

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 11

EXANA0110 – EXANA119

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juin 04

EXANA110 – Louvain, septembre 2003.

$$a) \int \frac{(1+x)^3 - (1-x)^3}{(1+x)^2 - (1-x)^2} dx =$$

$$b) \int e^{\cos^2 x} \sin(2x) dx =$$

$$c) \int \frac{\sin x}{e^x} dx =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2 - 2 \cos x}{x^4} =$$

$$a) I = \int \frac{(1+x)^3 - (1-x)^3}{(1+x)^2 - (1-x)^2} dx = \int \frac{1+3x+3x^2+x^3 - 1+3x-3x^2+x^3}{1+2x+x^2 - 1+2x-x^2} dx = \frac{1}{2} \int (3+x^2) dx = \frac{x}{2} \left(3 + \frac{x^2}{3} \right)$$

$$b) I = \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int e^{\cos^2 x} \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \int e^{\cos^2 x} d(\cos^2 x) = -\frac{1}{4} e^{\cos^2 x}$$

$$c) I = \int \frac{\sin x}{e^x} dx = \int e^{-x} \sin x dx$$

$$f = e^{-x} \quad f' = -e^{-x} \quad \rightarrow I = -\cos x e^{-x} - \int e^{-x} \cos x dx$$

$$g' = \sin x \quad g = -\cos x$$

$$f = e^{-x} \quad f' = -e^{-x} \quad \rightarrow I = -e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x dx$$

$$g' = \cos x \quad g = \sin x$$

$$\rightarrow I = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x^2 - 2 \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2 \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 + 2 \cos x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{24x} = -\frac{1}{12}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA111 – Louvain, septembre 2003.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(1-x)x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$$

- Donnez le domaine de f .
- Donnez l'équation des asymptotes s'il y en a.
- Donnez le graphe de f en situant le ou les extrema éventuels.

a) $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) Asymptote verticale : $AV \equiv x = -1$

Asymptotes horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x|x|} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x|x|} = +1 \rightarrow AH \equiv y = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x|x|} = -1 \rightarrow AH \equiv y = -1 \end{cases}$$

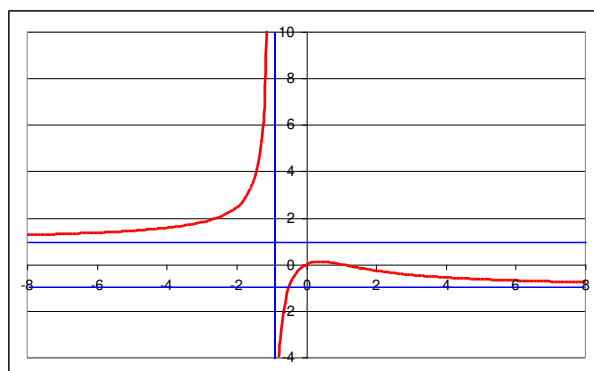
$$c) f'(x) = \frac{(1-2x)(1+x)\sqrt{1+x^2} - (1-x)x \left[\sqrt{1+x^2} + (1+x) \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x \right]}{(1+x)^2 (1+x^2)}$$

$$= \frac{-2x^3 - x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2 (1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0 \\ f'(0) > 0 \text{ et } f'(1) < 0 \end{cases} \text{ Il y a donc un maximum dans l'intervalle } [0, 1]$$

Un calcul exact (sur calculatrice) donne : (+0.3760, +01596)

Il y a aussi un point d'inflexion en (1, 0)



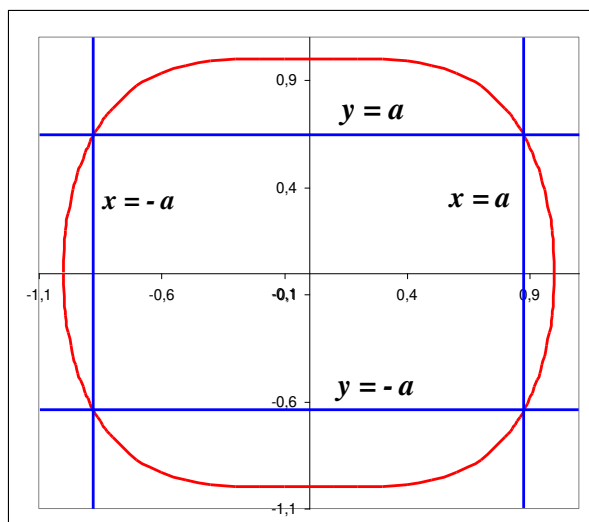
Résolu le 24 juin 2004

EXANA112 – Louvain, septembre 2003.

