

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 14

EXANA0140 – EXANA149

<http://matheux.ovh/Accueil.html>

Jacques Collot

Nov 2005

EXANA140 – ERM, 2003.

Calculer :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right) \sin x}$$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^3 x \sin x - \sin x) \left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right) \left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right) \cos x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^3 x - 1) \left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1) (\cos^2 x + \cos x + 1) \left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{(1 - \cos^2 x) \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos^2 x + \cos x + 1) \left(\sqrt{\sin^2 x + 1} + 1\right)}{(1 + \cos x) \cos x} = -3 \end{aligned}$$

Résolu le 17 juillet 2005

EXANA141 – ERM, 2003.

Etudier la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow f(x) = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right|$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique)

1) dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

2) Zéros :
$$\begin{cases} x > 1 \rightarrow \frac{x}{x-1} = 1 \rightarrow \text{pas de racine} \\ x < 1 \rightarrow \frac{x}{x-1} = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) AV:

a) $x = 0$ avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

b) $x = 1$ avec $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

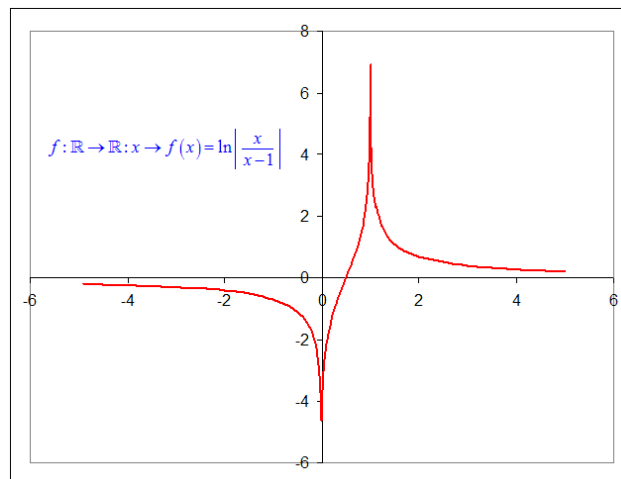
4) AH: $y = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

5) $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)} \rightarrow f' \begin{matrix} 0 & 1 \\ - & + \\ f & \searrow / \nearrow / \searrow \end{matrix}$

Il n'y a pas d'extremums

6) $f''(x) = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} \rightarrow$ un point d'inflexion en $x = \frac{1}{2}$

$f''(x)$ a le signe de $2x-1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$ concavité négative et $x > \frac{1}{2}$ concavité positive



Résolu le 27 juillet 2005

EXANA142 – Liège, septembre 2005.

a) Soit la fonction $f(x) = e^{-\alpha x} + \beta x$ dépendant d' α et β réels avec $\alpha > 0$

- i) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivation de f .
- ii) Déterminer les asymptotes éventuelles de f .
- iii) Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles f admet au moins un extremum. Donner la nature de l'extremum (ou des extrema).

b) Déterminer les conditions sur α et β pour que les graphes des fonctions $g(x) = e^{-\alpha x}$ et $h(x) = \beta x$ soient tangents au point d'abscisse $x = -1$.

a) i) - Aucune restriction sur le domaine : $dom f = \mathbb{R}$

- La fonction $g(x) = e^{-\alpha x}$ est continue sur \mathbb{R} (exponentielle standard) et la fonction $h(x) = \beta x$ l'est aussi (droites passant par l'origine). La somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} est une fonction continue sur \mathbb{R} . Le domaine de continuité est donc \mathbb{R} .

- La dérivée de f est $f'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} + \beta$, exponentielle standard sans restriction donc, le domaine de dérivation de f est \mathbb{R} .

ii) - Aucune asymptote verticale envisageable ($dom f : \mathbb{R}$).

- Pour observer une asymptote horizontale ou oblique, on utilise la méthode de Cauchy.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha x} + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} + \beta \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\alpha e^{-\alpha x}}{1} + \beta = \beta$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - \beta x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} + \beta x - \beta x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} = 0$$

La fonction f admet donc une asymptote oblique d'équation $y = \beta x$

iii) $f'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} + \beta$. Elle admet un ou plusieurs extremum si elle s'annule.

$$\text{Il faut donc } \alpha e^{-\alpha x} = \beta \Leftrightarrow e^{-\alpha x} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -\alpha x = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1/\alpha}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{\sqrt[\alpha]{\alpha}}{\sqrt[\alpha]{\beta}}\right)$$

Pour que cette valeur unique soit possible, sachant que $\alpha > 0$ (énoncé), il faut $\beta > 0$.

