Exercices résolus de mathématiques.

Algèbre

ALG 7

EXALG070 – EXALG079

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 03

EXALG070 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Soit l'équation en la variable complexe z :

$$z^2 - (\alpha + 3i + 4)\, z + 2\alpha i - 1 = 0 \qquad \text{avec } \alpha \text{ complexe.}$$

a) Déterminer le paramètre α pour que l'équation admette eux racines complexes conjuguées et calculer ces racines.
b) Dans un autre cas, si une des racines est i, calculer le paramètre α et l'autre racine.

Dans chacun des deux cas, représenter les racines dans le plan complexe.

---

a) Soient $x \pm iy$ les deux racines conjuguées. Leur somme $(= 2x)$ et leur produit $\left(= x^2 + y^2\right)$ sont des nombres réels. Par conséquent, $\alpha + 3i + 4$ et $2\alpha i - 1$ sont des nombres réels, c'est-à-dire que les parties imaginaires sont nulles.

Notons $\alpha = a + ib \;\rightarrow \begin{cases} 0 = \operatorname{Im}(\alpha + 3i + 4) = b + 3 & \rightarrow b = -3 \\ 0 = \operatorname{Im}(2\alpha i - 1) = 2a & \rightarrow a = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \alpha = -3i \rightarrow$ L'équation devient : $z^2 - 4z + 5 = 0$, dont les racines sont $2 \pm i$

b) Méthode 1

Si i est une racine et $z = x + iy$, l'autre, le trinôme s'écrit

$$P(z) = (z - i)(z - x - iy) = z^2 - (i + x + iy)\,z + ix - y = 0$$

En comparant avec le trinôme donné, $\begin{cases} x + iy + i & = & \alpha + 3i + 4 & (1) \\ ix - y & = & 2\alpha i - 1 & (2) \end{cases}$

En multipliant (2) par i puis en ajoutant (1), on a

$$(1) + (2) \times i \quad : \quad 0 = -\alpha + i + 4 \quad \rightarrow \quad \alpha = 4 + i$$

$$(1) \text{ donne alors} \quad : \quad x + iy = 8 + 3i$$

Les racines sont donc i et $8 + 3i$; $\quad \alpha = 4 + i$

Méthode 2

Si i est une solution de l'équation, on a :

$i^2 - (a + bi + 3i + 4).i + 2(a + bi).i - 1 = 0 \ \rightarrow 1 - ai + b + 3 + 3i - 4i + 2ai - 2b - 1 = 0$

$\rightarrow 1 - b + i(a - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases} \rightarrow \alpha = 4 + i$

Pour obtenir la seconde racine x_2, on observe que le produit des racines du trinôme est :

$$x_1 x_2 = i.x_2 = 2\alpha.i - 1 = 2(4 + i) = -3 + 8i \rightarrow x_2 = \frac{-3 + 8i}{i} = \frac{(-i)(-3 + 8i)}{(-i).i} = 8 + 3i$$

Le lecteur représentera les solutions dans le plan complexe.

EXALG071 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Discuter selon les valeurs de m , le nombre de racines de l'équation

$$\sin^2 x + 4\, m \cos x - 2m - 3 = 0$$

L'équation peut s'écrire :

$\left(1\text{-}\cos^2 x\right) + 4m\cos x - 2m - 3$

Soit $y = \cos x \;\rightarrow\; y^2 - 4my + 2\left(m+1\right) = 0$ avec $-1 \le y \le 1$

$\Delta = 16m^2 - 8m - 8 = 8\left(2m^2 - m - 1\right)$

$\rightarrow \Delta = 0$ si $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\rightarrow$ Les racines du trinôme en y sont donc réelles ssi $m \ge 1$ ou $m \le -\dfrac{1}{2}$

Positionnons -1 et 1 par rapport aux racines y_1 et y_2.

Le graphe de $f\left(y\right) = y^2 - 4my + 2\left(m+1\right)$ est une parabole dont la concavité est vers le haut.

