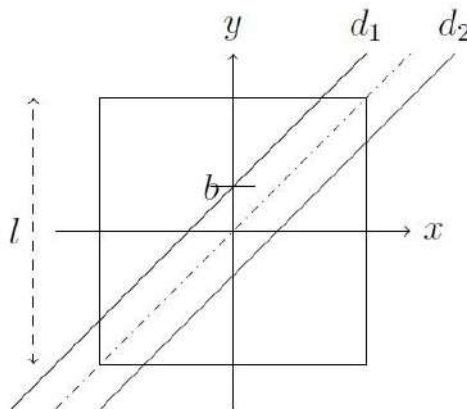
Le 7 novembre 2019

## EXALG613 – Polytech, UMons, Mons, 2017, juillet.

Soit un carré de côté  $l$  centré à l'origine, dans le plan  $xy$ .

Soient deux droites  $d_1$  et  $d_2$  de pente égale à  $+1$  et situées symétriquement par rapport à la diagonale du carré.

Que doit valoir  $b$  (ordonnée du point d'intersection entre  $d_1$  et l'axe  $y$ ), afin que  $d_1$  et  $d_2$  divisent le carré en 3 surfaces égales ?



---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

Notons

- $A_1$  l'aire au-dessus de la droite  $d_1$ , d'équation  $y = x + b$ .
- $A_2$  l'aire entre les deux droites.
- $A_3$  l'aire en-dessous de la droite  $d_2$ , d'équation  $y = x - b$ .

Par symétrie, nous avons directement que  $A_1 = A_3$ .

$A_1$  est l'aire d'un triangle isocèle rectangle de côté  $(l - b)$  :

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot (l - b)^2$$

Pour que  $A_1 = A_2 = A_3$ , il faut que  $A_1 = \frac{1}{3} \cdot \text{Aire}_{\text{carré}}$ . Il faut donc que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (l - b)^2 &= \frac{1}{3} \cdot l^2 \\ 3 \cdot (l^2 - 2lb + b^2) &= 2 \cdot l^2 \\ 3b^2 - 6bl + l^2 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque  $\rho = 36.l^2 - 4.3.l^2 = 24.l^2 > 0$ , on a deux solutions possibles

$$b_1 = \frac{6l - 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

$$b_2 = \frac{6l + 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

Mais évidemment,  $b$  doit rester inférieure à  $l$ , ce qui serait la valeur du paramètre si  $d_1$  passait par le coin supérieur gauche du carré. On ne retient donc que la première valeur.

$$b = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

---

Le 1/03/2020

## EXALG614 – Polytech, UMons, Mons, 2014, juillet.

Résoudre l'inégalité suivante :

$$\log_{f(x)}(3x-1) + \log_{g(x)}\sqrt{3x-1} \leq \ln(mx+1)$$

avec  $m$  un paramètre réel, et

$$f(x) = e^x, g(x) = e^{\frac{x}{4x-2}}$$

Discutez en fonction de  $m$ .

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

Les conditions d'existence s'écrivent :

$$f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow x \neq 0$$

$$g(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \frac{x}{4x-2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$4x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$mx+1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{m}$$

Nous avons successivement :

$$\frac{\ln(3x-1)}{\ln e^x} + \frac{\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}}}{\ln e^{\frac{x}{4x-2}}} \leq \ln(mx+1)$$

$$\frac{1}{x} \ln(3x-1) + \frac{4x-2}{x} \ln(3x-1)^{\frac{1}{2}} \leq \ln(mx+1)$$

$$\ln(3x-1)^{\frac{1}{x}} + \ln(3x-1)^{\frac{1}{2} \frac{4x-2}{x}} \leq \ln(mx+1)$$

$$\ln \left[ (3x-1)^{\frac{1}{x}} (3x-1)^{\frac{1}{2} \frac{4x-2}{x}} \right] \leq \ln(mx+1)$$

$$\ln(3x-1)^{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{4x-2}{x}\right)} \leq \ln(mx+1)$$

