

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 13**

EXANA0130 – EXANA139

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Mars 2005

## EXANA130 – Louvain, septembre 2004.

a) Calculez l'intégrale :

$$I = \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx$$

b) Calculez l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{5}{9x^2 - 6x + 2} dx$$

c) Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = x^{\ln x}$$

d) Sans utiliser la règle de l'Hospital, calculez la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin a - \sin x}{a - x}$$

---

a) Remarquons que  $f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \rightarrow f(x)$  est négatif dans l'intervalle  $]-1, 2[$ . Par conséquent,

$$I = \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-3}^{-1} (x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^0 (x^2 - x - 2) dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-1} - \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^0 = \frac{59}{6}$$

$$\text{b) } I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{5dx}{9x^2 - 6x + 2} = 5 \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(3x-1)^2 + 1} = \frac{5}{3} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{d(3x-1)}{(3x-1)^2 + 1}$$

$$= \frac{5}{3} \left[ \arctan(3x-1) \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} \left[ \arctan\left(\frac{9}{2} - 1\right) - \arctan(-1) \right]$$

$$= \frac{5}{3} \left( \arctan \frac{7}{2} + \frac{+\pi}{4} \right) \approx 3.463$$

c)  $f(x) = x^{\ln x}$  or  $x = e^{\ln x} \rightarrow f(x) = e^{\ln^2 x}$

$$f'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x \cdot x^{\ln x}}{x} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$$

$$\text{d) } L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin a - \sin x}{a - x}$$

Posons  $h = a - x \rightarrow a = x + h$  et donc si  $x \rightarrow a, h \rightarrow 0$

$$\rightarrow L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \text{ ce qui est la définition de la dérivée de } \sin x$$

$$\rightarrow L = \lim_{x \rightarrow a} (\sin x)' = \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

---

Résolu le 7 mars 2005

## EXANA131 – Louvain, septembre 2004.

Soit un morceau de charbon de forme parfaitement sphérique de rayon initial  $r_0$  qui est en train de brûler dans un feu. Supposez que le volume de charbon consommé par unité de temps est proportionnel à la surface de charbon exposée à l'air. Pour simplifier les calculs, supposez que toute la surface du morceau est exposée à l'air.

Quelle est le rayon du morceau en fonction du temps ? Dans combien de temps le morceau sera-t-il entièrement consommé ?

---

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{et} \quad s = 4\pi r^2$$

Si le volume de la sphère consommé par unité de temps est proportionnel

$$\text{à la surface exposée : } \frac{dV}{dt} = -kS \rightarrow \frac{4\pi}{3} dr^3 = -k4\pi r^2 dt \rightarrow dr = -kdt$$

$$\text{On intègre : } \int r dt = -k \int dt \rightarrow r = -kt + C$$

La constante d'intégration est donnée par les conditions initiales :

$$t = 0 \rightarrow r = r_0 \quad \text{et donc} \quad C = r_0$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{r = r_0 - kt} \quad \text{et le morceau sera consommé en un temps : } \boxed{t = \frac{r_0}{k}}$$

---

Résolu le 7 mars 2005

## EXANA132 – Liège, juillet 2005.

On définit la seconde intégrale eulérienne  $B(m, n)$  par

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

quels que soient les réels  $m$  et  $n$  strictement positifs

1. Calculer  $B(1, 2)$
  2. Calculer  $B(3/2, 1/2)$
  3. Montrer que  $B(m, n) = B(n, m)$  en utilisant un changement adéquat de variable.
-

$$a) B(1,2) = \int_0^1 x^0 (1-x)^1 dx = - \left[ \frac{(1-x)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

b) Première méthode

$$B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

$$\text{Posons } t^2 = \frac{x}{1-x} \rightarrow x = \frac{t^2}{1+t^2} \rightarrow dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\text{Si } x=0, t=0; \text{ si } x=1, t=+\infty \rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dx \quad (1)$$

$$\text{Décomposons } \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{At^2+Bt+C}{(1+t^2)^2}$$

$$\text{On trouve après calculs : } A=1, B=0, C=-1 \rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2} dx$$

$$\text{Le premier terme donne } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dx = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Le deuxième terme est beaucoup plus compliqué à calculer.