$f\left(-1\right) = 3\left(2m+1\right) \ge 0$ ssi $m \ge -\dfrac{1}{2}$

$f\left(1\right) = -2m + 3 \ge 0$ ssi $m \le \dfrac{3}{2}$

$a)$ $\underline{m \le -\dfrac{1}{2}}$ $f\left(-1\right) < 0$ et $f\left(1\right) > 0 \;\rightarrow\; y_1 \le -1 \le y_2 \le 1$. y_2 est acceptable.

$b)$ $\underline{m = -\dfrac{1}{2}} \;\rightarrow\; y_1 = y_2 = -1$

$c)$ $\underline{-\dfrac{1}{2} < m < 1}$ Pas de solution réelle.

$\underline{d)\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2}}$ $\quad f(-1)$ et $f(1) > 0$, donc -1 et 1 sont tous deux en dehors de l'intervalle $[y_1, y_2]$. Or la somme des racines vaut $4m$ (≥ 4), donc il est impossible que $-1 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$. On a en fait -1<$1 \leq y_1 \leq y_2$ et aucune solution n'est acceptable.

$\underline{e)\ m = \frac{3}{2}}$ $\quad f(-1) > 0$ et $f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 1 < y_2$

$\underline{f)\ m > \frac{3}{2}}$ $\quad f(-1) > 0,\ f(1) < 0 \quad \rightarrow \quad -1 < y_1 \leq 1 < y_2 \qquad y_1$ est acceptable.

<u>Conclusion</u> : Note $x = \text{arc cos } y$ prend ses saleurs dans $[0, \pi]$

$$m < -\frac{1}{2} \qquad x = \text{arc cos } y_2$$

$$m = -\frac{1}{2} \qquad x = \text{arc cos}(-1) = \pi$$

$$-\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \qquad \text{Pas de solutions réelles}$$

$$m = \frac{3}{2} \qquad x = \text{arc cos } 1 = 0$$

$$m > \frac{3}{2} \qquad x = \text{arc cos } y_1$$

EXALG072 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Discuter en fonction du paramètre m, le nombre de racines admissibles de l'équation

$$\cos^2 x - \cos x - m = 0$$

Soit $y = \cos x \rightarrow y^2 - y - m = 0$ avec $-1 \leq y \leq 1$

$$\Delta = 1 + 4m \rightarrow \text{Racines réelles si } m \geq -\frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4m}}{2} \\ y_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4m}}{2} \end{cases}$$

<u>Racine y_1</u> $-1 \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4m}}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq 1+\sqrt{1+4m} \leq 2$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1+\sqrt{1+4m} \\ 1+\sqrt{1+4m} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3 \leq \sqrt{1+4m} & \text{toujours vérifiée} \\ \sqrt{1+4m} \leq 1 \rightarrow 1+4m \leq 1 \rightarrow m \leq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ y_1 est solution si $m \in \left[-\dfrac{1}{4}, 0\right]$

<u>Racine y_2</u> $-1 \leq \dfrac{1-\sqrt{1+4m}}{2} \leq 1 \rightarrow -2 \leq 1-\sqrt{1+4m} \leq 2$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1-\sqrt{1+4m} \\ 1-\sqrt{1+4m} \leq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \geq \sqrt{1+4m} \rightarrow 9 \geq 1+4m \rightarrow m \leq 2 \\ -1 \leq \sqrt{1+4m} & \text{toujours vérifiée} \end{cases}$$

$\rightarrow$ y_2 est solution si $m \in \left[-\dfrac{1}{4}, 2\right]$

<u>Résumé</u>

m	$<$	$-\dfrac{1}{4}$	Pas de solution
m	$=$	$-\dfrac{1}{4}$	1 solution car $y_1 = y_2 = \dfrac{1}{2}$
m	$\in$	$\left]-\dfrac{1}{4}, 0\right]$	2 solutions
m	$\in$	$]0, 2]$	1 solution
m	$>$	2	Pas de solution

