

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Algèbre

## ALG 8

**EXALG080 – EXALG089**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXALG080 – Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation :

$$|z|^2 - 2z + 6i - 15 = 0 \quad \text{avec } |z| = \text{module de } z$$

---

Soit  $z = a + bi \rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2$

L'équation devient :

$$a^2 + b^2 - 2a - 2bi + 6i - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 15 = 0 \\ -2b + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow b = 3 \rightarrow a^2 - 2a - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 3.6458 \\ a_2 = -1.645 \end{cases}$$

Solutions

$$\begin{cases} z_1 = 3.6548 + 3i \\ z_2 = -1.645 + 3i \end{cases}$$

## EXALG081 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation :  $1 + \ln(x+3) > \ln(x^2 + 2x - 3)$

---

$$\text{CE : } \begin{cases} x > -3 \\ x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) > 0 \rightarrow x < -3; x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1$$

L'équation devient :

$$\ln e \cdot (x+3) > \ln(x^2 + 2x - 3)$$

$$e \cdot (x+3) > x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

On peut simplifier par  $x+3$  puisque  $x > 1$

$$e > x-1 \rightarrow x < e+1$$

Conclusion :  $\boxed{1 < x < e+1}$

## EXALG082 – Bruxelles, septembre 2001.

Trouver un réel  $m$  tel que les 4 racines de l'équation :

$$x^4 - (3m+1)x^2 + m^2 = 0$$

soient quatre réels distincts en progression arithmétique.  
Quelles sont alors ces quatre racines ?

Soient les quatre racines :  $a; a+r; a+2r; a+3r$

L'équation peut s'écrire :  $(x-a)(x-(a+r))(x-(a+2r))(x-(a+3r))=0$

Le coefficient du terme en  $x^3$  est la somme des racines:  $\rightarrow 4a+6r=0 \rightarrow r=-\frac{2}{3}a$  (1)

Le coefficient du terme en  $x^2$  est égale à  $-(3m+1) \rightarrow 6a^2+18ra+11r^2=-(3m+1)$

Compte tenu de (1)  $\rightarrow a^2 = \frac{9}{10}(3m+1)$  (2)

Le terme indépendant est le produit des racines et égal à  $m^2$

$$a(a+r)(a+2r)(a+3r) = m^2$$

Compte tenu de (1)  $\rightarrow a^2 = \pm 3m$  (3)

De (2) et (3)  $\rightarrow$

$$A) 3m = \frac{9}{10}(3m+1) \rightarrow m = 3$$

$$\text{L'équation devient : } x^4 - 10x + 9 = (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$$

Ce qui donne les racines :  $-3, -1, 1, 3$  qui sont bien en progression arithmétique

$$B) -3m = \frac{9}{10}(3m+1) \rightarrow m = -\frac{3}{19}$$

$$\text{L'équation devient : } x^4 - 0.5263x + 0.0249 = 0$$

Ce qui donne les racines :  $-0.688247, -0.229417, 0.229417, 0.688247$   
qui sont bien en progression arithmétique

Note : On peut faire aussi l'exercice en considérant que les racines sont en progression géométrique.

On trouve :  $m = -\frac{1}{5}$  Les racines sont :  $\pm \sqrt{\frac{1}{5}}$  (2x) La raison :  $r = -1$

## EXALG083 – Bruxelles, septembre 2001.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  et discuter en fonction du paramètre réel  $a$  le système :

$$\begin{cases} (3-a)x + y - z = 0 \\ 2x + (2-a)y - 2z = 0 \\ x - y + (1-a)z = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-a & 1 & -1 \\ 2 & 2-a & -2 \\ 1 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = -a(a-4)(a-2)$$

A)  $a=0$

$$\text{Le système devient: } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \text{ Système simplement indéterminé.}$$

B)  $a=2$

$$\text{Le système devient: } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \text{ Système simplement indéterminé}$$

C)  $a=4$

$$\text{Le système devient: } \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ Système simplement indéterminé}$$

$$E) \text{ Dans les autres cas : } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

---

Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)

## EXALG084 – Bruxelles, juillet 2002.

Trouver un polynôme du 4<sup>ème</sup> degré  $P(x)$  sachant qu'il est divisible par  $x$  et  $x^2+5$ , que le reste de sa division par  $x-1$  vaut  $-30$  et que le reste de sa division par  $x-2$  vaut  $-54$ .

Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$P(x) = x(x^2 + 5)(ax + b)$$

On a :

$$P(1) = 1 \cdot (1+5)(a+b) = -30 \rightarrow a+b = -6$$

$$P(2) = 2 \cdot (2+5)(2a+b) = -54 \rightarrow 2a+b = -3$$

On déduit :  $a = 2$     $b = -7$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 35x}$$

## EXALG085 – Bruxelles, juillet 2002.

Déterminer toutes les valeurs réelles de  $a$  pour lesquelles :

$$ax^2 - x + a \geq 0 \quad , \quad \forall x > 0$$

Pour que  $P(x)$  soit toujours  $\geq 0$ , pour tout  $x$ , il faut que la concavité de la fonction  $P(x)$  soit  $> 0 \rightarrow a > 0$

De plus, il faut que le  $\Delta$  soit  $< 0$ .

$$\rightarrow \Delta = 1 - 4a^2 = (1 - 2a)(1 + 2a) < 0$$

$$\rightarrow a < -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < a$$

Si  $a = \frac{1}{2} \rightarrow P(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2$  qui est toujours  $\geq 0$

Conclusion :  $\boxed{a \geq \frac{1}{2}}$

## EXALG086 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels, quelle condition doivent-ils vérifier pour que l'équation :

$$az^2 + bz + a = 0$$

admette deux solutions complexes conjuguées ?