Essayons de simplifier le problème. Nous savons que la dérivée des formes du type  $\left(\frac{u}{v}\right)'$

sont de la forme  $\frac{1}{v^2}$ . Posons nous la question de voir si dans notre cas nous ne pourrions pas

$$\text{trouver une fonction } u \text{ telle que } \left(\frac{u}{1+t^2}\right)' = \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}$$

Supposons de plus que  $u = at + b$ . Nous obtenons

$$\left(\frac{at+b}{1+t^2}\right)' = \frac{a(t^2-1) - (at+b)t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{-at^2 - 2bt + a}{(1+t^2)^2}$$

Nous voyons que  $a = -1$  et  $b = 0$  peuvent convenir.

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2} dx = \int_0^{+\infty} d\left(\frac{-t}{1+t^2}\right) = \left[\frac{-t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} = 0$$

$$\text{Conclusion : } B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

### Deuxième méthode

On fait le même changement de variable et on repart de (1):  $B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dx$

Effectuons une intégration par parties

$$f(t) = t \quad \rightarrow \quad f'(t) = 1$$
$$g'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \quad \rightarrow \quad g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

$$\rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[ \frac{t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

### Troisième méthode

$$\text{On a } B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

$$\text{Posons : } x = \sin^2 \theta \rightarrow \theta = \arcsin \sqrt{x} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ et } dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{1-\sin^2 \theta}} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$
$$= \left[ \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{c) } B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$\text{Soit } y = 1-x \rightarrow dx = -dy \text{ et } \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \\ x = 0 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow B(m, n) = -\int_1^0 (1-y)^{m-1} y^{n-1} dy = \int_0^1 y^{n-1} (1-y)^{m-1} dy = B(n, m)$$

---

Résolu le 7 août 2005. Modifié le 16 novembre 05

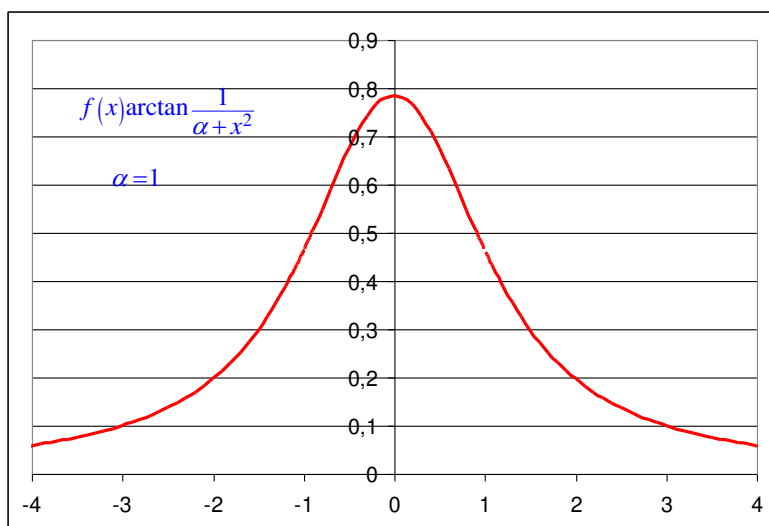
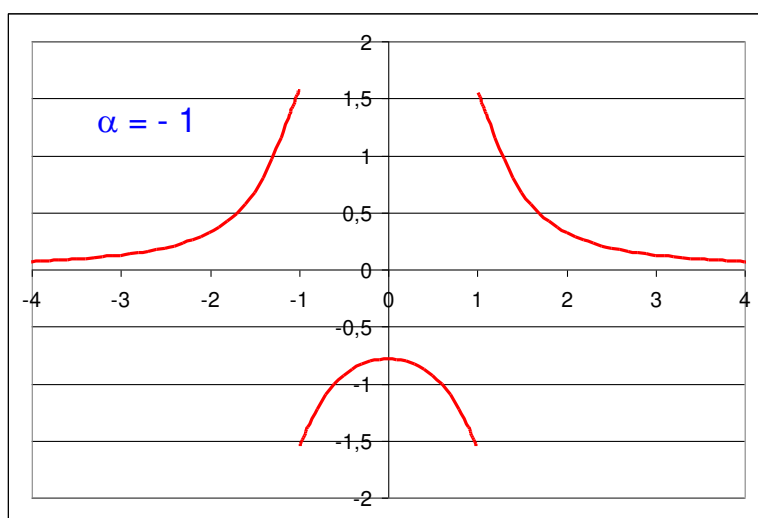
## EXANA133 – Liège, juillet 2005.

