

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 10**

EXANA0100 – EXANA109

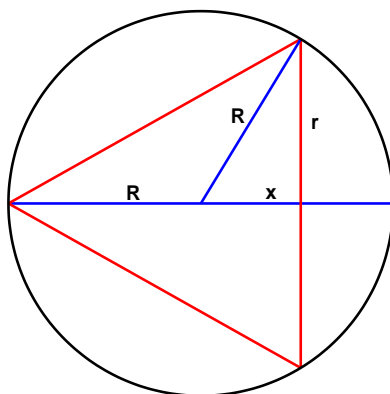
<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

Juin 04

## EXANA100 –EPL, Louvain, juillet 2002, série 2.

On considère tous les cônes circulaires droits inscrits dans une sphère de rayon  $R$ . Déterminez le rayon  $r$  de la base et la hauteur  $h$  du cône de volume maximal. Donnez ensuite ce volume et comparez-le au volume de la boule.



La boule étant obtenu par la rotation d'un cercle et le cône par la rotation d'un triangle, on peut raisonner dans le plan.

Soit à maximaliser l'aire d'un triangle inscrit à un cercle de rayon  $R$ .

$$\begin{cases} h = R + x \\ r = \sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow S = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2} \rightarrow \frac{dS}{dx} = \sqrt{R^2 - x^2} + (R + x)\frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x) \\ S = hr \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x^2 + xR - R^2 = 0 \rightarrow x = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 8R^2}}{4} = \frac{R}{2} \rightarrow h = \frac{3R}{2} \text{ et } r = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \text{Le volume du cône : } V_C = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3R^2}{4} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3\pi R^3}{8}$$

$$\text{Volume de la boule : } V_B = \frac{4}{3} \pi R^3 \rightarrow \frac{V_B}{V_C} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{3\pi R^3}{8}} = \frac{32}{9} \approx 3.56$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXANA101 – Louvain, septembre 2002.

a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$

b)  $g(x) = \ln(\sin e^x)$  Calculer la dérivée  $g'(x)$

c)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$

d)  $\int x^2 \cos(2x) dx$

e)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) =$

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

b)  $g(x) = \ln(\sin e^x)$

$$g'(x) = \frac{1}{\sin e^x} \cdot \cos e^x \cdot e^x = e^x \cot e^x$$

c)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3 + 1)}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2}{3} \sqrt{1+x^3}$

$$d) I = \int x^2 \cos 2x \, dx$$

$$f = x^2 \quad f' = 2x$$
$$g' = \cos 2x \quad g = \frac{\sin 2x}{2} \quad \rightarrow \quad I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} - \int x \sin 2x \, dx$$

$$f = x \quad f' = 1$$
$$g' = \sin 2x \quad g = -\frac{\cos 2x}{2} \quad \rightarrow \quad I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} + x \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$\rightarrow I = x^2 \frac{\sin 2x}{2} + x \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$e) I = \int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

$$f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$$
$$g' = \sqrt{x} \quad g = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \quad \rightarrow \quad I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{2}{3} \int \sqrt{x} \, dx$$

$$\rightarrow I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \left( \ln x - \frac{2}{3} \right)$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXANA102 – Louvain, septembre 2002.

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

- Donnez le domaine de  $f$  et analysez la parité de  $f$ .
- Donnez la limite de  $f$  quand  $x \rightarrow 0$  si cette limite existe.
- Donnez les maxima et minima éventuels.
- Donnez le graphe de  $f$  en mettant en évidence la partie du graphe comprise en  $x = 1 / (3 \pi)$  et  $x = 3 / \pi$

a)  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(-x) = -x \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x} = f(x) \rightarrow \text{La fonction est paire}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$

c) Asymptote horizontale :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad AH \equiv y = 1$$

d)  $f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$

$$\rightarrow \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x \sin \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{x} = f(x)$$