Dans ce cas, calculer le module de ces solutions ?

---

$$az^2 + bz + a = 0 \text{ Avec } a \neq 0, \text{ sinon } z = 0$$

$$\rightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + 1 = 0$$

Cette équation admettra deux racines complexes conjuguées si :

$$\Delta = b^2 - 4a^2 < 0 \Rightarrow (b - 2a)(b + 2a) < 0 \text{ ou } \boxed{-2|a| < b < 2|a|}$$

$$\text{Soient } \alpha + \beta i \text{ et } \alpha - \beta i, \text{ on a : } (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = |z_2|^2$$

Or le produit des racines est aussi égal au terme indépendant de l'équation

$$\rightarrow \boxed{|z_1| = |z_2| = 1}$$

---

Modifié le 30 septembre 2012 (Bruno Dethier)



## EXALG087 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Résoudre dans  $\mathbf{R}^3$ , en discutant par rapport au paramètre réel  $a$ , le système

$$\begin{cases} ax + 3y + 3z = a \\ x + az = a \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a+3)(a-3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 3 & 3 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -a^2(a-3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a & 3 \\ 1 & a & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2a(a-3)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 3 & a \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a+2)(a-3)$$

### Discussion

$$1) a = 0 \rightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$2) a = 3 \rightarrow \begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3 \\ x + 3z = 3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{3-x}{3} \\ y = -\frac{2x}{3} \end{cases}$$

$$3) a = 3 \rightarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = 3 \\ x - 3z = 3 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Système impossible}$$

$$4) \text{ Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \frac{a}{a+3} \\ y = -\frac{2}{a+3} \\ z = \frac{a+2}{a+3} \end{cases}$$

## EXALG088 – Bruxelles, septembre 2002.

Résoudre dans  $\mathbf{C}$  et discuter en fonction des paramètres réels  $a$  et  $b$

$$a^2 z^2 + (iz + b)^2 = 0$$

---

$$a^2 z^2 + (iz + b)^2 = 0 \rightarrow a^2 z^2 - z^2 + 2ibz + b^2 = 0$$

$$(a^2 - 1)z^2 + 2ibz + b^2 = 0$$

$$\Delta' = -b^2 - (a^2 - 1)b^2 = -a^2 b^2$$

$$z = \frac{-ib \pm abi}{(a+1)(a-1)} = \frac{-ib(1 \pm a)}{(a+1)(a-1)}$$

1)  $a = 1$

L'équation devient :  $z^2 + (iz + b)^2 = 0 \rightarrow 2bi z = -b^2$

Si  $b = 0$  indéterminé

Si  $b \neq 0$  1 seule racine.  $z = \frac{bi}{2}$

2)  $a = -1$

L'équation devient :  $z^2 + (iz + b)^2 = 0 \rightarrow 2bi z = -b^2$

Si  $b = 0$  indéterminé

Si  $b \neq 0$  1 seule racine.  $z = \frac{bi}{2}$

3)  $b = 0$   $a \neq \pm 1$

L'équation devient :  $a^2 z^2 - z^2 = 0 \rightarrow z_1 = z_2 = 0$

4) Dans les autres cas :

$$z_1 = \frac{bi}{1-a} \quad z_2 = \frac{bi}{1+a}$$

## EXALG089 – Bruxelles, juillet 2002.

Décomposer

$$2a^3 + b^3 - 3ab$$

en facteurs polynomiaux du premier degré.

Le polynôme peut se mettre sous la forme :

$$(\alpha_1 a + \beta_1 b)(\alpha_2 a + \beta_2 b)(\alpha_3 a + \beta_3 b)$$

Ce qui donne le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 = -3 \\ \alpha_3 \beta_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \alpha_2 \beta_1 \beta_3 = 0 \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 = 1 \end{cases}$$

Système de quatre équations à 6 inconnues.

Posons  $\beta_1 = \beta_2 = 1 \rightarrow \beta_3 = 1$ . Le système devient :

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 \alpha_3 = \frac{2}{\alpha_1} \\ \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1 \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = -\alpha_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -\alpha_1^2 + \frac{2}{\alpha_1} = -3 \rightarrow \alpha_1^3 - 3\alpha_1 - 2 = 0$$

Ce polynôme est divisible par  $\alpha_1 - 2$  (car  $P(2) = 0$ )

$$\text{Horner : } \begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \rightarrow (\alpha_1 - 2)(\alpha_1 + 1)^2$$

1)  $\alpha_1 = 2$

$$\begin{cases} \alpha_2 \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 + 2\alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = -2 \end{cases} \text{ Système simplement indéterminé dont une}$$

solution est  $\alpha_1 = 2$ ;  $\alpha_2 = \alpha_3 = -1$

Le polynôme s'écrit donc :  $\boxed{(2a+b)(a-b)^2}$

2)  $\alpha_1 = -1$

$$\begin{cases} \alpha_2 \alpha_3 = -2 \\ -\alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \text{ Système simplement indéterminé dont une}$$

solution est  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ ;  $\alpha_3 = 2$

Le polynôme s'écrit donc :  $\boxed{(2a+b)(a-b)^2}$  Solution identique.