On considère la fonction

$$f(x) = \arctan \frac{1}{\alpha + x^2}$$

où  $\alpha$  désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu de  $\alpha$ ,

- Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de  $f$
- Déterminer les asymptotes éventuelles
- Rechercher les extrema éventuels et justifier leur nature
- Montrez, sans localiser précisément les points d'inflexion que la concavité de  $f$  pour  $|x|$  grand est opposée à la concavité de  $f$  au voisinage de  $x = 0$
- Esquissez le graphe.





a) Supposons  $\alpha > 0$

- $\text{dom } f(x) = \mathbb{R}$ .

- $f(x)$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

- Il n'y a pas d'asymptote verticale.

Il y a une asymptote horizontale car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow AH \equiv y = 0$

Il n'y a pas d'asymptote oblique (puisque'il y a une AH)

- $f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(\alpha + x^2)^2}} \frac{-2x}{(\alpha + x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 + 1}$

Il y a un extrema en  $x = 0$ . C'est un maximum car  $\begin{cases} x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \\ x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$

Les coordonnées du maximum sont  $\left(0, \arctan \frac{1}{\alpha}\right)$

- $f''(x) = \frac{2(3x^4 + \alpha x^2 - 1 - \alpha^2)}{(x^4 + 2\alpha x^2 + 1 + \alpha^2)^2}$

Donc :  $f''(0) = \frac{-2(1 + \alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^2} < 0$  et  $f''(x \gg \gg) \approx \frac{2 \cdot 3x^4}{x^4} = 6 > 0$

Les concavités sont opposées

b) Supposons  $\alpha < 0$

- $\text{dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\}$

- La fonction n'est pas dérivable ni continue en  $x = -\sqrt{\alpha}$  et  $x = \sqrt{\alpha}$  car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\sqrt{\alpha}^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\sqrt{\alpha}^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \sqrt{\alpha}^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{\alpha}^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Il n'y a pas d'asymptote verticale (à cause de ce que l'on vient de voir).

Le reste est le même que dans le cas précédent.

## EXANA134 – Mons, juillet 2005.

Le coût de production d'acier résulte de la somme de 2 termes.

- Une partie reprenant les coûts de main d'œuvre et d'amortissement du matériel. Cette partie est directement proportionnelle au temps :  
 $c_1 = 125 \times t$
- Une partie qui est fonction de la vitesse de production  $v$  (exprimée en tonnes/heure) :  $c_2 = 5 \cdot (10)^{-6} \times v^3 \times t$ .

Déterminez la vitesse optimale de production d'une quantité de 200 tonnes, au coût minimale. Donnez une valeur numérique approchée de la vitesse optimale.

---

Le temps de production est relié à la vitesse par  $t = \frac{q}{v}$  où  $q$  est la quantité produite.

$$\text{Ici : } t = \frac{200}{v}$$

$$\text{Soit } c \text{ le coût total : } c = c_1 + c_2 = 125 \cdot \frac{200}{v} + 5 \cdot 10^{-6} \cdot v^3 \cdot \frac{200}{v} = \frac{25 \cdot 10^3}{v} + 2 \cdot 10^{-3} v^2$$

Le coût sera minimal pour  $v$  annulant la dérivée de  $c$  par rapport à  $v$

$$\frac{dc}{dv} = -\frac{25 \cdot 10^3}{v^2} + 2 \cdot 10^{-3} v = 0 \rightarrow v = 232.1 \text{ tonnes/h}$$