Il aura donc un extrema chaque fois que  $f(x)$  sera égal à  $\cos \frac{1}{x}$

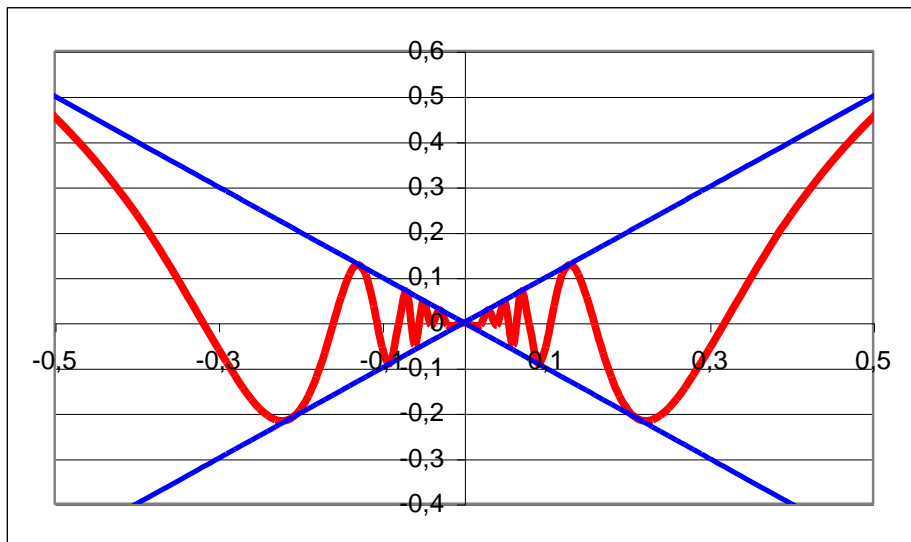
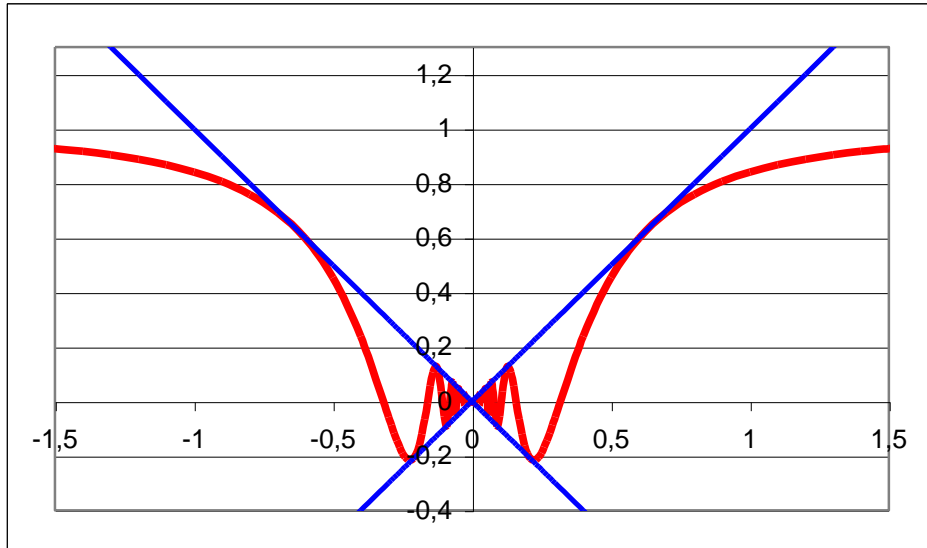
Ce qui se produit une infinité de fois.

Par exemple, si  $x \rightarrow 0$ , alors  $x \sin \frac{1}{x} \approx 0$  en vertu du point b)

$$\rightarrow \cos \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2k\pi}$$

D'autre part, les valeurs extrêmes de  $\sin \frac{1}{x}$  sont  $\pm 1$ .