Pour voir la nature de l'extremum, on calcule la dérivée seconde en son point

pour y étudier la concavité : $f''(x) = \alpha^2 e^{-\alpha x}$ est une exponentielle standard et donc toujours > 0 .

La concavité est donc partout vers le haut et la nature de notre extremum est donc en fait un minimum.

b) La fonction $h(x) = \beta x$ est une droite passant par l'origine et de coefficient angulaire β .

• Pour qu'elle soit tangente à $g(x) = e^{-\alpha x}$, par définition du nombre dérivée, il faut

$$\text{d'abord que } g'(-1) = \beta \Leftrightarrow -\alpha e^{-\alpha(-1)} = \beta \Leftrightarrow -\alpha e^{\alpha} = \beta \Leftrightarrow e^{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

• Pour qu'il y ait tangence, il faut maintenant que $g(-1) = h(-1) \Leftrightarrow e^{\alpha} = -\beta \Leftrightarrow \alpha = \ln(-\beta)$

• Pour que ces deux conditions soient possibles, il faut que $\alpha > 0$ et donc que $\beta < 0$.

Les seules valeurs correspondantes aux 2 conditions simultanées sont $\alpha = 1$

et donc $\beta = -e$.

EXANA143 – Liège, septembre 2005.

a) Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x dx$ et montrer que $A = B$.

b) Démontrer plus généralement, que, si f est continue sur $[0, a]$,

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

Interpréter et justifier graphiquement cette propriété.

c) Utiliser la propriété b) pour transformer l'expression

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Calculer ensuite I_n et vérifier avec $n = 2$.

• Par parties : $f = x \rightarrow f' = dx$

$g' = \sin x \rightarrow g = -\cos x$

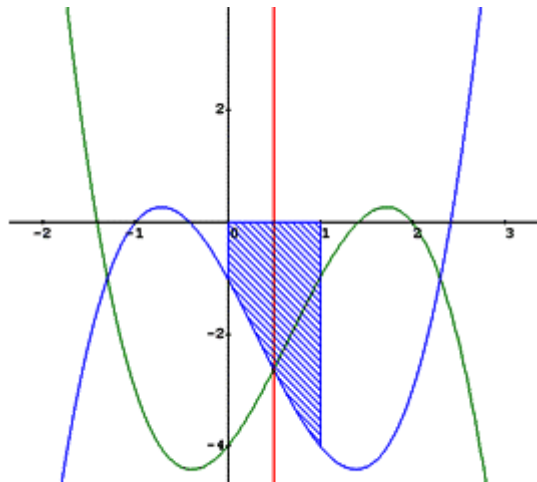
$$\rightarrow A = [-x \cos x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x dx = 0 + [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$$

• Par parties : $f = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow f' = -dx$

$g' = \cos x \rightarrow g = \sin x$

$$\rightarrow B = \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\sin x dx = 0 - [\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

Il est donc évident que $A = B$



Ce qui lie une fonction $f(x)$ et une fonction $f(a-x)$ est clairement une symétrie axiale d'axe $x = \frac{a}{2}$. On trouve ce résultat facilement grâce aux opérations usuelles sur les fonctions.

A partir de cela, cette symétrie nous permet d'écrire de façon générale que :

$$\int_0^{a/2} f(x)dx = \int_{a/2}^a f(a-x)dx \quad \text{et que} \quad \int_{a/2}^a f(x)dx = \int_0^{a/2} f(a-x)dx$$

On peut donc écrire, en additionnant les deux équations :

$$\int_0^{a/2} f(x)dx + \int_{a/2}^a f(x)dx = \int_0^{a/2} f(a-x)dx + \int_{a/2}^a f(a-x)dx \Leftrightarrow \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

On peut aussi écrire

$$2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on $I_n = \frac{\pi}{4}$

Test avec $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \left[\frac{x}{2} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Résolu le 14 septembre 2005. Steve Tumson

EXANA144 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005.