Ce qui correspond à :  $t = 0.862$  et  $c = 161.64$

---

Résolu le 15 août 2005

## EXANA135 –ERM, 2004.

a) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1-x)^2$$

b) Etudier la fonction (de la variable réelle  $x$ ) :

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique)

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 1)^2 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x - 1)^2}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\ln x - 1) \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2(\ln x - 1)}{\frac{1}{x}} \\
 &\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0
 \end{aligned}$$

b) 1) dom  $f(x) = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{e\}$

2) Racine :  $\ln x - 2 = 0 \rightarrow x = e^2 \approx 7.4$

3) AO  $\equiv x = e$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} = 1 \rightarrow \text{AH} \equiv y = 1$$

Notons aussi que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} \xrightarrow{\text{Hospital}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

$$4) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - (\ln x - 2) \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2} = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$$

La dérivée est toujours positive dans le domaine et donc  $f(x)$  est toujours croissante

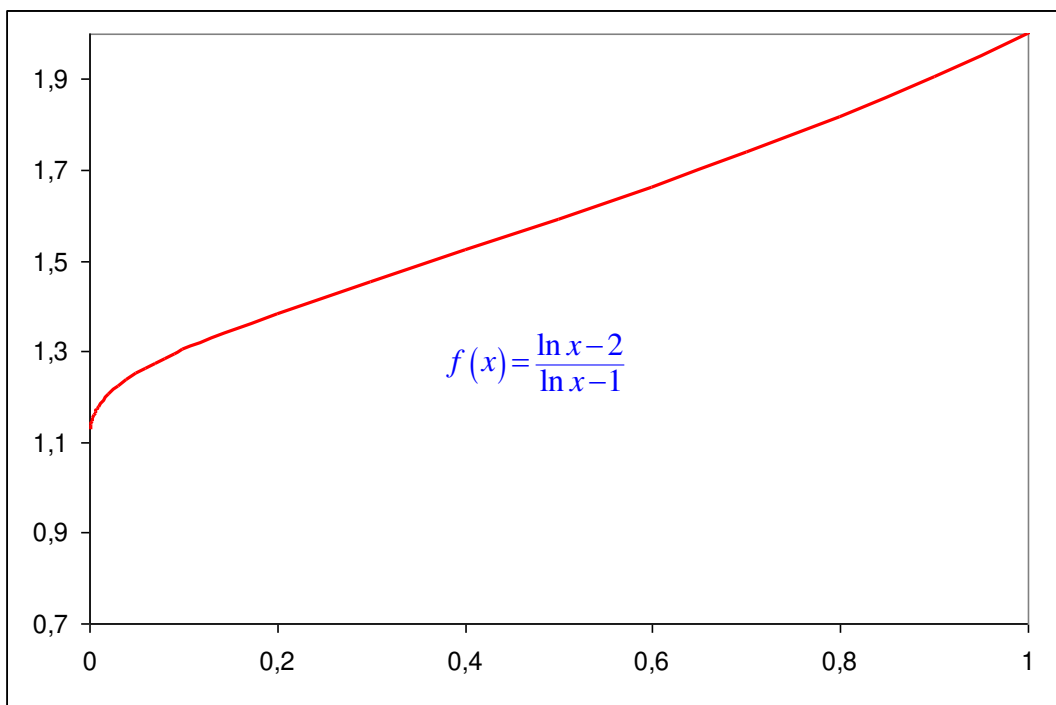
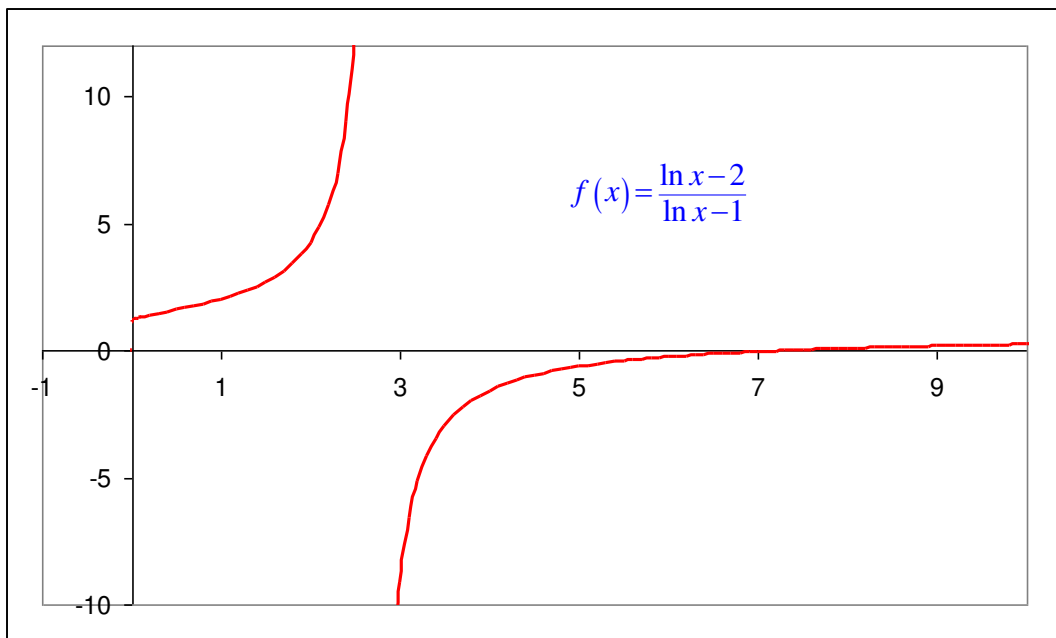
Donc, il n'y a pas d'extremums