$$\ln(3x-1)^2 \leq \ln(mx+1)$$

$$(3x-1)^2 \leq mx+1$$

$$9x^2 + 1 - 6x \leq mx + 1$$

$$9x^2 - (m+6)x \leq 0$$

$$x(9x - (m+6)) \leq 0$$

Les racines de  $x(9x - (m+6))$  sont  $x=0$  et  $x = \frac{m+6}{9}$ . Dès lors, les solutions de  $x(9x - (m+6)) \leq 0$  sont données par :

$$x \in \left[ 0, \frac{m+6}{9} \right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > 0 \text{ c.à.d. si } m > -6$$

$$x \in \left[ \frac{m+6}{9}, 0 \right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < 0 \text{ c.à.d. si } m < -6$$

$$x = 0 \text{ si } m = -6$$

En tenant compte de la quatrième condition d'existence :

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{m+6}{9} \right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{3} \text{ c.à.d. si } m > -3$$

En appliquant  $m > -3$ , la dernière condition d'existence, on trouve  $x > \frac{1}{3}$  et elle est donc respectée. Si  $m \leq -3$ , l'inégalité ne possède pas de solution.

Finalement, en prenant aussi en compte la troisième condition, on trouve :

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \left[ \cup \left] \frac{1}{2}, \frac{m+6}{9} \right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{m+6}{9} \right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m < \frac{-3}{2}$$

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \left[ \text{ si } \frac{m+6}{9} = \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m = \frac{-3}{2}$$

En conclusion :

Si  $m \leq -3$ , il n'y a pas de solution.

Si  $m > -\frac{3}{2}$  :

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \left[ \cup \left] \frac{1}{2}, \frac{m+6}{9} \right] \right]$$

Si  $-3 < m < -\frac{3}{2}$  :

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{m+6}{9} \right]$$

Si  $m = -\frac{3}{2}$  :

$$x \in \left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \left[ \right]$$



## EXALG615 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

En factorisant :

$$\begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

La première équation donne deux cas :

1.  $y = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = 1$

2.  $y \neq 0 \iff \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x = 4, y = 3) \text{ ou } (x = 2, y = -1)$$

On obtient donc les solutions suivantes

$$\{(1, 0); (3, 0); (4, 3); (2, -1)\}$$

---

Le 1/03/2020

## EXALG616 - Polytech, UMon, Mons, 2015.

Résoudre le système d'équations suivant dans les réels :

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^2z = 1-m \end{cases}$$

où  $m$  est un paramètre réel.

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(1+m^2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m^2(m-1)(m^2+3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} = -m(m+1)(m-1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 2m(m-1)(1+m^2)$$

### Discussion

- $m = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

On tire :  $x = 0$  et  $y = 1$ .

L'ensemble des solutions est  $\{(0, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

- $m = 1$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

La première équation est redondante. En additionnant les deux suivantes, on tire :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad z = y + 1.$$

L'ensemble des solutions est  $\{(1, \alpha, \alpha + 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

- $m = -1$

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -x - y - z = -2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles. Le système n'a donc pas de solution dans ce cas.

- $m \neq 0, 1, -1$

Dans ce cas, la solution unique est :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(m^2 + 3)}{(m + 1)(1 + m^2)} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1 - m}{1 + m^2} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{m + 1}.$$

## EXALG617- Polytech, UMons, Mons, 2015.

Soit  $a$  un paramètre réel non nul, on vous demande de résoudre et discuter l'équation suivante :

$$(2ay - 5) \cdot [2015 ((a+2)x + 4y - 3)^2 + 1815(x + (a-1)y + 3)^2] = 0.$$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

Pour le premier facteur :

$$2ay - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2a}$$

Ce qui donne

$$S = S_1 = \left\{ \left( x, \frac{5}{2a} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

Le deuxième facteur fournit un système de deux équations à deux inconnues. En effet, la somme de deux carrés ne peut être nulle que si chacun des deux nombres élevés au carré est nul.

$$\begin{cases} (a+2)x + 4y = 3 \\ x + (a-1)y = -3 \end{cases}$$

Le déterminant vaut  $\mathcal{D} = a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3)$ .

Si  $a = 2$ ,

$$\begin{cases} 4x + 4y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Le système est impossible :  $S_2 = \emptyset$ ,  $S = S_1$

Si  $a = -3$ ,

$$\begin{cases} -x + 4y = 3 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

Le système est indéterminé :  $S_2 = \{(4x - 3, x), x \in \mathbb{R}\}$ ,  $S = S_1 \cup S_2$ .

