Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 15

EXANA0150 – EXANA159

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot

Juil 06

EXANA150 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2005.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $Oxyz$, soit·

- D le disque défini par

$$y = 0 \ ; \ x^2 + (z-c)^2 \leq R^2 \quad \text{où} \quad 0 < c < R$$

- T le tore solide engendré par la rotation de D autour de l'axe Ox.

  Calculer le volume de T.

Nous considérerons $c > R$, sinon le volume engendré n'est pas un tore.

$$x^2 + (z-c)^2 = R^2 \rightarrow z = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + c$$

Le volume du tore est simplement donné par :

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} + c\right)^2 dx - \pi \int_{-R}^{R} \left(-\sqrt{R^2 - x^2} + c\right)^2 dx$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[R^2 - x^2 + 2c\sqrt{R^2 - x^2} + c^2 - \left(R^2 - x^2 - 2c\sqrt{R^2 - x^2} + c^2\right)\right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^R 4c\sqrt{R^2 - x^2} dx = 8\pi c \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Cette intégrale est connue et vaut un quart de disque : $\dfrac{\pi R^2}{4}$

$$\rightarrow V = 2\pi^2 c R^2$$

Le 15 décembre 2005

EXANA151 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

1. Calculer : $I=\int_0^2 x\sqrt{x+1}\,dx$

2. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f\left(x\right)=x-\sqrt{ax^2+bx+c}$

   $\left(\text{On discutera en fonction de } a\right)$

3. Démontrer que la fonction $f\left(x\right)=x.\left|\,x\,\right|$ est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'\left(0\right)$.

4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Soit P un point de la courbe représentative de la fonction $y=e^x$. La tangente en P à cette courbe coupe en H l'axe des abscisses. Démontrer que la projection orthogonale du segment HP sur l'axe des abscisses a une longueur constante.

---

1. $I=\int_0^2 x\sqrt{x+1}\,dx$

$$\text{Posons : } t^2=x+1\rightarrow\begin{cases}dx=2tdt\\ x=t^2-1\\ x=0\rightarrow t=1\\ x=2\rightarrow t=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\rightarrow I=\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^2-1\right).t.2t.dt=2\int_1^{\sqrt{3}}t^2\left(t^2-1\right).dt=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^4-t^2\right).dt$$

$$=2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}}=2\left[t^2\left(\frac{t^2}{5}-\frac{1}{3}\right)\right]_1^{\sqrt{3}}=2\left(3^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}+2\sqrt{3}\right)$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\left(x+\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{x+\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-ax^2-bx-c}{x+\sqrt{ax^2+bx+c}}}_{(1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left[(1-a)-\frac{b}{x}-\frac{c}{x^2}\right]}{x\left(1+\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{1-a}{1+\sqrt{a}}$$

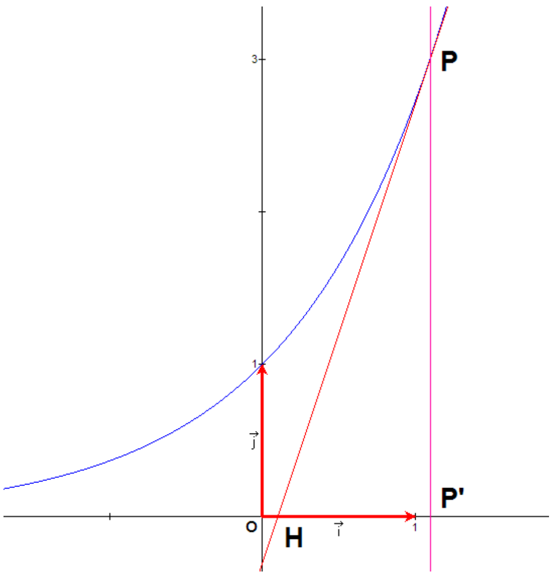
Ce qui nous donne les cas suivants :

a	lim
$a<0$	N'existe pas
$a=0$	$+\infty$
$0<a<1$	$+\infty$
$a=1$	$\frac{b}{2}$ (Voir ci-dessous)
$a>1$	$-\infty$

Si $a=1$, (1) devient : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-ax^2-bx-c}{x+\sqrt{ax^2+bx+c}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x^2-bx-c}{x+\sqrt{x^2+bx+c}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx-c}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx}{2x}=-\frac{b}{2}$$