Par conséquent, les extrema sont situés sur les droites :  $y = \pm x$

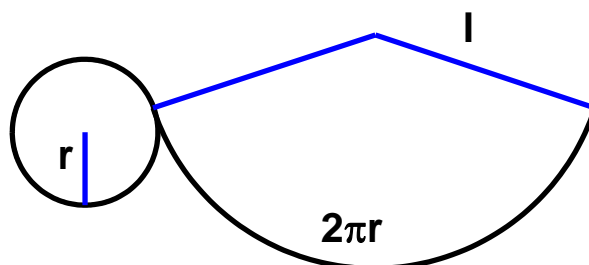



---

Résolu le 24 juin 2004

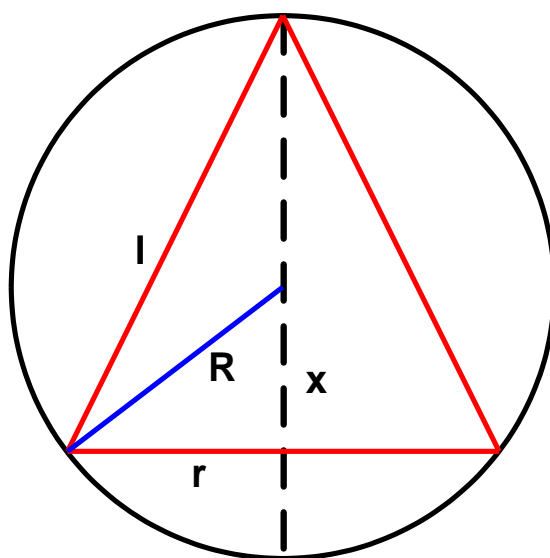
## EXANA103 – Louvain, septembre 2002.

- Donnez la surface latérale (sans la base) d'un cône circulaire droit en fonction du rayon  $r$  de sa base et de la longueur  $l$  de sa génératrice.
- En considérant tous les cônes circulaires droits inscrits dans une sphère de rayon  $R$ , donnez le rayon  $r$  de la base et la hauteur  $h$  de celui dont la surface latérale est maximale. Calculer ensuite cette surface.



a) Développons la surface latérale. On a immédiatement :

$$A_L = \frac{2\pi r}{2\pi l} \pi l^2 = \pi r l$$



b) Appliquons Pythagore :

$$\begin{cases} l^2 = r^2 + (x+R)^2 \\ R^2 = x^2 + r^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r^2 = l^2 - (x+R)^2 \\ r = \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases} \quad (1) \quad \rightarrow R^2 - x^2 = l^2 - (x+R)^2$$

$$\rightarrow l = \sqrt{2R(R+x)} \quad (2)$$

Donc l'aire latérale est, en utilisant (1) et (2) :

$$A_L = \pi r l = \pi \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{2R(R+x)} = \pi \sqrt{2R} (R+x) \sqrt{R-x}$$

Cette surface sera extrémale si :  $\frac{dA_L}{dx} = 0$

$$\rightarrow \frac{dA_L}{dx} = \pi \sqrt{2R} \left( \sqrt{R-x} + (R+x) \frac{1}{2\sqrt{R-x}} (-1) \right) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{R-x} = (R+x) \frac{1}{2\sqrt{R-x}} \rightarrow 2(R-x) = R+x \rightarrow x = \frac{R}{3}$$

$$\text{Et donc : } \begin{cases} r = \frac{2\sqrt{2}}{3} R \\ l = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \end{cases} \rightarrow A_L = \pi \frac{2\sqrt{2}}{3} R \frac{2R\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi R^3$$



**EXANA104 – Louvain, juillet 2003, série 1.**

a)  $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} =$

b)  $\int e^{2x} \sin x \, dx =$

c)  $\int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 5} =$

d)  $\int_{-1/4}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}$

a)  $I = \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \tan x$

b)  $I = \int e^{2x} \sin x \, dx$

$f = e^{2x} \quad f' = 2e^{2x} \quad \rightarrow I = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$   
 $g' = \sin x \quad g = -\cos x$

$f = e^{2x} \quad f' = 2e^{2x} \quad \rightarrow I = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x \, dx$   
 $g' = \cos x \quad g = \sin x$

$\rightarrow I = \frac{e^{2x}}{5} (2 \sin x - \cos x)$

$$c) I = \int \frac{dx}{2x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{2(x+1)^2 + 3} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan \frac{\sqrt{6}}{3} (x+1)$$

$$d) I = \int_{-1/4}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$\text{Posons } t = 2x \rightarrow dx = \frac{dt}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} & \rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} & \rightarrow t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} [\arcsin t]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{6}$$