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x - x - 3$$

1. Etudier les variations de la fonction f
2. Soit (C) représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que (C) admet une asymptote D dont on précisera l'équation.
Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.
3. Construire (C) .
4. Déterminer l'aire $A(x)$ du domaine délimité par (C) , D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$ avec $a < 0$. Calculer $\lim_{a \rightarrow -\infty} A(a)$
5. Soit f_1 la restriction de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$
 - a. Montrer que f_1 est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.
 - b. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1^{-1} et construire sa courbe représentative dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - c. Montrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

1) Tableau des variations

$f(x) = e^x - x - 3$	$f'(x) = e^x - 1$	$f''(x) = e^x$	\rightarrow	0
				- 0 +
				+ + +
				↘ m ↗
				Concavité ∪

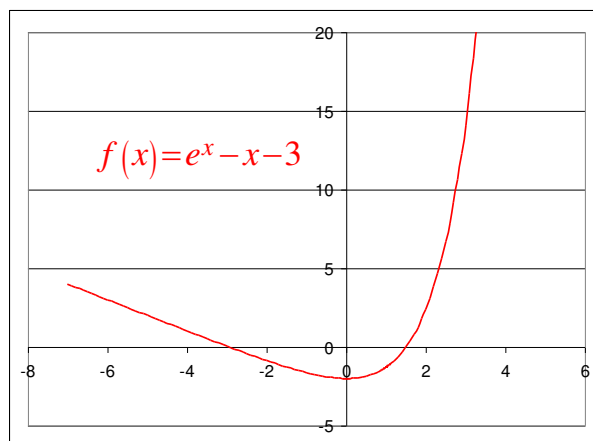
2) C'est une asymptote oblique

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad p = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = -3 \quad \rightarrow AO \equiv y = -x - 3$$

3) Voir graphique

$$4) A = \int_{\alpha}^0 [f(x) - AO] dx = \int_{\alpha}^0 e^x dx = [e^x]_{\alpha}^0 = 1 - e^{\alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{\alpha}) = 1$$



5) a) La fonction f est croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty [$. f_1 est une bijection car $\forall x \in I$, il existe qu'une seule valeur de f_1 , et réciproquement

b) f_1^{-1} est la fonction réciproque de f_1 . Comme f_1 est une fonction continue et dérivable sur I , f_1^{-1} est aussi une fonction continue et dérivable sur I

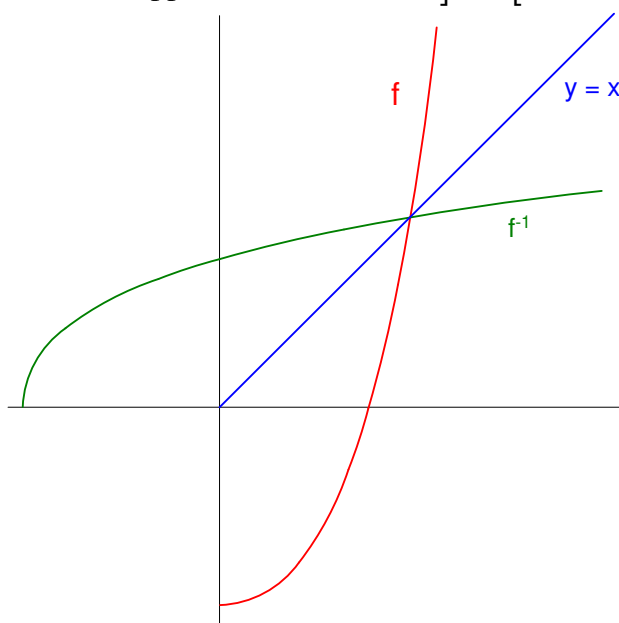
La construction f_1^{-1} s'obtient en traçant la courbe symétrique de f_1 par rapport à la droite $y = x$

c) Admettons que f_1 a 2 solutions x_1 et $x_2 \rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2)$

$\rightarrow e^{x_1} - e^{x_2} = x_1 - x_2$ qui n'est vérifié que si $x_1 = x_2$ car pour $x > 1$, e^x croît plus vite que x

d) Si $f_1(x) = 0 \rightarrow e^x = x + 3 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow e^1 < 4 \\ x = 2 \rightarrow e^2 > 5 \end{cases}$

Conclusion la solution appartient à l'intervalle $] 1, 2 [$



Résolu le 15 novembre 2005

EXANA145 – Bruxelles, juillet 2005.