a) Donnez l'aire maximale d'un rectangle (de côtés parallèles aux axes) inscrits dans la courbe

$$y^2 + x^4 = 1$$

b) Donnez le volume maximal d'un cône obtenu par la rotation d'un triangle d'hypoténuse donné a autour d'un côté adjacent à l'angle droit.



a) Puisque la figure est symétrique, il suffit d'étudier le premier quadrant.

Soit (a,b) un point de la courbe.

Les droites $x = b$ et $y = a$ délimitent avec les axes un rectangle dont la surface est

$$S_1 = ab \quad \text{avec} \quad a^2 + b^4 = 1 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{1 - b^4}$$

$$\text{Donc : } S_1 = b \sqrt{1 - b^4}$$

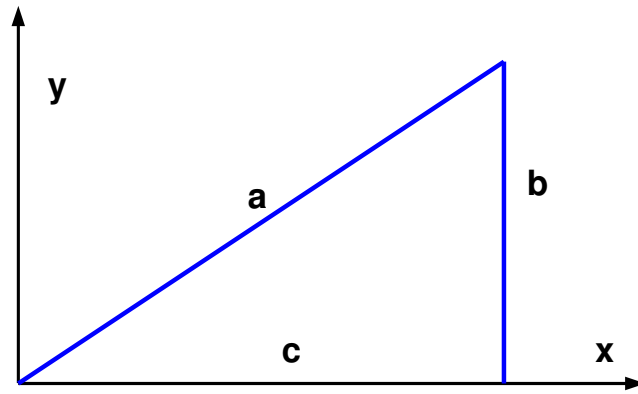
Cette surface sera maximale en un point où la dérivée est nulle :

$$\frac{dS_1}{db} = \sqrt{1 - b^4} + b \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - b^4}} (-4b^3) = \frac{2(1 - b^4) - 4b^4}{2\sqrt{1 - b^4}} = \frac{1 - 3b^4}{\sqrt{1 - b^4}}$$

$$\rightarrow b = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

La surface du rectangle cherché est donc :

$$S = 4S_1 = 4.ab = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{2^2}{3^3}} \approx 2.482$$



b) Le volume sera maximal si l'aire du rectangle est maximale.

$$\text{Aire du triangle : } A = \frac{1}{2}bc = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\rightarrow \frac{dA}{db} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}(-2b)$$

$$\rightarrow a^2 - 2b^2 = 0 \rightarrow a = \sqrt{2} b$$

Autrement dit le triangle est isocèle : $c = b = a \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Le volume du cône est donc : } V = \frac{\pi}{3}b^2c = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 a^3 \approx 0.37a^3$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA113 – Liège, juillet 2004.

Soit

$$f(x) = \frac{ax^2 + be^{-x}}{1+x}$$

Où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

- Déterminer a et b sachant que le graphe de f présente
 - Une asymptote oblique en $y = x - 1$ en $+\infty$
 - Un minimum local en $x = 1$
- Avec les valeurs de a et b identifiées plus haut, la fonction f possède-t-elle d'autres asymptotes et minima ou maxima locaux que ceux identifiés ci-dessus ? (Le calcul de la dérivée seconde peut être évité.)
- Esquissez le graphe de f .

a) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{Si } y = x - 1 \text{ est une asymptote, alors } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + be^{-x}}{1+x} = 1 \rightarrow a = 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + be^{-x}}{1+x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{be^{-x} - x}{1+x} = -1 \text{ Ce qui est bien vérifié.}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - be^{-x})(1+x) - (x^2 + be^{-x})}{(1+x)^2} = \frac{(x+2)(x - be^{-x})}{(1+x)^2}$$

$$\text{Or on a } f'(1) = 0 \rightarrow 1 - be^{-1} = 0 \rightarrow b = e$$

b) La fonction a aussi une asymptote verticale en $x = -1$

Il nous faut encore vérifié que si la fonction a des asymptotes en $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + e^{1-x}}{1+x} = -\infty \quad \text{Pas d'asymptote horizontale}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + e^{1-x}}{x + x^2} \xrightarrow{\text{Hospital}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - e^{1-x}}{1 + 2x} \xrightarrow{\text{Hospital}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + e^{1-x}}{2} = +\infty$$

→ Pas d'asymptote oblique en $x \rightarrow -\infty$

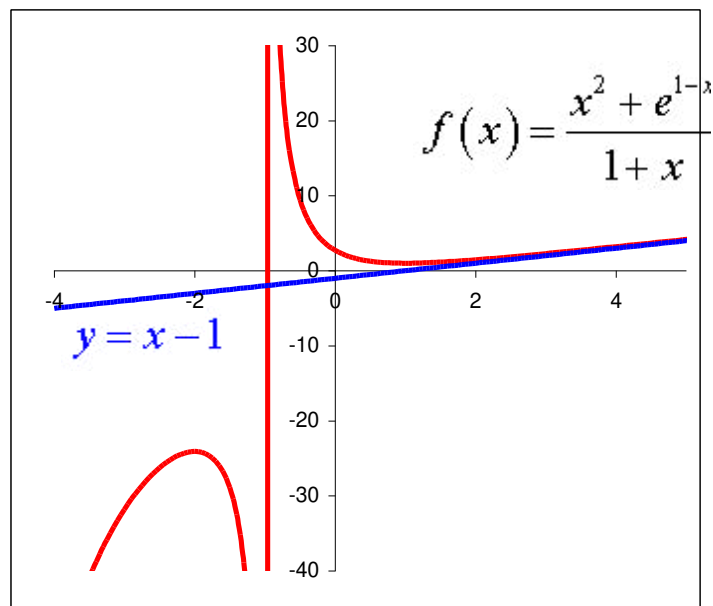
Tableau des signes de $f'(x)$

$f'(x)$ s'annule en $x = -2$ et $x = 1$

	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$		
$x+2$		-	0		+	+	+	+		
$x-e^{-x}$		-	-		-	-	-	0	+	
$\frac{1}{(1+x)^2}$		+	0		-	$\cancel{\neq}$	+	+	+	
f'	$+\infty$	+	0		-	$\cancel{\neq}$	-	0	+	1
f	$-\infty$	\nearrow	Max $y = -4 - e^3$	\searrow		\searrow	min $y = 1$	\nearrow	$+\infty$	

Maximum : $x = -2, y = -4 - e^3$ Minimum : $x = 1, y = 1$

Le tableau permet de tracer la fonction



Résolu le 17 août 04

EXANA114 – Liège, juillet 2004.

Soit

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

Où n est un entier positif ou nul quelconque.

4. Calculez I_0 et I_1

5. Montrez, par une intégration par parties, que

$$I_n = e - n.I_{n-1}$$

Remarque : ne pas calculer explicitement la valeur de I_n

6. Exprimez

$$\int_0^1 u^n e^u du \quad \text{en fonction de } I_n$$

7. Montrez que

$$I_n > I_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) $I_0 = \int_1^e dx = e - 1$

$$I_1 = \int_1^e \ln x dx \quad \text{Par parties} \quad \begin{cases} f = \ln x \\ g' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f' = \frac{1}{x} \\ g = x \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1$$

b) $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \quad \text{Par parties} \quad \begin{cases} f = (\ln x)^n \\ g' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f' = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} \\ g = x \end{cases}$

$$\rightarrow I_n = [x \cdot (\ln x)^n]_1^e - \int_1^e n \cdot (\ln x)^{n-1} dx = e - n.I_{n-1}$$

c) $F = \int_0^e u^n e^u du$

$$\text{Soit } u = \ln x \rightarrow x = e^u \quad \text{avec } u \in]0, 1[\quad \text{et } x \in]1, e[$$