---

Résolu le 24 juin 2004

## EXANA105 – Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{x - 2}$$

- e) Montrer que cette fonction est bien définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .
- f) Donnez l'équation des asymptotes.
- g) Esquissez le graphe de  $f$  sans calculer  $f'$ , mais en sachant que  $f'$  s'annule seulement en un point de  $[-1, 0]$  et en un point de  $[3, 4]$
- h) Montrez que la dérivée de  $f$  s'annule en un point de  $[-1, 0]$

a) Il faut que  $x^4 - x^3 + 1$  soit toujours positif.

$$\text{En effet : } \begin{cases} \text{si } x < 0 & \rightarrow -x^3 > 0 \rightarrow x^4 - x^3 + 1 > 0 \\ \text{si } x = 0 & \rightarrow x^4 - x^3 + 1 = 1 > 0 \\ \text{si } 0 < x < 1 & \rightarrow x^3 < 1 \rightarrow x^4 - x^3 + 1 > 0 \\ \text{si } x > 1 & \rightarrow x^4 > x^3 \rightarrow x^4 - x^3 + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

b) Asymptote verticale :  $AV \equiv x = 2$

Asymptote oblique :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{x(x-2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1}}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + 1} - (x-2)x}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1 - x^4 + 4x^3 - 4x^2}{(x-2)(\sqrt{x^4 - x^3 + 1} - (x-2)x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x(x^2 + x^2)} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow AO \equiv y = x + \frac{3}{2}$$

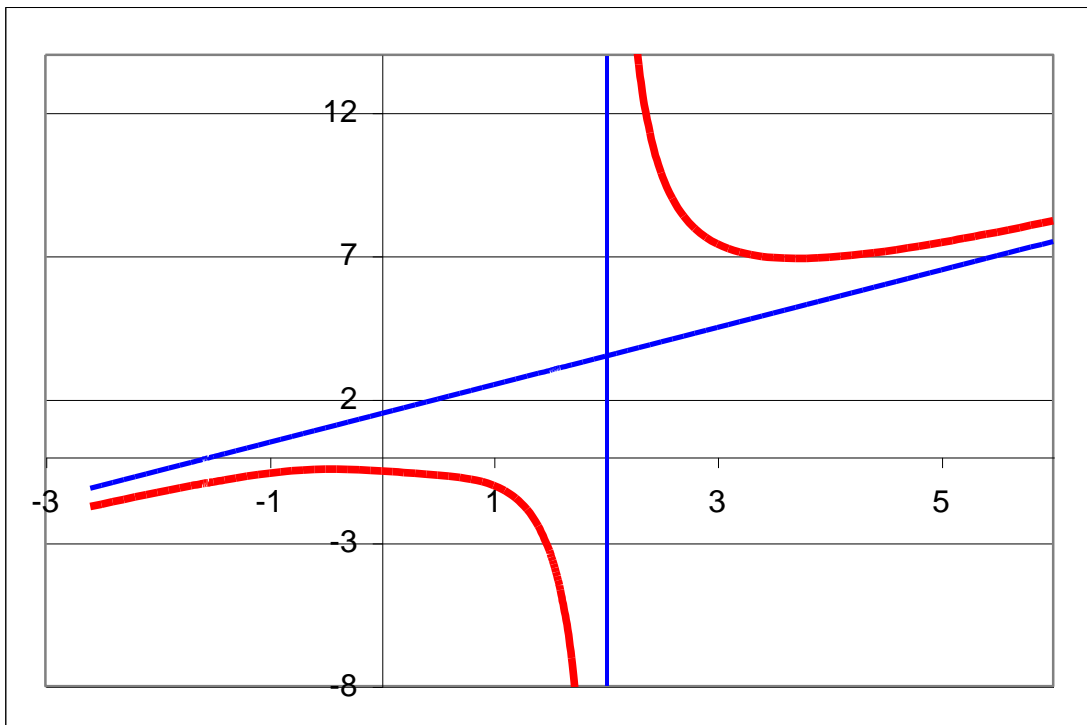
c) Graphe : Voir ci-dessous

$$d) f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \frac{4x^3 - 3x^2}{(x^4 - x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}(x-2) - (x^4 - x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{2x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2}{(x-2)^2 (x^4 - x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

Le dénominateur est toujours positif. Etudions le numérateur  $N(x)$

On a :  $N(0) = -2$  et  $N(-1) = 15$

→  $f'(x)$  s'annule dans l'intervalle  $[-1, 0]$



---

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 1 août 2005 (Steve Tumson)