3. A déjà été posé en juillet 2004. Voir EXANA124



4. L'équation d'une tangente à une courbe, pour $x = a,$ est donnée par : $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\rightarrow t \equiv y - e^{x_P} = e^{x_P}(x - x_P)$ où x_p est l'abscisse du point $P.$ C'est aussi l'abscisse de $P'.$

L'intersection H avec l'axe OX est obtenue en faisant $y = 0 \rightarrow x_H = \dfrac{x_P e^x - e^x}{e^x} = x_P - 1$

Par conséquent : $|HP'| = x_p - x_P + 1 = 1 =$ constante

Le 10 mai 2005. Modifié le 29 décembre 2013 (Jean Perbal)

EXANA152 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ par

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x}$$

Et soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

A. 1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$

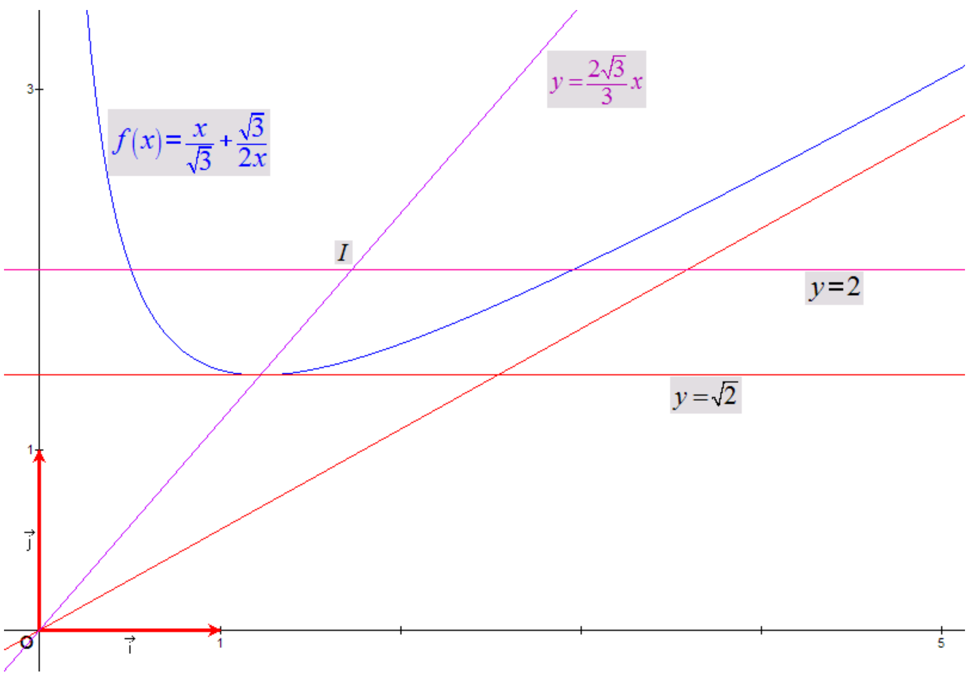
2. Préciser les équations desasymptotes de C.

3. Tracer la courbe C.

B. 1. Soit m un nombre réel et soit Δ la droite d'équation $y=m$.

Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de Δ et de C.

2. Pour tout $m>\sqrt{2}$, on appelle A et B lespoints d'intersection de Δ et de C. Soit I le milieu du segment $[AB]$. Montrer que, quand m décrit l'intervalle $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite D d'équation $x=\frac{\sqrt{3}}{2}y$.



A.1) Calculons les dérivées première et seconde.

- $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ qui est nul pour $x = 1$
- $f''(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{x}$ qui est toujours positif pour $x \in [\,0; +\infty\,[$

D'où le tableau

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	
		$\cup$	$(1, \sqrt{2})$	$\cup$	

A.2) AV : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>0} 0} f(x) = 0 \rightarrow AV \equiv x = 0$

AO : $\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = m \\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(f(x) - mx\right) = 0 = p \end{cases} \rightarrow AV \equiv y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3) La courbe est tracée en annexe

B.1) On résoud le système : $\begin{cases} y = m \\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2x} \end{cases} \rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{3}mx + 3 = 0$

Comme le coefficient de x est paire, on calcule le Δ'