Soit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = (2x + 1) e^{-2x}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

- a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- b) Déterminer une équation cartésienne
 1. de la tangente à C au point d'abscisse 0.
 2. des asymptotes (éventuelles) de C .
- c) Etablir le tableau des variations de f ; f' et f'' contenant
 1. les racines de f ; f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
 2. les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
 3. les extrema de f , les domaines de croissance et de décroissance de f .
 4. les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f .
- d) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)
- e) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par

$$g(x) = f(|x|)$$

- f) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel a le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = a$$

$$a) f'(x) = -4xe^{-2x} \quad \rightarrow f'(x) = 0 \text{ en } x = 0$$

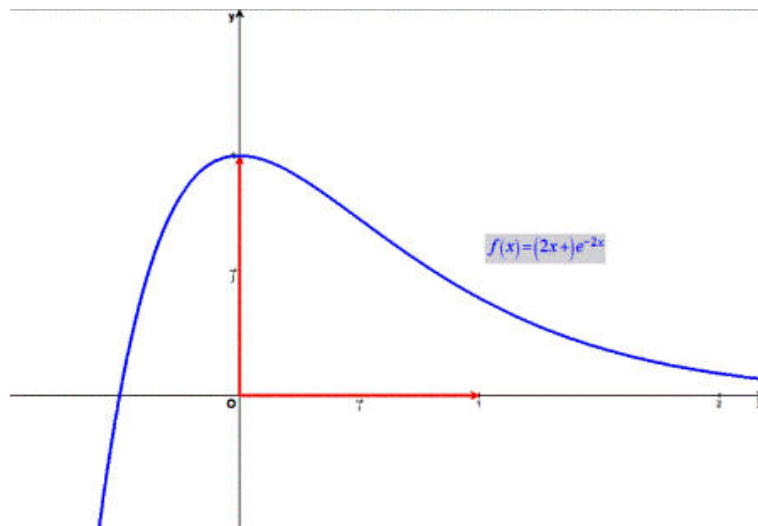
$$f''(x) = 4(2x-1)e^{-2x} \quad \rightarrow f''(x) = 0 \text{ en } x = \frac{1}{2}$$

$$b) \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv y = 1$$

Pas d'asymptote

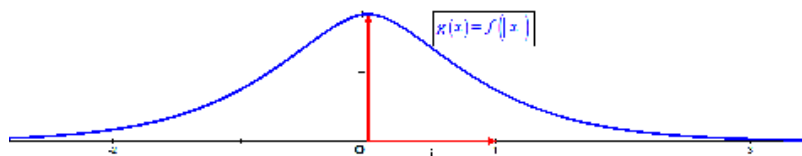
c) Tableau

x		$-\frac{1}{2}$	0		2		
$f'(x)$	+	+	0	-	-	-	
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+	
$f(x)$	\nearrow	0 (Racine)	\nearrow	M	\searrow	I (Point d'inflexion)	\searrow
	\cap	\cap	\cap	\cap	\cap	\cup	\cup



1^h

2^e



3^e

e) Pour tracer $g(x)$, il suffit de remarquer que $g(x) = f(x)$ si $x > 0$

Par conséquent, l'axe des y est un axe de symétrie.

f) Les solutions seront données par l'intersection de $f(x)$ et de la droite $y = a$

$a > 1$	Pas de solution
$a = 1$	1 solution
$0 < a < 1$	2 solutions
$a \leq 0$	1 solution

EXANA146 – Bruxelles, juillet 2005.

g) Calculer

$$\int_{-2}^2 |x^3 - x^2| dx$$

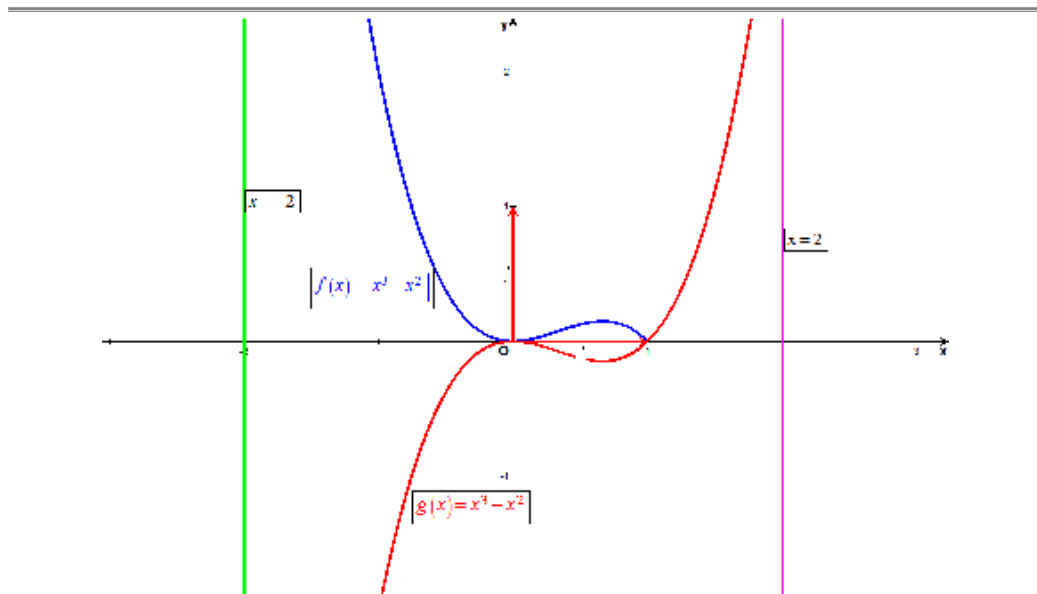
h) Soit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} périodique de période 2π telle que

