Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 0

EXANA000 – EXANA009

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA001 – École polytechnique de Moscou.

Calculez : $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{x^2}$$

Soit $y = x^2 \;\rightarrow\; \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+1}{2y+1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4y+2}\right)^{y}$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{2y+1}\right)^{y}$$

Soit $z = 2y+1 \rightarrow y = \frac{z}{2}-\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{z}{2}-\frac{1}{2}} = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z}{2}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{z}{2}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 0.e^{\frac{1}{2}}.1 = 0$$

Solution proposée par Frédéric Baldan

$$\lim_{x->\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x->\pm\infty}(e)^{x^2.\ln\left(\frac{x^2+1}{2x^2+1}\right)} = \lim_{x->\pm\infty}(e)^{x^2.\ln\left(\frac{x^2}{2x^2}\right)} = (e)^{+\infty.\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = (e)^{-\infty} = 0$$

Résolu le 25 juin 2002

EXANA002 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

La fonction gamma est définie, pour $\alpha > 1$ par la relation :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) Pour n entier > 0

a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$

b. Montrer, par une intégration par parties, que : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

c. Déduire des points précédents la valeur de $\Gamma(n)$

d. On donne l'intégrale de Poisson :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$, en effectuant un changement de variable adéquat.

$$a)\ \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$b)\ 1)\ \lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}$$

En appliquant n fois la règle de l'Hospital : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n!}{e^x} = 0$

2) $\Gamma(\mathrm{n}) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ et $\Gamma(\mathrm{n}+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

Intégrons par parties : $f : x^n \qquad f' : n\,x^{n-1}$

$g' : e^{-x} \qquad g : -e^{-x}$

$$\to\ \Gamma(\mathrm{n}+1) = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n\,x^{n-1} e^{-x} dx = n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n\Gamma(\mathrm{n})$$

$$3)\ \Gamma(\mathrm{n}) = (n-1)\Gamma(\mathrm{n}\text{-}1) = (n-1)(n-2)\Gamma(\mathrm{n}\text{-}2) = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$$

$$c)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Soit $\mathrm{t} = \sqrt{x} \ \to\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx \ \to\ 2dt = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Résolu le 25 juin 2002

EXANA003 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

On considère la fonction :

$$y = x^2 e^x$$

Démontrer que la $n-$ième dérivée est de la forme :

$$y^{(n)} = e^x \left(x^2 + \alpha_n x + \beta_n\right)$$

Déterminer a_n et b_n, en fonction de n.

$$y = x^2 e^x$$

$$y^{(1)} = 2xe^x + x^2 e^x = e^x\left(x^2 + 2x\right)$$

$$y^{(2)} = \left(2x+2\right)e^x + \left(x^2+2x\right)e^x = e^x\left(x^2+4x+2\right)$$

$$y^{(3)} = \left(2x+4\right)e^x + \left(x^2+4x+2\right)e^x = e^x\left(x^2+6x+6\right)$$

$$y^{(4)} = \left(2x+6\right)e^x + \left(x^2+6x+6\right)e^x = e^x\left(x^2+8x+12\right)$$

On peut établir le tableau suivant :

$y^{(n)}$	1	2	3	4	
α_n	2	4	6	8	$\rightarrow \alpha_n = 2n$
β_n	0	2	6	12	$\rightarrow \beta_n = (n-1)n$

Conclusion : $\boxed{y^{(n)} = e^x\left(x^2 + 2nx + (n-1)n\right)}$

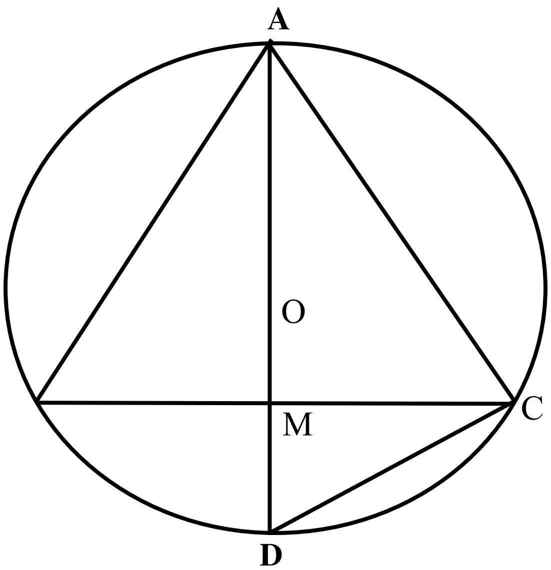
Résolu le 25 juin 2002

EXANA004 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

On donne un cercle de rayon $r = 1$.