$\Delta' = b'^2 - ac = 3m^2 - 6 \rightarrow \Delta' = 0$ si $m = \pm\sqrt{2}$

$\rightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{2} \rightarrow x = \dfrac{-\sqrt{6}}{2} \text{ à rejeter} \\ m = \sqrt{2} \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \rightarrow y = \sqrt{2} \rightarrow \text{ Ce sont les coordonnées du minimum de } f(x) \end{cases}$

La solution générale s'écrit

$$x = \frac{\sqrt{3}m \pm \sqrt{3}\sqrt{m^2 - 2}}{2} \quad \text{avec} \begin{cases} m < \sqrt{2} & \text{Pas d'intersection} \\ m = \sqrt{2} & \text{Un point d'intersection} \\ m > \sqrt{2} & \text{Deux points d'intersection} \end{cases}$$

B.2) Les abscisses des points A et B sont :

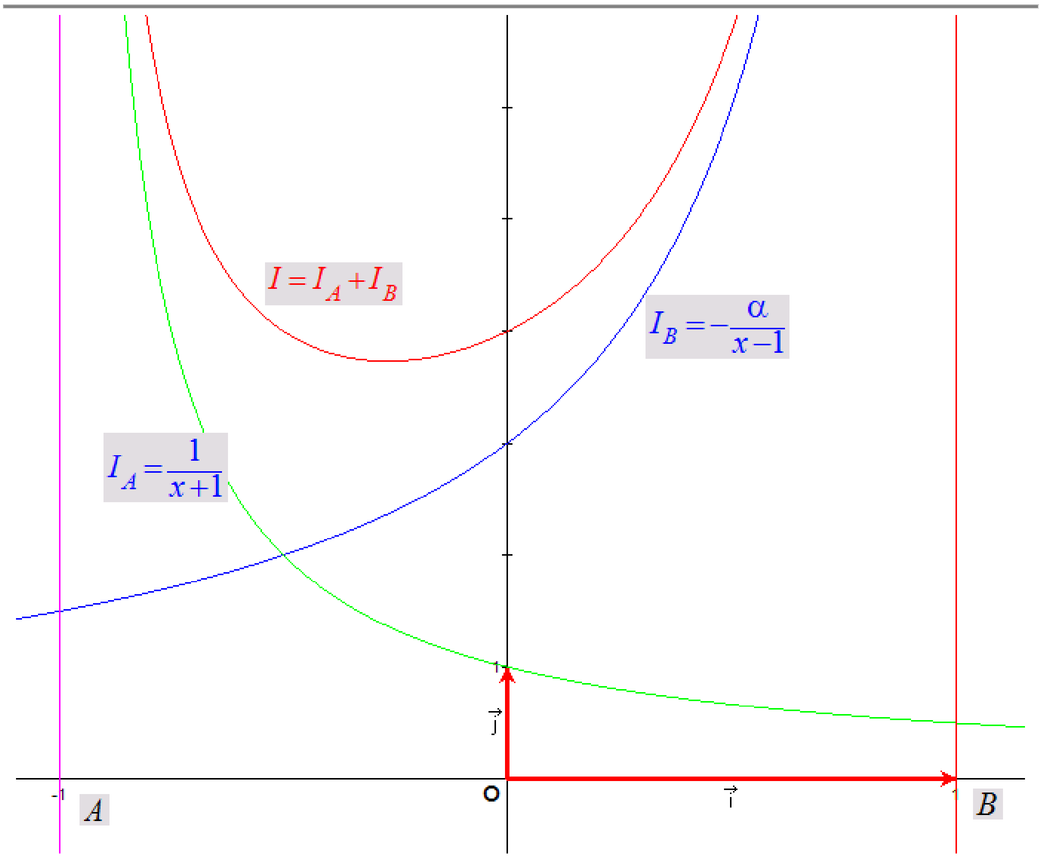
$$\begin{cases} x_A = \dfrac{\sqrt{3}\left(m-\sqrt{m^2-2}\right)}{2} \\ x_B = \dfrac{\sqrt{3}\left(m+\sqrt{m^2-2}\right)}{2} \end{cases} \rightarrow x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

Comme I appartient aussi à $y = m,$ le lieu de m est donné par

$$\begin{cases} y = m \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}m \end{cases} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \in \left[\dfrac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right[\\ y \in \left[\sqrt{2}, +\infty \right[\end{cases}$$

EXANA153 – Louvain, juillet 2005, série 1.