Modifié le 31 aout 2016 (Jean Perbal)

EXALG073 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Montrer que le polynôme suivant est divisible par $(x-1)^2$ et trouver le quotient.

$$P(x) = x^{n+1} - (n+1)\,x + n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$P(1) = 1^{n+1} - (n+1).1 + n = 0 \quad \rightarrow P(x)$ est divisible par $(x-1)$

Horner :

	1	0	0	...	0	$-n-1$	n
1		1	1	...	1	1	n
	1	1	1		1	$-n$	0

$$\rightarrow \quad P(x) = (x-1)\left(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x^2 + x - n\right) = (x-1)\,Q(x)$$

$Q(1) = 0 \quad \rightarrow \quad Q(x)$ est divisible par $(x-1)$

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	x^{n-3}		x^1	x^0
	1	1	1	1	...	1	$-n$
1		1	2	3	...	$n-1$	n
	1	2	3	4	...	n	0

$$\rightarrow \quad Q(x) = (x-1)\left(x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + ... + (n-1)\,x + n\right)$$

Modifie le 14 janvier 06 (Sabine Bouzette)

EXALG074 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

La somme des 3 chiffres d'un nombre est 17.
La différence entre ce nombre et celui qu'on obtient en le lisant de droite à gauche est 495.
En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines, on trouve 22.
Quel est ce nombre (ou ces nombres) ?

Soit le nombre représenté sous la forme : $x+10y+100z$

1) La somme des 3 chiffres est 17 $\rightarrow$ $x+y+z=17$

2) La différence entre ce nombre et celui qu'on obtient en le lisant de droite à gauche est 495

$(\mathrm{x}+10\mathrm{y}+100\mathrm{z})-(z+10y+100z)=495 \rightarrow z-x=5$

3) En ajoutant le chiffre des dizaines au double du chiffre des centaines, on trouve 22

$y+2z=22$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 17 & (1) \\ -x + z = 5 & (2) \\ y + 2z = 22 & (3) \end{cases}$$

Comme $(1)+(2)=(3)$, le système est redondant

$$\rightarrow \begin{cases} y = 22-2z \\ x = 17-z-22+2z = z-5 \end{cases}$$

Cependant, x, y et z ne peuvent prendre que des valeurs entières comprises entre 0 et 9.

$$\begin{array}{lllllllllll} x = z-5 & \rightarrow & 0 \leq z-5 \leq 9 & \rightarrow & z \geq 5 & & z \leq 14 \\ y = 22-2z & \rightarrow & 0 \leq 22-2z \leq 9 & \rightarrow & z \leq 11 & & z \leq 7 \\ z & \rightarrow & 0 \leq z \leq 9 & \rightarrow & z \geq 0 & & z \leq 9 \end{array}$$

Les valeurs possibles pour z sont donc 7, 8 et 9 $\rightarrow$

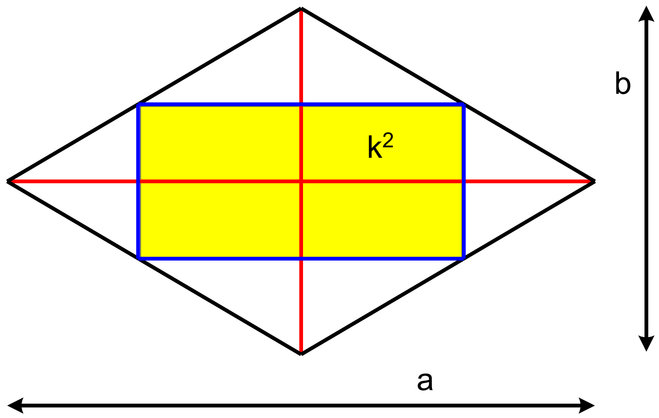
$z=7 \rightarrow y=22-14=8 \quad x=7-5=2 \rightarrow$ nombre : 782