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2(\ln x - 1)^4} \left( (\ln x - 1)^2 + x \cdot 2(\ln x - 1) \frac{1}{x} \right) = -\frac{\ln x + 1}{x^2(\ln x - 1)^3}$$

	0	$\frac{1}{e}$	$e$	
$-(\ln x + 1)$	/	-	0	+ + +
$\ln x - 1$	/	-	-	0 +
$f''(x)$	/	+	0	- / 0

$\rightarrow$  un point d'inflexion  $x = \frac{1}{e} \approx 0.37$

Ce point d'inflexion est difficile à voir. La figure 2 donne un zoom pour le visualiser.



Résolu le 15 août 2005

## EXANA136 – ERM, 2004.

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) I_1 = \int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}} \frac{12}{x\sqrt{36-x^2}} dx$$

$$b) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \cos^2 x) dx$$

$$a) I_1 = \int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}} \frac{12}{x\sqrt{36-x^2}} dx$$

$$\text{Posons : } t^2 = 36 - x^2 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{36-t^2} \rightarrow dx = -\frac{t}{\sqrt{36-t^2}} dt \\ \text{si } x = 4\sqrt{2} \rightarrow t = 2 \\ \text{si } x = 3\sqrt{3} \rightarrow t = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = -\int_3^2 \frac{12}{36-t^2} dt = \int_2^3 \frac{dt}{6-t} + \int_2^3 \frac{dt}{6+t} = \left[ \ln \left| \frac{6+t}{6-t} \right| \right]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0.4055$$

$$b) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \cos^2 x) dx$$

$$\text{Par parties : } \begin{cases} f' = \cos x \rightarrow f = \sin x \\ g = \ln(1 + \cos^2 x) \rightarrow g' = -\frac{2 \cos x \sin x}{1 + \cos^2 x} \end{cases}$$

$$I_2 = \left[ \sin x \ln(1 + \cos^2 x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin^2 x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Le premier terme est nul.

$$\text{Posons : } t = \sin x \rightarrow \begin{cases} dt = \cos x dx \\ 1 + \cos^2 x = 2 - t^2 \\ \text{si } x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \\ \text{si } x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_2 &= \int_0^1 \frac{2t^2}{2-t^2} dt = -2 \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{4}{2-t^2} dt = -2 + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-t} dt + \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+t} dt \\ &= -2 + \sqrt{2} \left[ \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| \right]_0^1 = -2 + \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \approx 0.4929 \end{aligned}$$