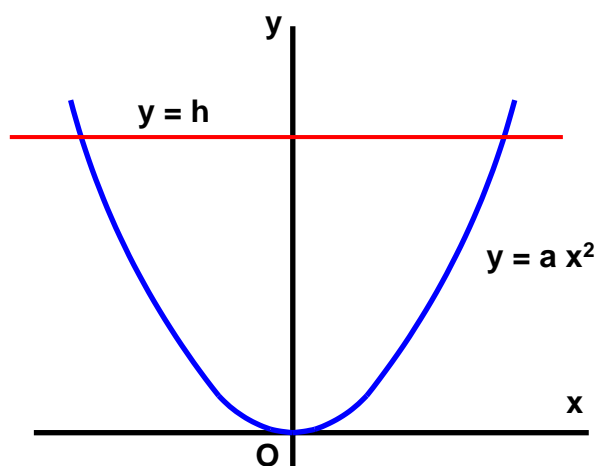
## EXANA106 – Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère une cuve obtenue par la rotation d'une parabole

$$y = a x^2$$

autour de l'axe des  $y$ . On suppose  $a > 0$ . (Unités : mètre, seconde).

- c) donnez le volume  $V(h)$  de la cuve correspondant à  $0 \leq a x^2 \leq y \leq h$ .
- d) On remplit la cuve de vin jusqu'à une hauteur de 2 mètres et on ouvre ensuite un robinet assurant un débit d'un litre par seconde. Le niveau du vin devient alors une fonction du temps  $h(t)$ . Donnez la vitesse de descente du niveau du vin (en m/s) au moment où  $h(t) = 3/2$  (m).



$$a) V(h) = \pi \int_0^h \left( \sqrt{\frac{y}{a}} \right)^2 dy = \frac{\pi}{2a} [y^2]_0^h = \frac{\pi h^2}{2a}$$

b) Soit le débit de fuite :  $D = 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$

A l'instant  $t = 0$ , le volume dans la cuve est :  $V(2) = \frac{2\pi}{a}$

A l'instant  $t$ , le volume est :  $V(t) = \frac{2\pi}{a} - D t$

Et le niveau correspondant :  $\frac{\pi h^2}{2a} = \frac{2\pi}{a} - D t \rightarrow h(t) = \sqrt{4 - \frac{2aDt}{\pi}}$

La vitesse de descente est donc :

$$v_h = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{4 - \frac{2aDt}{\pi}}} \left( -\frac{2aD}{\pi} \right) = \frac{-aD}{\pi\sqrt{4 - \frac{2aDt}{\pi}}} = -\frac{aD}{\pi h}$$

$$\text{Si } h = \frac{3}{2} \text{ m} \rightarrow |v_h| = \frac{2a}{3\pi} 10^{-3} \text{ m/s}$$

**EXANA107 – Louvain, juillet 2003, série 2.**

a)  $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

b)  $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$

c)  $\int x \left( e^{(x^2)} + 2e^x + 1 \right) dx$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\ln(1+x) + \ln(1-x)}$

a)  $I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx$

Soit  $t = \sin x \rightarrow dt = \cos x dx$

Donc :  $I = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int t^4 (1-t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$$

$$b) I = \int \sin^4 x \cos^4 x dx = \frac{1}{2^5} \int \sin^4 2x d2x \quad (1)$$

Procédons par étape.

$$\text{Calculons : } J = \int \sin^2 t dt$$

$$\begin{aligned} f &= \sin t & f' &= \cos t \\ g' &= \sin t & g &= -\cos t \end{aligned} \rightarrow J = -\sin t \cos t + \int \cos^2 t dt$$

$$\rightarrow J = -\sin t \cos t + \int t dt - \int \sin^2 t dt$$

$$\rightarrow J = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \quad (2)$$

$$\text{Calculons : } H = \int \sin^4 t dt$$

$$\begin{aligned} f &= \sin^3 t & f' &= 3\sin^2 t \cos t \\ g' &= \sin t & g &= -\cos t \end{aligned}$$

$$\rightarrow H = -\sin^3 t \cos t + 3 \int \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= -\sin^3 t \cos t + \frac{3}{8} \int \sin^2 2t d2t$$