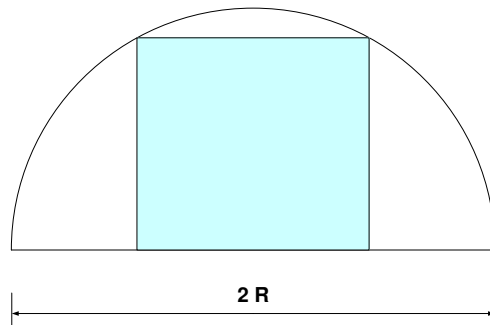
$$\text{Donc : } du = \frac{dx}{x} \quad \rightarrow F = \int_0^e (\ln x)^n dx = I_n$$

d) $\forall x \in]1, e[\rightarrow \ln x \in]0, 1[\quad \text{Donc } (\ln x)^n > (\ln x)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow I_n > I_{n+1}$

Résolu le 17 août 04

EXANA115 – Liège, septembre 2004.

Calculez l'aire du plus grand rectangle inscrit dans un demi-cercle de rayon R . Justifiez qu'il s'agit bien d'un maximum.



Voir figure 1

L'aire du rectangle est : $A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$ avec $x \in]0, R [$

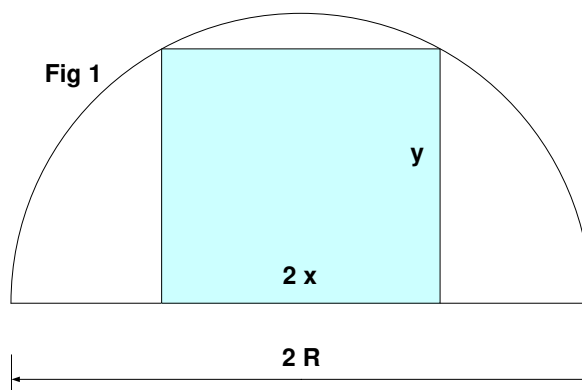
On obtient le maximum en annulant la dérivée :

$$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + 2x \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\rightarrow R^2 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ On ne prend que la racine positive.}$$

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum, il suffit d'étudier le signe de $A'(x)$

	0	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	R	
	+	0	-	
A	0	↗ Max	↘	0



Résolu le 30 septembre 04

EXANA116 – Liège, septembre 2004.

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$$

1. Calculer I_0 et I_1
2. Montrer que, pour toute entier $n \geq 2$

$$I_{n+1} = (n+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1)I_{n-1}$$

3. Exprimez

$$\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$1) I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \quad \text{Intégrons par parties}$$

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \end{cases} \rightarrow I_1 = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$2) \text{ Par parties : } \begin{cases} f(x) = x^{n+1} \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = (n+1)x^n \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$$

$$\rightarrow I_{n+1} = [-x^{n+1} \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$$

$$\text{De nouveau par parties : } \begin{cases} f(x) = x^n \\ g'(x) = \cos x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(x) = nx^{n-1} \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_{n+1} &= (n+1) \left\{ [x^n \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \sin x \, dx \right\} \\ &= (n+1) \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n I_{n-1} \right\} = (n+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n+1) I_{n-1} \end{aligned}$$

$$3) \text{ Soit } x = \sin u \rightarrow u = \arcsin u \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x^2} = \cos u \quad \text{et} \quad du = \cos u \, du$$

$$\text{De plus : } x \in]0, 1[\rightarrow u \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{Donc : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u \sin u \, du = I_1$$

Résolu le 30 septembre 04

EXANA117 – Bruxelles, juillet 2004.