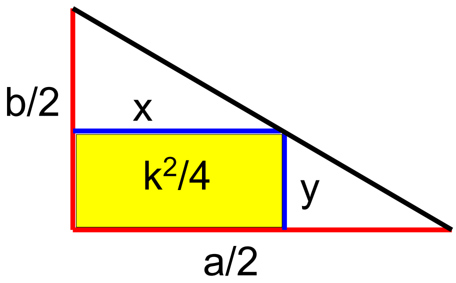
$z=8 \rightarrow y=22-16=6 \quad x=8-5=3 \rightarrow$ nombre : 863

$z=9 \rightarrow y=22-18=4 \quad x=9-5=4 \rightarrow$ nombre : 944

EXALG075 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

Les diagonales d’un losange sont de longueur a et b.
n inscrit un rectangle d’aire k^2 dans le losange, comme indiqué dans la figure ci-dessous.
Déterminer les côtés du rectangle et discuter.





Compte tenu de la symétrie, on peut raisonner sur un un seul triangle.

On a : $S = x.y = \frac{k^2}{4} \quad (1)$

Le couple $(x,\ y)$ appartient à la droite passant par les points $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ et $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

d'équation : $y = \frac{b}{2} - \frac{b}{a}x$

$\rightarrow (1)$ devient : $S = x.y = x\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{a}x\right) = \frac{k^2}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{a}x^2 - \frac{b}{2}x + \frac{k^2}{4} = 0$

Racines réelles si : $\Delta = \frac{b^2}{4} - k^2\frac{b}{a} = \frac{b^2}{4}\left[1 - \frac{4k^2}{ab}\right] \geq 0 \quad \rightarrow \quad k^2 \leq \frac{ab}{4}$

Autrement dit l'équation n'admet des racines réelles que si l'aire du rectangle est inférieure ou égale à la moitié de l'aire du losange.

$$\text{Si } \Delta \geq 0 \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{b}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{\frac{2b}{a}} = \dfrac{a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \\[2ex] x_1 = \dfrac{\frac{b}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{\frac{2b}{a}} = \dfrac{a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \end{cases}$$

Etant donné que : $0 \leq \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}} < 1 \quad$ car $\quad k^2 \leq \frac{ab}{4}$

Nous obtenons les conditions suivantes sur x_1 et x_2

$$\frac{a}{4} \leq x_1 < \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad 0 < x_2 \leq \frac{a}{4}$$

Les solutions x_1 et x_2 sont donc deux solutions acceptables pour x.

Les valeurs correspondantes de y sont :

$$y_1 = \frac{b\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4} \qquad y_2 = \frac{b\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k^2}{ab}}\right)}{4}$$

EXALG076 – Bruxelles, juillet 2001.

A) Combien de solutions réelles l'équation suivante admet-elle ?

$$\log_{10}\sqrt{7x+5}+\log_{10}\sqrt{2x+3}=1+\log_{10}0.1$$

B) Utilisant les propriétés des déterminants, calculer :

$$\begin{vmatrix} a+d & a & 2 \\ b+2d & b & 4 \\ c+3d & c & 6 \end{vmatrix}$$

A) CE : $\begin{cases} 7x+5>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \rightarrow x>-\dfrac{5}{7}$

$\log_{10}\sqrt{7x+5}+\log_{10}\sqrt{2x+3}=1+\log_{10}0.1=0$

$\sqrt{7x+5}.\sqrt{2x+3}=1$

$(7x+5)(2x+3)=1$

$14x+31x+14=0 \rightarrow \begin{cases} x=-0.6320 \\ x=-1.5828 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

B) $\begin{vmatrix} a+d & a & 2 \\ b+2d & b & 4 \\ c+3d & c & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d & a & 2 \\ 2d & b & 4 \\ 3d & c & 6 \end{vmatrix}=2d\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & c & 3 \end{vmatrix}=0$

EXALG077 – Bruxelles, juillet 2001.