$$\text{Avec (2)} \rightarrow H = -\sin^3 t \cos t + \frac{3}{8} \left( \frac{2t}{2} - \frac{\sin 4t}{4} \right)$$

$$= -\sin^2 t \sin t \cos t + \frac{3t}{8} - \frac{3 \sin 4t}{32}$$

$$= -\frac{1 - \cos 2t}{2} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{3t}{8} - \frac{3 \sin 4t}{32}$$

$$= -\frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{8} + \frac{3t}{8} - \frac{3 \sin 4t}{32}$$

$$= \frac{3t}{8} - \frac{\sin 2t}{4} + \frac{\sin 4t}{32} \quad (3)$$

Il nous reste à appliquer la formule (3) à (2), avec  $t = 2x$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2^5} \left( \frac{3x}{4} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 8x}{32} \right) = \frac{1}{2^{10}} (24x - 8 \sin 4x + \sin 8x)$$



$$c) I = \int x \left( e^{(x^2)} + 2e^x + 1 \right) dx = \int xe^{x^2} dx + 2 \int xe^x dx + \int x dx$$

Calculons chaque terme :

$$I_1 = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{e^{x^2}}{2}$$

$$I_2 = 2 \int xe^x dx = 2 \left( xe^x - \int e^x dx \right) = 2xe^x - 2e^x \quad (\text{Intégration par parties})$$

$$I_3 = \int x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow I = \frac{e^{x^2}}{2} + 2xe^x - 2e^x + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}}{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}}{\frac{1-x-1-x}{(1+x)(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} - \frac{\left(\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{1+x}\right)(1+x)(1-x)}{4x\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1-x)}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{1+x}}{x} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{1+x}}{x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^3 - (1+x)}{x \left( \sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{1+x} \right)} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 1 - x}{x \left( \sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{1+x} \right)} = \frac{1}{4} \frac{x^2 - 3x + 4}{\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

---

Résolu le 24 juin 2004 Modifié le 6 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

## EXANA108 – Louvain, juillet 2003, série 2.

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{(1-x)^2}$$

- i) Donnez le domaine de  $f$ .
- j) Donnez l'équation des asymptotes s'il y en a.
- k) Donnez le graphe de  $f$  en situant le ou les extrema éventuels.

a)  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Asymptote verticale :  $AV \equiv x = 1$

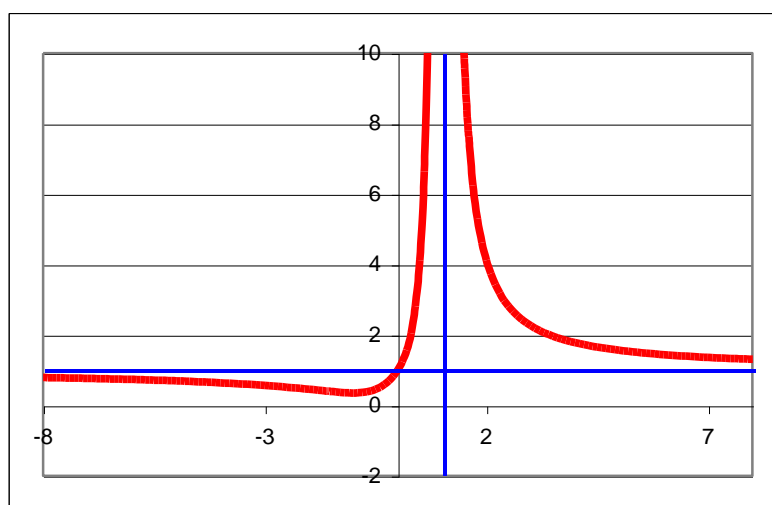
Asymptote horizontale :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{(1-x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow AH \equiv y = 1$

c)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} (4x^3)(1-x)^2 - \sqrt{1+x^4} \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2x^3 + 2}{(1-x)^3 \sqrt{1+x^4}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$\begin{cases} \text{Si } x < -1 & \rightarrow f'(x) < 0 \\ \text{Si } -1 < x < 1 & \rightarrow f'(x) > 0 \end{cases} \rightarrow \text{C'est un minimum : } \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