Parmi les triangles isocèles inscrits dans ce cercle, quels sont ceux dont l'aire est maximale ?

Dans ce cas que vaut l'angle au sommet ?



Soit $x = OM$ et soit $H = AM$ la hauteur du triangle. On a $H = r + x = 1 + x$.
Par Pythagore :

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \quad \to \quad AC^2 = (1+x)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2$$ où B est la base du triangle.

$$AC^2 + CD^2 = (2r)^2 = 4$$

$$MC^2 + MD^2 = CD^2$$

Donc $AC^2 + MC^2 + MD^2 = 4 \quad \to \quad (1+x)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 + (1-x)^2 = 4$

$$\to \quad \frac{B^2}{2} = 2 - 2x^2 \quad \to \quad B = 2\sqrt{1-x^2}$$

L'aire est donnée par : $S = \dfrac{2\sqrt{1-x^2}\,(1+x)}{2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

L'aire maximale se trouve en annulant la dérivée :

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1-x^2} + (1+x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \quad \to \quad 1-x-2x^2 = 0 \quad \to \quad x_1 = -1 \text{ (à rejeter)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\to \quad H = \frac{3}{2} \qquad B = \sqrt{3} \quad et \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Calcul de l'angle : si $\alpha = \dfrac{\hat{A}}{2}$, $\tan\alpha = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \to \quad \hat{A} = 60°$

C'est donc un triangle équilatéral.

Résolu le 25 juin 2002

EXANA005 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Étudier la variation du volume d'un cône de révolution dont l'aire latérale reste égale à πa^2

Soit h : la hauteur, r le rayon de la base, et g la génératrice.

On a : $g = \sqrt{r^2 + h^2}$

Soit aussi S l'aire latérale. On a : $S = \pi r g = \pi a^2$.

Donc : $a^2 = r\sqrt{r^2+h^2} \rightarrow h = \frac{1}{r}\sqrt{a^4 - r^4} \qquad (1)$

Le volume V est donné par : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} r\sqrt{a^4 - r^4}$

Le volume est maximal si : $\frac{dV}{dr} = 0$

$$\rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3}\left[\sqrt{a^4 - r^4} + \frac{r}{2\sqrt{a^4 - r^4}}\left(-4r^3\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{a^4 - r^4} = \frac{2r^4}{\sqrt{a^4 - r^4}} \rightarrow a^4 - r^4 = 2r^4 \rightarrow \boxed{r = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}}$$

Hauteur : $(1) \rightarrow h = \frac{\sqrt[4]{3}}{r}\sqrt{a^4 - \frac{a^4}{3}} \rightarrow \boxed{h = a\sqrt[4]{\frac{4}{3}}}$

Résolu le 13 février 2003

EXANA006 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Considérons une tente en forme de cône circulaire droit, dont le rayon de base est R, et dont la hauteur vaut h (on ne considère pas de tapis de sol).

On impose un volume V de la tente. Quel rapport h / R faut-il choisir pour que l'aire du tissu utilisé soit minimale ?

Calculer R et h dans le cas où $V = 2$ m³

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \quad \rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi R^2}$$

$$S = \pi R g \quad \text{avec} \quad g = \sqrt{R^2 + h^2} \quad \rightarrow \quad S = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$\text{Donc} \quad S = \pi R\sqrt{R^2 + \frac{9V^2}{\pi^2 R^4}} = \sqrt{\pi^2 R^4 + \frac{9V^2}{R^2}}$$

Pour obtenir l'aire minimale, on dérive :

$$\frac{dS}{dR} = \frac{1}{2\sqrt{\pi R^4 + \frac{9V^2}{R^2}}}\left(4\pi^2 R^3 - \frac{18V^2}{R^3}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad 4\pi^2 R^3 - \frac{18V^2}{R^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 4\pi^2 R^6 - 18V^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4\pi^2 R^6 - 18\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{h}{R} = \sqrt{2}}$$

$$\text{Si} \quad V = 2m^3 \quad \rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi R^2} = \frac{3.2}{\pi \frac{h^2}{2}} \quad \rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} = 1.563\ m}$$

$$\text{et} \quad \boxed{R = \frac{h}{\sqrt{2}} = 1.11\ m}$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA007 – Complément.