Factoriser :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 4x - 4$$

sachant que l'équation f(x)=0 admet deux racines dont le produit vaut -1

$f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(3x^2 + ax + b)$

sachant que $x_1 x_2 = -1$, on obtient après développement :

$f(x) = 3x^4 + (a - 3x_1 - 3x_2)x^3 + (b - ax_1 - ax_2 - 3)x^2 + (-bx_1 - bx_2 - a)x - b$

On en déduit le système:

$$\begin{cases} a - 3x_1 - 3x_2 = -11 \\ b - ax_1 - ax_2 - 3 = 9 \\ -bx_1 - bx_2 - a = 4 \\ -b = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 3x_1 - 3x_2 = -11 & (1) \\ -ax_1 - ax_2 = 8 & \\ -4x_1 - 4x_2 - a = 4 & (2) \end{cases}$$

On additionne (1) et (2) et on réarrange

$$\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 = 7 \\ a(x_1 + x_2) = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ a = -8 \end{cases}$$

On connaît donc le produit et la somme de x_1 et x_2 qui sont donc solutions

de l'équation : $z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Il nous reste à factoriser : $3x^2 - 8x + 4 = (x-2)(3x-2)$

Finalement :

$$f(x) = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(x-2)(3x-2)$$

EXALG078 – Bruxelles, juillet 2001.

Déterminer, en fonction du paramètre réel a, le nombre de racines réelles qu'admet l'équation :

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-4}=\sqrt{2x-5}$$

$\sqrt{x-a}-\sqrt{x-4}=\sqrt{2x-5}$

CE : $\begin{cases} x \geq a \\ x \geq 4 \\ x-a \geq x-4 \end{cases}$ car le premier membre doit être positif $\rightarrow a \leq 4$

$\rightarrow \quad a \leq 4 \leq x$

$x-a-2\sqrt{(x-a)(x-4)}+x-4=2x-5$

$(x-a)(x-4)=\left(\dfrac{a-1}{2}\right)^2$

$x^2-(a+4)x+\dfrac{16a-a^2+2a-1}{4}=0$

$4x^2-4(a+4)x-(a^2-18a+1)=0$

$\Delta'=4(a+4)^2+4(a^2-18a+1)=4(2a^2-10a+17)$ toujours >0

$\rightarrow \; x=\dfrac{1}{2}\left[(4+a)\pm\sqrt{2a^2-10a+17}\right]$

Nous devons avoir $x \geq 4$

Première racine : $\dfrac{1}{2}\left[(4+a)+\sqrt{2a^2-10a+17}\right] \geq 4$

$2a^2-10a+17 \geq 4-2a+\dfrac{a^2}{4}$

$7a^2-32a+52 \geq 0$ toujours >0.

Deuxième racine : $\dfrac{1}{2}\left[(4+a)-\sqrt{2a^2-10a+17}\right] \geq 4$

$7a^2-32a+52 \leq 0$ impossible

Conclusions :

$a \leq 4$ Une seule racine : $x=\dfrac{1}{2}\left[(4+a)+\sqrt{2a^2-10a+17}\right]$

$a > 4$ Pas de racine

EXALG079 – Bruxelles, juillet 2001.

Résoudre dans R³, en discutant par rapport au paramètre réel a, le système :

$$\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & a^2 \\ 2ax & + & ay & + & 2z & = & 2a^2 \\ ax & + & y & + & az & = & 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)(a-2) \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 2a^2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)(a^2+a+1)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2a & 2a^2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2a^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-2)(a+1)(1-a)$$

Discussion

1) $a = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ 2z=0 \\ y=1 \end{cases}$ Système impossible

2) $a = 1 \quad \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=0 \end{cases}$ Système simplement indéterminé.

3) $a = 2 \quad \rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y=4-z \\ 2x+y=1-2z \end{cases} \rightarrow 4-z=1-2z \rightarrow z=-3$

$\rightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ z=-3 \end{cases}$ Système simplement indéterminé

Dans les autres cas : $\begin{cases} x = \dfrac{a^2+a+1}{a} \\ y=0 \\ z=-a-1 \end{cases}$

Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)