Note : Il y a également un point d'inflexion en  $(-1.7376, 0.4244)$



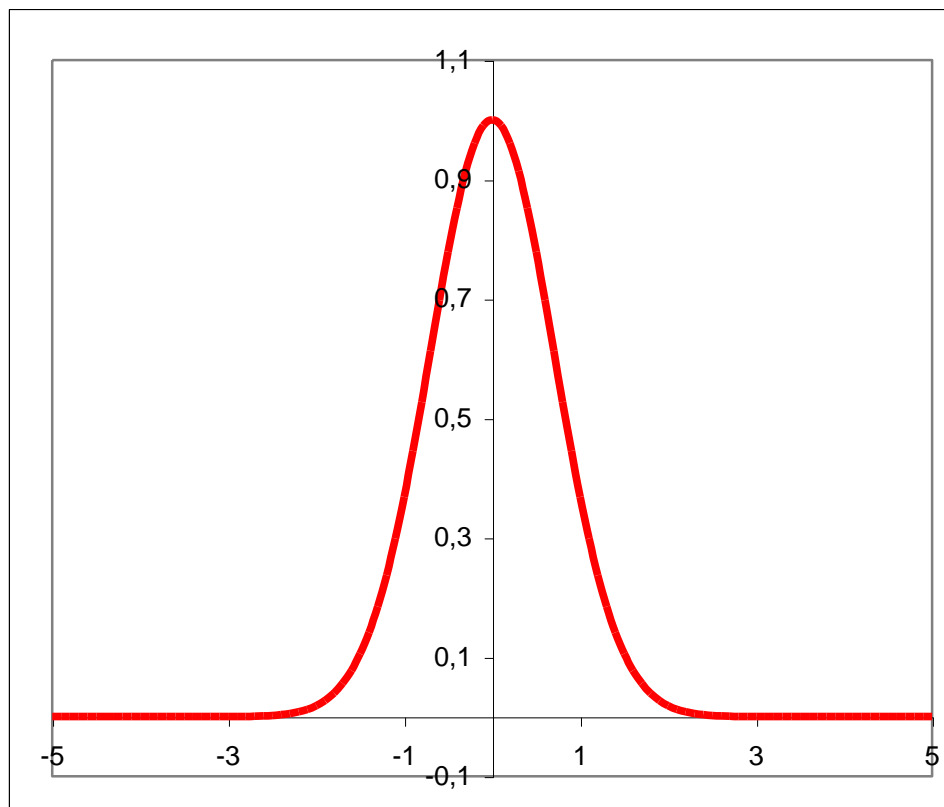
Résolu le 24 juin 2004

## EXANA109 – Louvain, juillet 2003, série 2.

On considère la surface de révolution obtenue par rotation autour de l'axe Oy de la courbe définie par

$$y = e^{-(x^2)}$$

- Donnez un graphe très approximatif de cette courbe ?
- Donnez le volume correspondant à  $0 < h \leq y \leq e^{-(x^2)} \leq 1$
- Quelle est la limite de ce volume quand  $h \rightarrow 0$  ?



a) Le graphique est donné ci-dessus.

b) Utilisons la méthode des tubes.

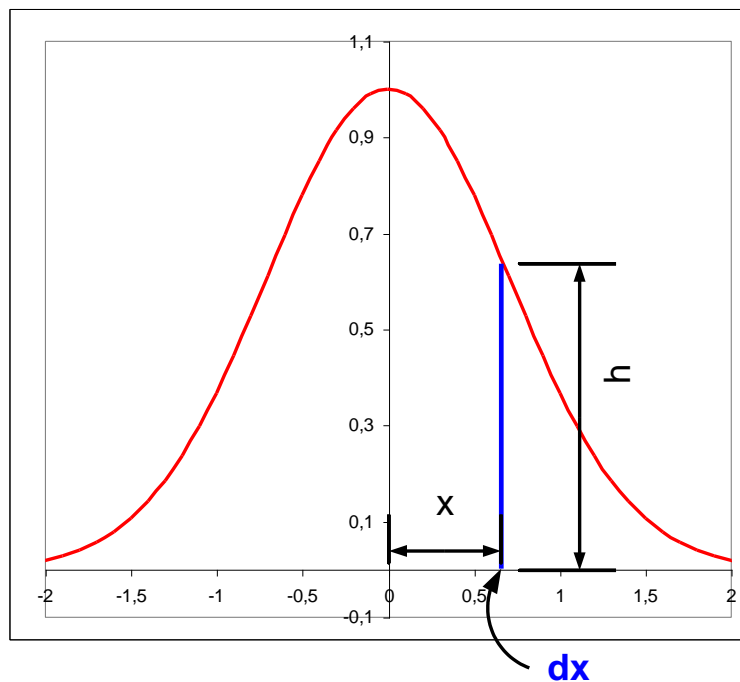
Soit un rectangle de largeur  $dx$  et de hauteur  $h$