Résolu le 15 août 2005

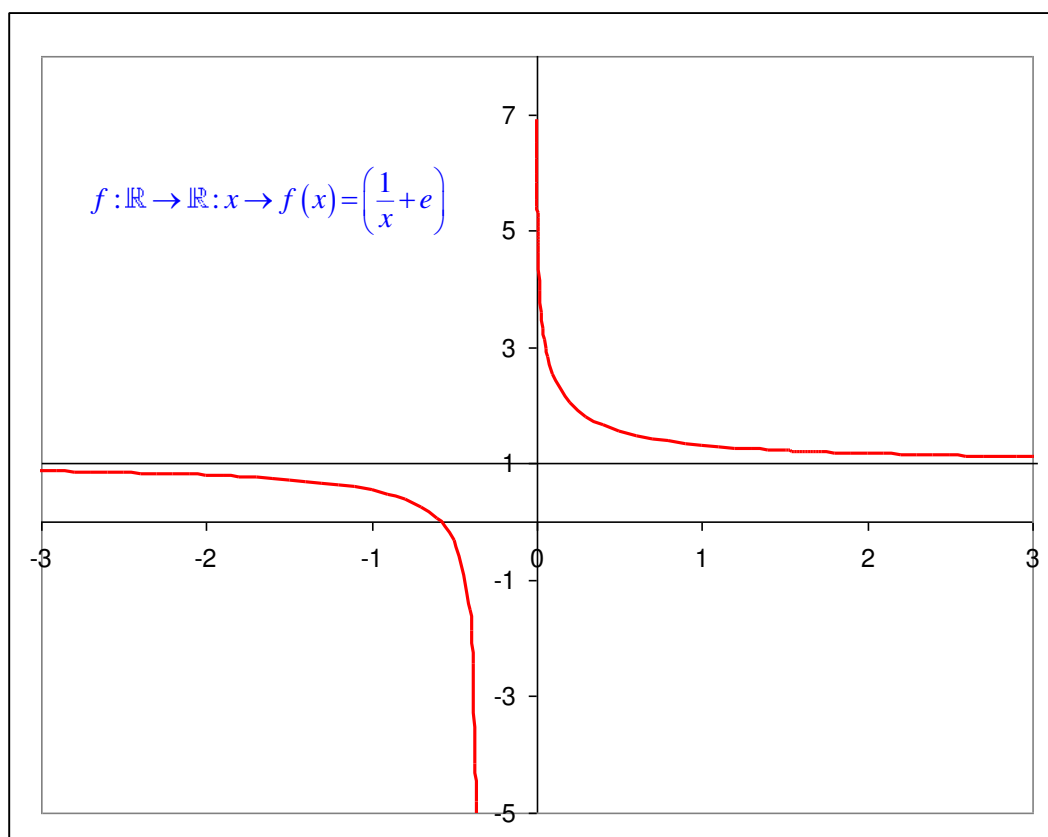
## EXANA137 – ERM, 2004.

Etudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + e\right)$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique)

Remarque :  $e \approx 2.7$



$$1) \text{ On doit avoir : } \frac{1}{x} + e > 0 \rightarrow \frac{1}{x} > -e$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{e} \rightarrow x > 0 \\ x < 0 \rightarrow x < -\frac{1}{e} \rightarrow x < -\frac{1}{e} \end{array} \right\} \rightarrow \text{dom } f : ]-\infty, -\frac{1}{e}[ \cup ]0, +\infty[$$

$$2) \text{ Racine : } \ln\left(\frac{1}{x} + e\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{x} + e = 1 \rightarrow x = \frac{1}{1-e} \approx -0.582$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} f(x) = -\infty \rightarrow \text{AV}_G \equiv x = -\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \rightarrow \text{AV}_D \equiv x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{AH} \equiv y = 1$$

$$4) f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + e} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x(1+ex)} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 : f(x) \text{ décroissante} \\ x < -\frac{1}{e} \rightarrow f'(x) < 0 : f(x) \text{ décroissante} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'extremums

$$5) f''(x) = \frac{1}{x^2(1+ex)^2} (1+ex+ex) = \frac{1+2ex}{x^2(1+ex)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ si } 1+2ex = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2e} \text{ qui est hors du domaine}$$

$$x > 0 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ a une concavité positive}$$

$$x < -\frac{1}{e} \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ a une concavité négative}$$