$$f(-\pi) = 0 \text{ et } f(x) = x \text{ si } -\pi < x < \pi$$

et $n \in \mathbb{N}$,

calculer

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx$$



Comme le montre le graphique ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |x^3 - x^2| dx &= \int_{-2}^1 (x^2 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{49}{6} \end{aligned}$$

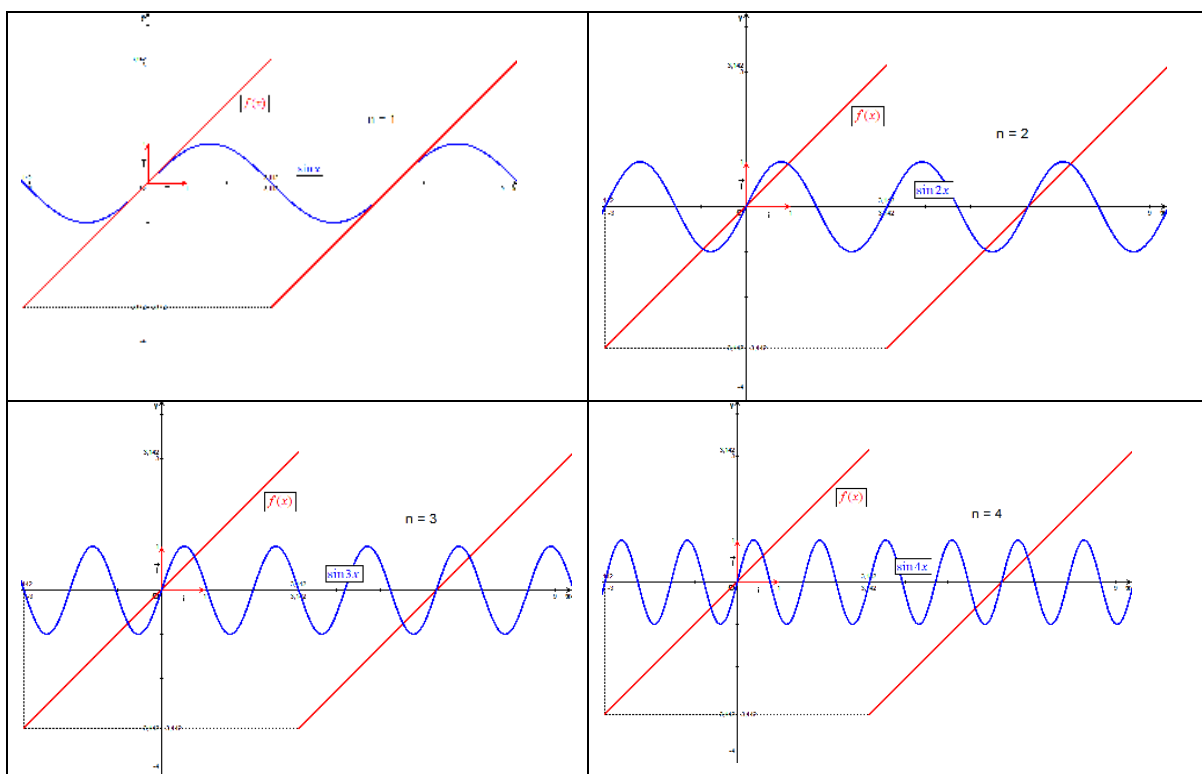
Etude de l'intégrale contenant un sinus

Comme les courbes suivantes le montrent, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x-2\pi) \sin nx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \sin nx \, dx \end{aligned}$$