Soit la fonction f de A dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$$

Et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

4. Déterminer le domaine de définition de f (c'est-à-dire le plus grand A possible).
5. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et préciser le domaine de f' et f''
6. Déterminer une équation cartésienne
 - a. De la tangente à C au point d'abscisse 0
 - b. Des asymptotes (éventuelles) de C .
7. Etablir le tableau des variations de f , f' et f'' contenant
 - a. Les racines de f , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
 - b. Les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$
 - c. Les extrema de f , les domaines de croissance et de décroissance de f .
 - d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C
8. Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du d)
9. A partir de la courbe C , tracer les graphes des fonctions g et h dans \mathbb{R} définies par :

- $g(x) = |f(x)|$

- $h(x) = \sqrt{1 + 2x\sqrt{1-x^2}}$

a) $dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

b) $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $dom f'(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \neq dom f(x)$

$f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ $dom f''(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \neq dom f(x)$

c) • $f(0) = 1$ et $f'(x) = 1 \Rightarrow$ La tangente : $y = x + 1$

• Il n'y a pas d'asymptote

d) Racines:

$f(x) = x + \sqrt{1-x^2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,7$

$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$

$f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ Pas de racine. $f''(x)$ est toujours $< 0 \Rightarrow$ concavité < 0

Extrema

$f'(x) = 0$ si $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

C'est un maximum car $\begin{cases} x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$

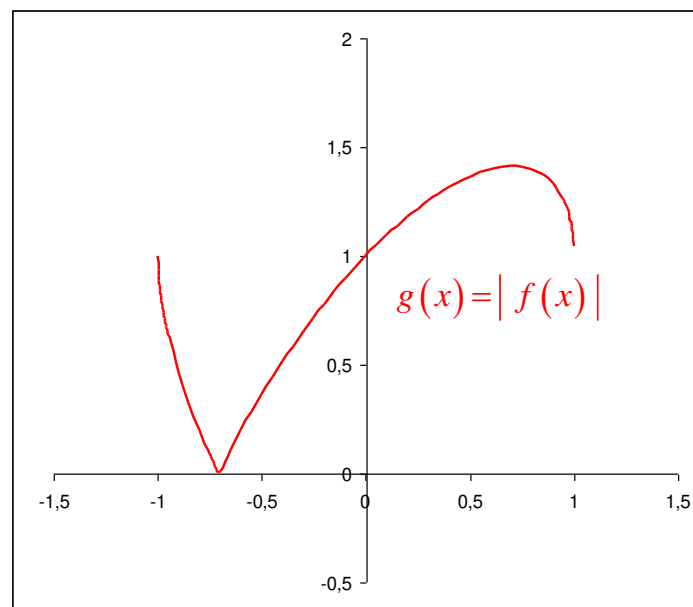
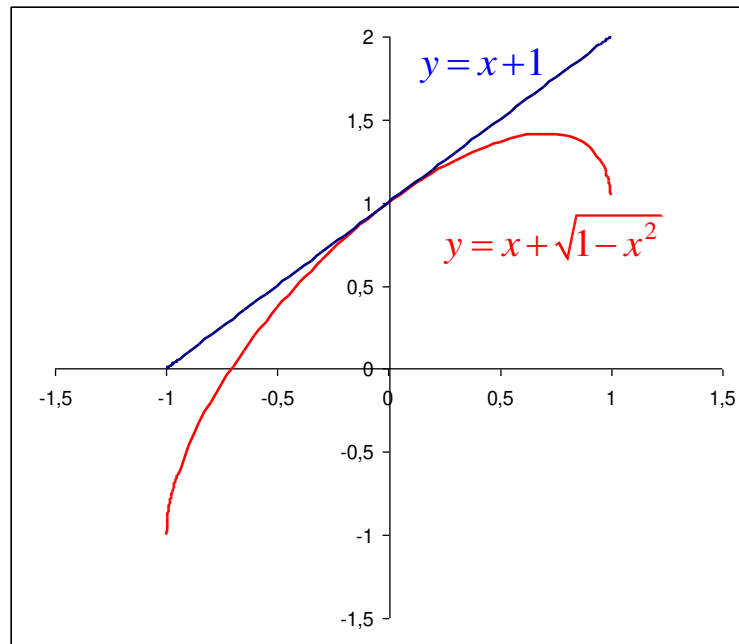
Tableau

	1	-0,7	0,7	1
f'	+	+	0	-
f''	-	-	-	-
f	-	0	+	+
	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\searrow
Concavité			\cap	

f) $g(x) = |f(x)|$ Le traçage ne présente aucune difficulté

Pour $h(x)$, il suffit de remarquer que $f^2(x) = 1 + 2x\sqrt{1-x^2} = h^2(x)$

\Rightarrow les graphes de $g(x)$ et $h(x)$ sont identiques



Résolu le 22 décembre 04

EXANA118 – Bruxelles, juillet 2004.