Résolu le 15 août 2005

## EXANA138 – ERM, 2004.

Calculer les intégrales suivantes :

$$a) I_1 = 18 \int_0^{\ln 2} e^{3x} \ln(1+e^x) dx$$

$$b) I_2 = \int_0^2 \frac{5t^2}{(1+t)(4+t^2)} dt$$

---

$$a) I_1 = 18 \int_0^{\ln 2} e^{3x} \ln(1+e^x) dx$$

$$\text{Par parties : } \begin{cases} f' = e^{3x} & \rightarrow f = \frac{e^x}{3} \\ g = \ln(1+e^x) & \rightarrow g' = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = 6 \left\{ \left[ e^{3x} \ln(1+e^x) \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \frac{e^{4x}}{1+e^x} dx \right\}$$

Soit  $A$  le premier terme de la parenthèse:  $A = e^{\ln 2^3} \ln(1+e^{\ln 2}) - \ln 2 = 8 \ln 3 - \ln 2$

Soit  $B$  le deuxième terme de la parenthèse :

$$B = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{4x}}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{3x}}{1+e^x} d(e^x)$$

$$\text{Posons } t = e^x \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 & \rightarrow t = 2 \end{cases} \rightarrow B = \int_1^2 \frac{t^3}{1+t} dt = \int_1^2 \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$\rightarrow B = \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) \right]_1^2 = \frac{11}{6} + \ln 2 - \ln 3$$

$$\text{Finalement : } I_1 = 6(A - B) = 6 \left( 8 \ln 3 - \ln 2 - \frac{11}{6} - \ln 2 + \ln 3 \right) = 54 \ln 3 - 12 \ln 2 - 11 \approx 40$$



$$b) I_2 = \int_0^2 \frac{5t^2}{(1+t)(4+t^2)} dt$$

Décomposons en fractions rationnelles :  $\frac{5t^2}{(1+t)(4+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{4+t^2}$

Après identification, nous obtenons 
$$\begin{cases} a+b=5 \\ b+c=0 \\ 4a+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=-4 \end{cases}$$

$$\rightarrow I_2 = \int_0^2 \left( \frac{1}{1+t} + \frac{4t}{4+t^2} - \frac{4}{4+t^2} \right) dt = \left[ \ln(1+t) \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2d(t^2+4)}{4+t^2} + 2 \int_0^2 \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \left[ \ln(1+t) + 2 \ln(4+t^2) - 2 \arctan \frac{t}{2} \right]_0^2 = \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{\pi}{2} \approx 0.9141$$

---

Résolu le 15 août 2005

## EXANA139 – ERM, 2003.

Calculer :

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{96}{x^4 \sqrt{4-x^2}} dx$$

---

$$\text{Soit: } x = 2 \sin t \rightarrow \begin{cases} dx = 2 \cos t dt \\ x = \sqrt{3} \rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\ x = 1 \rightarrow \sin t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow I &= \frac{96}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos t}{2^4 \sin^4 t \cdot 2 \cos t} dt = \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^4 t} dt = \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^4 t} dt \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 t} dt + \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t} dt = \frac{6}{\sqrt{3}} [-\cot t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right] + \frac{6}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^4 t} \cdot d \tan t \quad \text{car } d \tan t = \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= 4 + \frac{6}{\sqrt{3}} \left[ -\frac{1}{3} \cot^3 t \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 4 + \frac{6}{\sqrt{3}} \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 + \frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 \right] \\ &= 4 + 6 \left( -\frac{1}{27} + 1 \right) = 4 + \frac{52}{9} = \frac{88}{9} \end{aligned}$$

---

Résolu le 27 juillet 2005