En tournant autour de  $Oy$ , ce rectangle engendre un tube d'épaisseur  $dx$  de hauteur  $h$  et de rayon  $x$ . Ce qui correspond à un volume

$$dV = 2\pi x.h.dx \quad \text{avec} \quad h = e^{-x^2}$$

Il suffit d'intégrer entre  $\begin{cases} x = 0 & \text{qui correspond à } h = 1 \\ x = +\infty & \text{qui correspond à } h = 0 \end{cases}$

$$V = 2\pi \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \pi \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(x^2) = -\pi \left[ e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$



c) Si nous voulons faire une limite quand  $h \rightarrow 0$ , il faut faire apparaître  $h$

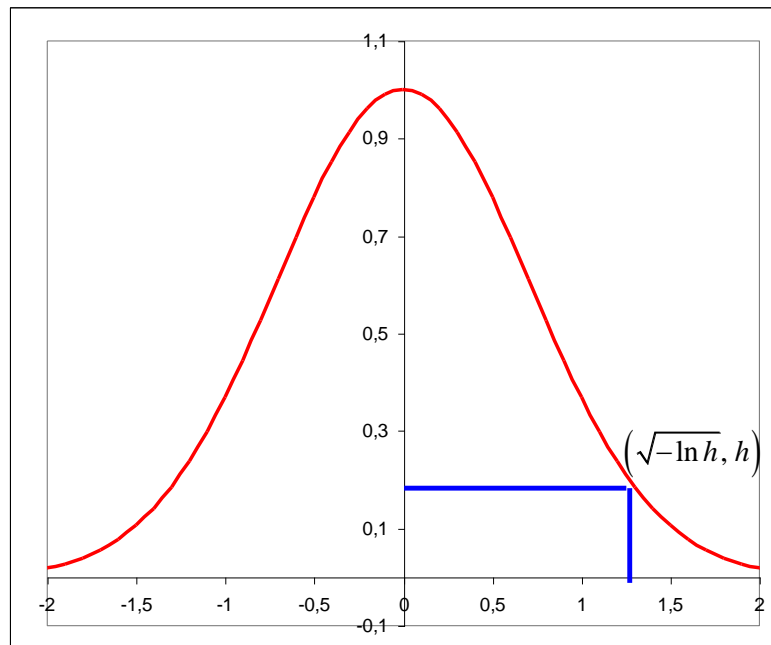
$$\text{Soit } h = e^{-x^2} \rightarrow \ln h = -x^2 \quad x = \sqrt{-\ln h}$$

Le volume cherché sera la somme du volume engendré par le rectangle de longueur  $\sqrt{-\ln h}$  et de hauteur  $h$ , et du volume engendré par la surface située entre les abscisses  $x = \sqrt{-\ln h}$  et l'infini.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi h \left(\sqrt{-\ln h}\right)^2 + 2\pi \int_{\sqrt{-\ln h}}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -2\pi h \ln h - \pi \left[ e^{-x^2} \right]_{\sqrt{-\ln h}}^{+\infty} \\ &= -2\pi h \ln h + \pi e^{\ln h} = -2\pi h \ln h + \pi h \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \lim_{h \rightarrow 0} V = \lim_{h \rightarrow 0} [-2\pi h \ln h + \pi h] = -2\pi \lim_{h \rightarrow 0} [h \ln h] = -2\pi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln h}{\frac{1}{h}}$$

$$= -2\pi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{h}}{-\frac{1}{h^2}} = 2\pi \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$




---

Résolu le 24 juin 2004