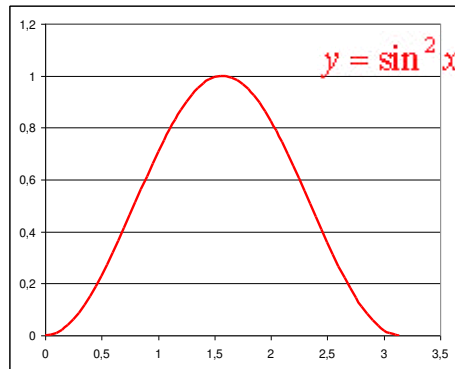
Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, soient

- S la région du plan $Oxyz$ définie par

$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin^2 x\}$$

- D le solide engendré par la rotation d'un tour complet de S autour de l'axe Ox

- Faire le croquis de S
- Calculer l'aire de S
- Calculer le volume de D



$$b) S = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$h = \sin x \quad h' = \cos x$$

$$g' = \sin x \quad g = -\cos x$$

$$\rightarrow S = -[\sin x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$\rightarrow 2S = [x]_0^{\pi} \rightarrow \boxed{S = \frac{\pi}{2}}$$

$$c) D = \pi \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

$$h = \sin^3 x \quad h' = 3 \sin^2 x \cos x$$

$$g' = \sin x \quad g = -\cos x$$

$$\rightarrow D = \pi \left\{ -[\cos x \sin^3 x]_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx \right\}$$

$$= 3\pi \int_0^{\pi} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = 3\pi \left[\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx \right]$$

$$= 3\pi(S - D)$$

$$\rightarrow \boxed{D = \frac{3\pi S}{4} = \frac{3\pi^2}{8}}$$

Résolu le 22 décembre 04

EXANA119 – Bruxelles, juillet 2004.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction F_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$F_n(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$$

- d. Calculer $F_0(t)$ et $I_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_0(t)$
- e. Exprimer $F_n(t)$ en fonction de $F_{n-1}(t)$
- f. Démontrer par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} F_n(t)$ existe et $I_n = nI_{n-1}$
- g. Calculer I_6

a) $F_0(t) = \int_0^t e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^t = -e^{-t} + 1$

$$I_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_0(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{-t} + 1) = 1$$

b) $F_n(t) = \int_0^t x^n e^{-x} dx$

Par parties :
$$\begin{array}{ll} h = x^n & h' = nx^{n-1} \\ g' = e^{-x} & g = -e^{-x} \end{array}$$

$$\rightarrow F_n(t) = [-e^{-x} x^n]_0^t + n \int_0^t x^{n-1} e^{-x} dx = -t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)$$

c) Soit $n = 1$, vérifions $I_1 = I_0$. En effet,

$$F_1(t) = \int_0^t x e^{-x} dx = [-e^{-x} x]_0^t + \int_0^t e^{-x} dx = -t e^{-t} + F_0(t) = -t e^{-t} + 1$$

$$\text{et } I_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t e^{-t} + 1) = 1 = I_0$$

Démontrons maintenant $I_n = nI_{n-1}$

De b) on a $F_n(t) = -t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_n &= \lim_{t \rightarrow +\infty} F_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t^n e^{-t} + nF_{n-1}(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t^n e^{-t}) + n \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{n-1}(t) \\ &= nI_{n-1} \end{aligned}$$

d) $I_6 = 6I_5 = 6 \times 5I_4 = 6 \times 5 \times 4I_3 = 6 \times 5 \times 4 \times 3I_2 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2I_1$
 $= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$

Résolu le 22 décembre 04