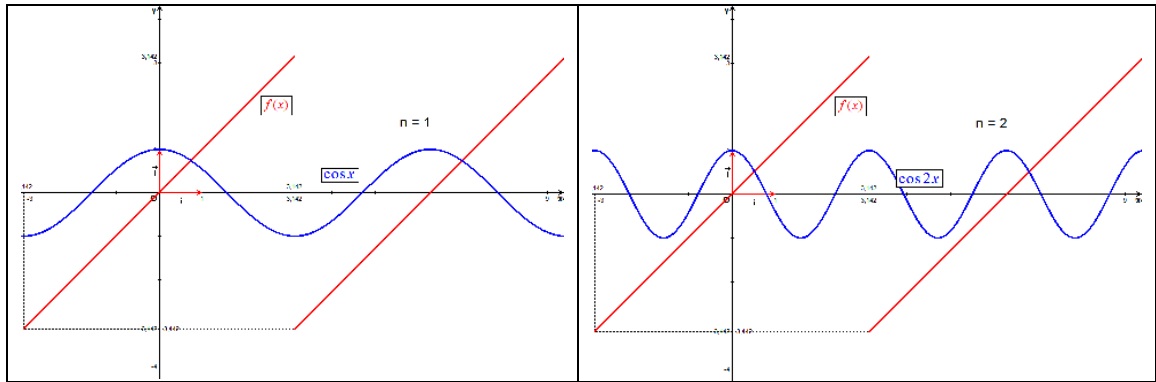
On intègre le premier terme par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} - 2\pi \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{\sin 2n\pi}{n^2} - \frac{2\pi \cos 2n\pi}{n} - 2\pi \left(\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos 2n\pi}{n} \right) = -2\pi \frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n-1} \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$



Etude de l'intégrale comprenant un cosinus

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x-2\pi) \cos nx \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx - 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx \, dx \\ &= \left[\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{2\pi} - 2\pi \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{2\pi \sin 2\pi n}{n} + \frac{\cos 2\pi n}{n^2} - \frac{1}{n^2} + 0 \\ &= 0 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} = 0 \end{aligned}$$



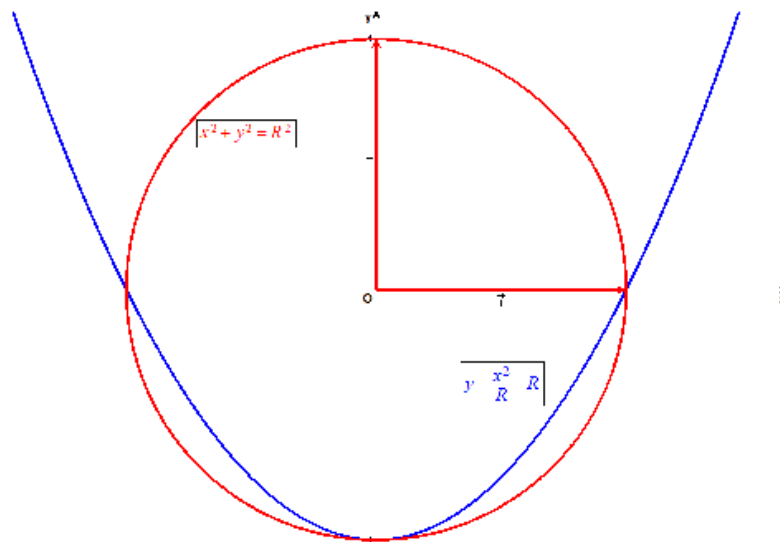
Le 1 mars 06

EXANA147 – Bruxelles, juillet 2005.

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé Oxy , soit D la région contenant l'origine $(0; 0)$ et délimitée par les deux courbes d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad ; \quad y = \frac{x^2}{R} - R \quad (R > 0)$$

- i) Faire un croquis de D .
- j) Calculer l'aire de D .



Intersections des deux courbes :

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \frac{x^2}{R} - R \rightarrow R^2 - x^2 = \frac{x^4}{R^2} - 2x^2 + R^2 \rightarrow x^2(x^2 - R^2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = -R, x = R$$

Par symétrie, il suffit de calculer de 0 à R .

$$\rightarrow A_D = 2 \int_0^R \left[\left(\sqrt{R^2 - x^2} \right) - \left(\frac{x^2}{R} - R \right) \right] dx$$

La première parenthèse correspond à un quart de cercle : $\frac{\pi R^2}{4}$

$$\text{La deuxième parenthèse donne } \int_0^R \left(\frac{x^2}{R} - R \right) dx = \left[\frac{x^3}{3R} - Rx \right]_0^R = -\frac{2R^2}{3}$$

$$\rightarrow A_D = 2 \left(\frac{\pi R^2}{4} + \frac{2R^2}{3} \right) = \frac{R^2}{6} (3\pi + 8)$$

EXANA148 – Bruxelles, septembre 2005.