Si  $a \neq \{2, -3\}$

$$\begin{cases} (a+2)x + 4y = 3 \\ x + (a-1)y = -3 \end{cases}$$

$$S_2 = \left\{ \left( \frac{3}{a-2}, \frac{-3}{a-2} \right) \right\}, S = S_1 \cup S_2$$

## EXALG618 - Polytech, UMons, Mons, 2015.

Etudier dans  $\mathbb{R}$  et en fonction du paramètre  $a$  le nombre et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - x\sqrt{2} + \ln a = 0$$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

1) Conditions d'existence :  $a > 0$

2) Les racines valent :

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \ln a}}{2}$$

Les racines sont réelles pour

$$2 - 4 \ln a \geq 0 \Rightarrow a \leq \sqrt{e}$$

Donc :  $0 < a \leq \sqrt{e}$

3) Infos sur le signe des racines  $\Rightarrow$  la somme  $S$  et le produit  $P$  des racines valent :

$$S = \sqrt{2}$$

$$P = \ln a$$

$$\Rightarrow P < 0 \text{ pour } x \in ]0, 1[$$

$$\Rightarrow P \geq 0 \text{ pour } x \in [1, \sqrt{e}]$$

Il en résulte que :

a) Si  $0 < a < 1$  :  $S > 0$  et  $P < 0 \Rightarrow$  2 racines de signes opposés

b) Si  $a = 1$  :  $S > 0$  et  $P = 0 \Rightarrow$  les deux racines valent  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \sqrt{2}$

c) Si  $1 < a < \sqrt{e}$  :  $S > 0$  et  $P > 0 \Rightarrow$  2 racines positives

d) Si  $a = \sqrt{e} \Rightarrow$  racines doubles  $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

---

Le 1/03/2020

## EXALG619 - Polytech, UMon, Mons, 2015.

Discuter du domaine de définition de  $f(x)$  en fonction du paramètre  $k$  :

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{kx^2 + 2x + e}{ex + e}\right)}$$

N.B. :  $e \approx 2,7$

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université

[https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse\\_2014-2017\\_siteweb\\_2020.pdf](https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf)

Conditions d'existence :

$$x \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{kx^2 + 2x + e}{ex + e} \geq 1$$

Si  $x > -1$

$$kx^2 + 2x + e \geq ex + e$$

$$kx^2 + (2 - e)x \geq 0$$

$$x(kx + (2 - e)) \geq 0$$

- Si  $k > 0$  :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & & \frac{e-2}{k} & & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\rightarrow \text{dom} f = ]-1, 0] \cup \left[\frac{e-2}{k}, \infty[$$

- Si  $k < 0$  :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \frac{e-2}{k} & & 0 & & \\ \hline - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\rightarrow \text{dom} f = [\alpha, 0] \quad \text{avec} \quad \alpha = \max\left(-1, \frac{e-2}{k}\right)$$

- Si  $k = 0$  :

$$x(2 - e) \geq 0 \quad \rightarrow \text{dom} f = ]-1, 0]$$

Si  $x < -1$

$$x(kx + (2 - e)) \leq 0$$

- Si  $k > 0$  :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 0 & & \frac{e-2}{k} & \\ \hline + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

$$\rightarrow \text{dom } f = \emptyset \text{ (car } x < -1)$$

- Si  $k < 0$  :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & \frac{e-2}{k} & & 0 & \\ \hline - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\rightarrow \text{dom } f = ]-\infty, \beta] \text{ avec } \beta = \min\left(-1, \frac{e-2}{k}\right)$$

- Si  $k = 0$  :

$$x(2 - e) \leq 0 \quad \rightarrow \text{dom } f = \emptyset \text{ (car } x < -1)$$

Au final :

$$- k = 0 \rightarrow \text{dom } f = ]-1, 0]$$

$$- k > 0 \rightarrow \text{dom } f = ]-1, 0] \cup \left[\frac{e-2}{k}, \infty\right[$$

$$- k < 0 \rightarrow \text{dom } f = ]-\infty, \beta] \cup [\alpha, 0]$$