Calculer : $$F(x)=\int \frac{x^3+2x-1}{x^2+x+2}dx$$

En divisant le numérateur par le dénominateur, on obtient :

$$F(x)=\int (x-1)dx+\int \frac{x+1}{x^2+x+2}dx.$$

On remarque que $(x^2+x+2)'=2x+1=x+1+x,$ donc:

$$F(x)=\frac{(x-1)^2}{2}+\int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2}-\int \frac{x}{x^2+x+2}dx.$$

De même, on remarque que : $\frac{1}{2}(x^2+x+2)'=\frac{1}{2}(2x+1)=x+\frac{1}{2},$ donc

$$F(x)=\frac{(x-1)^2}{2}+\ln(x^2+x+2)-\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+2)}{x^2+x+2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

Calculons le dernier terme :

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+2}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right)^2+1}=\frac{2}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}$$

On pose $t=\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{\sqrt{7}}{2}dt,$ d'où :

$$\frac{2}{7}\frac{\sqrt{7}}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{7}}\text{arc tan } t=\frac{1}{\sqrt{7}}\text{arc tan }\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$$

Finalement :

$$\boxed{F(x)=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+2)+\frac{1}{\sqrt{7}}arc\tan\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C}$$

Résolu le 13 février 2003

EXANA008 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

A) Calculer $F(x)=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

B) En déduire : $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

C) Soit : $f(x)=\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du$

calculer $f'(1/2)$

A) $\int \sqrt{1-x^2}\;\; dx$ soit $x=\sin\;\; t \to dx=\cos\;\; t\;\; dt \to t=\text{arc}\;\;\sin\;\; x$

$\to \int \sqrt{1-\sin^2 t}\;\; \cos t\;\; dt=\int \cos^2 t\;\; dt=\int \frac{\cos 2t+1}{2}\;\; dt=\frac{1}{2}\left(\int \cos 2t\;\; dt+\int dt\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int \cos 2t\;\; d2t+t\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right)=\frac{1}{2}(\cos t\;\; \sin\;\; t+t)$

$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin\;\; \text{x}\right)$

$B)\;\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\;\; dx=\int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\;\; dx=-\int \sqrt{1-x^2}\;\; dx+\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;\; dx$

$=-\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+\arcsin x=\frac{1}{2}\left(\arcsin x\text{ - }x\sqrt{1-x^2}\right)$

$C)\;\; f(x)=\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}du=\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin u\text{ - }x\sqrt{1-u^2}\right)\right]_0^x=\frac{1}{2}\left(\arcsin x\text{ - }x\sqrt{1-x^2}\right)$

Par conséquent : $f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \rightleftharpoons \to f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Résolu le 13 février 2003

EXANA009 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999.

A) Rechercher l'ensemble de définition de la fonction :

$$F(x)=\int \frac{1}{3+5\cos x}dx$$

B) Calculer $F(x)$

C) En déduire la valeur de

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\cos x}du$$

$A)\ 3+5\ \cos\ x=0 \ \rightarrow\ x=\pm 126.87°+k360°$

$\text{dom } F(x)=R\setminus\{\pm 126.87°+k360°\}$

$$B)\ F(x)=\int \frac{dx}{3+5\ \cos\ x}=\int \frac{dx}{3+5\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+3\tan^2\frac{x}{2}+5-5\tan^2\frac{x}{2}}\ dx$$

$$=2\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{8-2\tan^2\frac{x}{2}}\ d\left(\frac{x}{2}\right)=\int \frac{d\ \ \tan\frac{x}{2}}{4-\tan^2\frac{x}{2}}$$

On pose $y = \tan\ \dfrac{x}{2} \rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{4-y^2}=\int \frac{dy}{(2-y)(2+y)}=\frac{1}{4}\int \frac{dy}{2-y}+\frac{1}{4}\int \frac{dy}{2+y}$

$$=-\frac{1}{4}\ln(2-y)+\frac{1}{4}\ln(2+y)=\frac{1}{4}\ln\frac{2+y}{2-y}$$

$$\rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}+C}$$

$$C)\ F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\ \cos\ x}=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{2+\tan\frac{\pi}{4}}{2-\tan\frac{\pi}{4}}-\ln\frac{2+\tan 0}{2-\tan 0}\right)=\frac{1}{4}\ln 3$$

Résolu le 13 février 2003