Soit la fonction f de A (partie de \mathbb{R}) dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2(x+1)}$$

et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

- a) Déterminer le domaine de définition de f (c'est à dire le plus grand A possible)
- b) La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Justifier en utilisant la définition de la dérivée.
- c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- d) Déterminer une équation cartésienne
 - _ de la tangente à C au point d'abscisse 0.
 - _ des asymptotes (éventuelles) de C .
- e) Etablir le tableau des variations de f , f' et f'' contenant
 - _ les racines de f , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
 - _ les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
 - _ les extrema de f , les domaines de croissance et de décroissance de f .
 - _ les points d'inflexion, les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f .
- f) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du e)
- g) Sans nouveau calcul, tracer le graphe de la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par

$$g(x) = \sqrt{-(x+2)^2(x-1)}$$

a) Dom $f(x): x \geq -1$

$$b) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h-2)^2(2+h+1)} - \sqrt{(2-2)^2(2+1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sqrt{h+3}}{h}$$

$$\rightarrow \begin{cases} h < 0 \rightarrow f'(2) = -\sqrt{h+3} = -\sqrt{3} \\ h > 0 \rightarrow f'(2) = +\sqrt{h+3} = +\sqrt{3} \end{cases}$$

La dérivée à gauche et à droite est différente : la fonction n'est pas dérivable en $x = 2$

c) Soit donc $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-2)^2(x+1)}} \left[2(x-2)(x+1) + (x-2)^2 \right] = \frac{3x(x-2)}{2\sqrt{(x-2)^2(x+1)}}$$

$$\text{Or } x \neq 2 \rightarrow f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x+1}}$$

$f'(x)$ est nul en $x = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{2\sqrt{x+1}} = -\infty \rightarrow$ La fonction est tangente à la droite $x = -1$

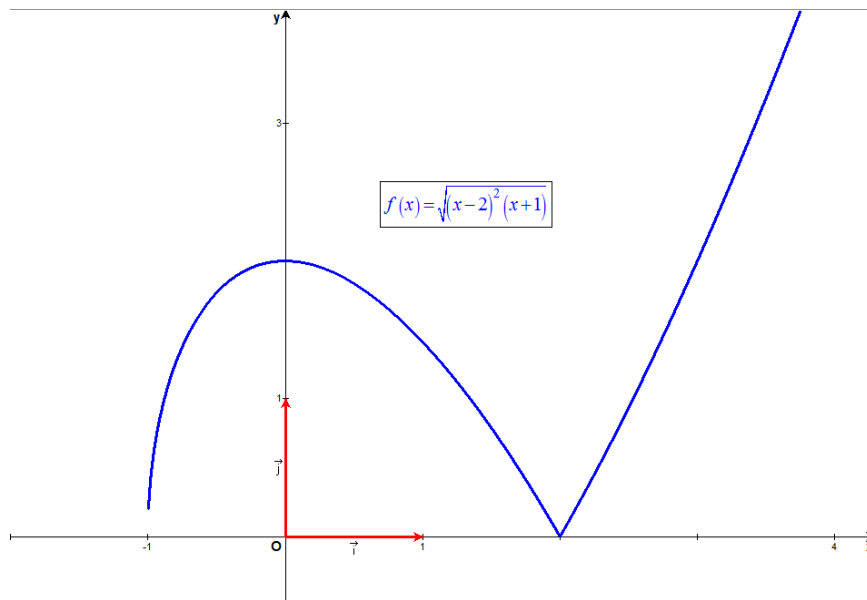
$$f''(x) = \frac{3\sqrt{x+1} - 3x \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)} = \frac{3}{4} \frac{x-2}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

d) Tangente t en $x = 0$: $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \rightarrow t \equiv y = 2$

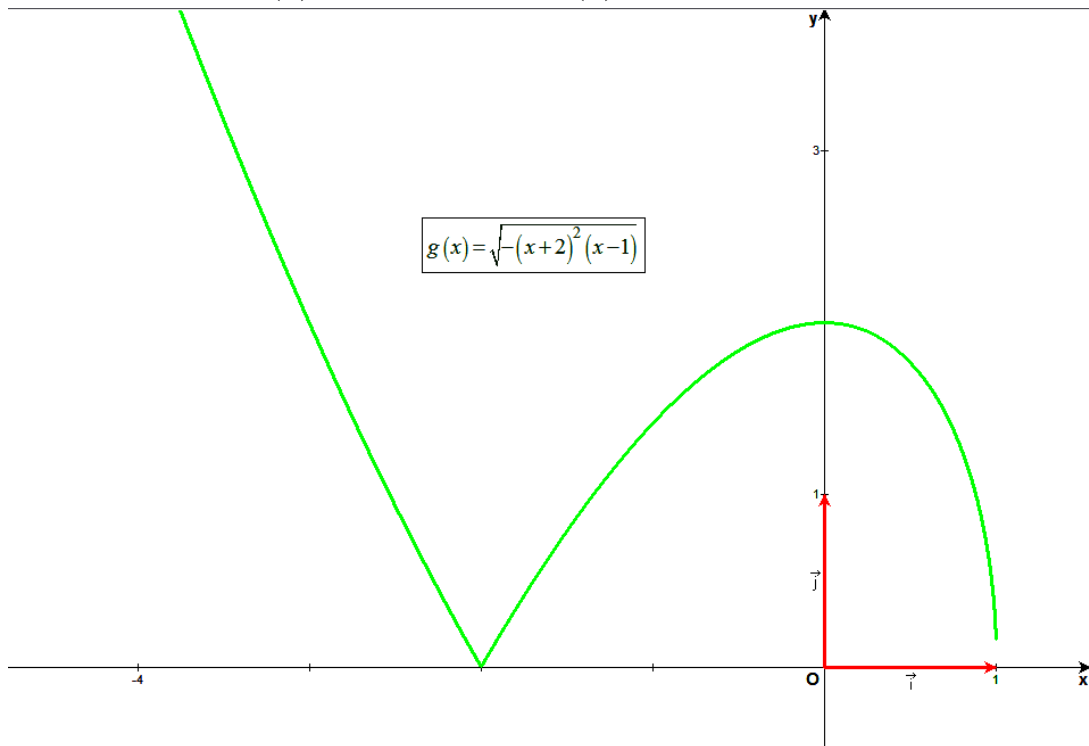
Il n'y a pas d'asymptote.

e) Tableau

	-1	0	2			
$f'(x)$	/	+	0	-	/	+
$f''(x)$	/	-	-	-	/	+
$f(x)$		\nearrow	M	\searrow	m	\nearrow
		\cap	\cap	\cap	Point Anguleux	\cup



g) La fonction $g(x)$ est symétrique de $f(x)$. Il est donc facile de la tracer.



Le 1 mars 06

EXANA149 – Bruxelles, septembre 2005.

k) Calculer

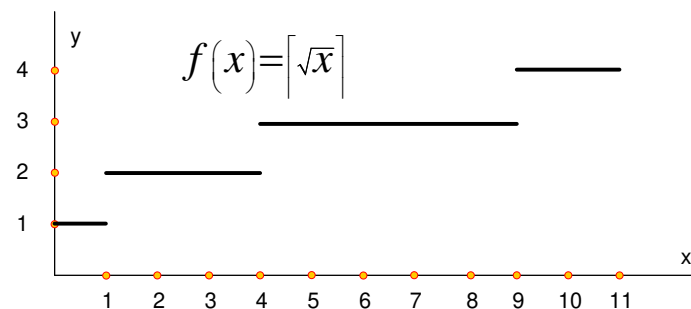
$$f(x) = \int_0^{11} \lceil \sqrt{x} \rceil dx$$

où pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lceil u \rceil$ désigne le plus petit entier $\geq u$.

l) Calculer

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx$$

Où a et b sont réels.



a) La fonction est représentée ci-dessus

On a immédiatement

$$\int_0^{11} \lceil \sqrt{x} \rceil dx = 1 + 2 \times 3 + 5 \times 3 + 2 \times 4 = 30$$

b) $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$

$$\begin{aligned} \text{Par parties : } \quad v' &= e^{ax} & v &= \frac{e^{ax}}{a} & \rightarrow I &= \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \\ u &= \cos bx & u' &= -b \sin bx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par parties : } \quad v' &= e^{ax} & v &= \frac{e^{ax}}{a} \\ u &= \sin bx & u' &= b \cos bx \end{aligned}$$

$$\rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a} \left[\frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right] \rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I$$

$$\rightarrow \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) I = \frac{e^{ax}}{a} \left(\cos bx + \frac{b}{a} \sin bx \right) \rightarrow I = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{e^{ax}}{a^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

Le 1 mars 06