Il y a deux sources de lumière sur une ligne droite. La source A est située à la position $(-1;0)$ et la source B est située à la position $(+1;0)$. La source B est α fois plus lumineuse que la source A.
On peut supposer que l'intensité de la lumière diminue comme l'inverse du carré de la distance à la source. On peut supposer aussi que l'intensité totale à un point donné est la somme des intensités de toutes les sources qui illuminent ce point. Quel est alors le point sur la ligne entre A et B avec l'intensité de lumière minimale, en fonction de α?



Traduisons l'énoncé : l'intensité de la lumière diminue comme l'inverse du carré de la distance à la source.

Pour $A : dI_A = -\frac{dx}{(x+1)^2}$ (1) Pris négativement car de A vers B l'intensité venant de A diminue

Pour $B : dI_B = \frac{\alpha dx}{(x-1)^2}$ (2) Pris positivement car de A vers B l'intensité venant de B augmente

Donc $dI = \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\alpha}{(x-1)^2}\right)dx \to \frac{dI}{dx} = \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\alpha}{(x-1)^2}\right)$

Cette dérivée sera nulle si $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\alpha}{(x-1)} = 0$ c'est-à-dire $\alpha(x+1)^2 = (x-1)^2$

Puisque α est positif, on a immédiatement

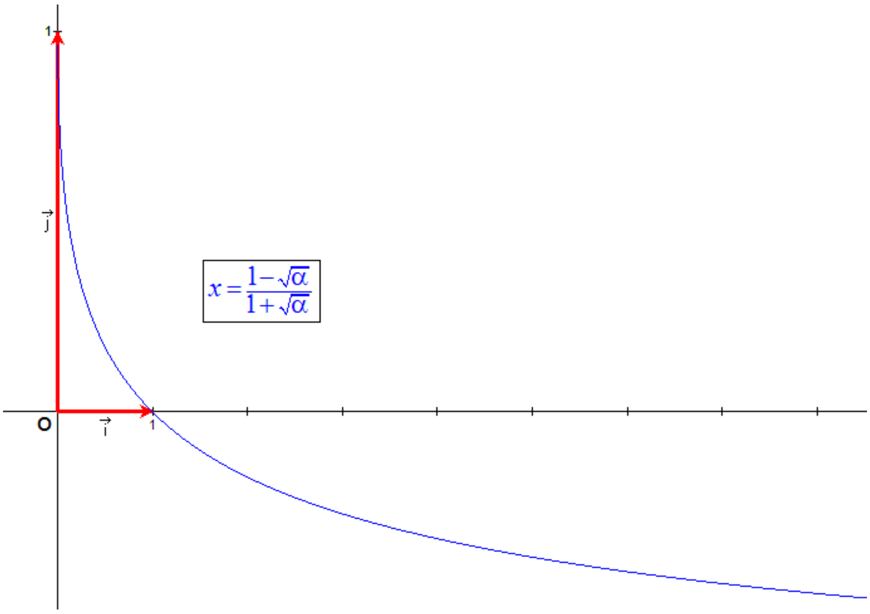
$$\alpha(x+1)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha}(x+1) = x-1 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} \text{ A rejeter car } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\alpha}(x+1) = -x+1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1-\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}}} \end{cases}$$

On constate :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \to x = 0 \text{ Le minimum se trouve au milieu de } A \text{ et } B \\ \alpha = 0 \to x = 1 \text{ La source } B \text{ est nulle et le minimum est en } B \\ \alpha \longrightarrow +\infty \quad \text{La source } B \text{ est très grande et le minimum est en } A \end{cases}$$

<u>Note</u> On peut intégrer (1) et (2)

$$\begin{cases} dI_A = -\frac{dx}{(x+1)^2} \to I_A = \frac{1}{x+1} + C \quad \text{Avec } C = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} I_A = 0 \\ dI_B = \frac{\alpha dx}{(x-1)^2} \to I_B = -\frac{\alpha}{x-1} + C \quad \text{Avec } C = 0 \text{ car } \lim_{x\to-\infty} I_B = 0 \end{cases}$$



Le 10 mai 2006

EXANA154 – Louvain, juillet 2005, série 2.

1. Vérifier l'égalité
$$\int_a^b f\left(a+b-x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)dx$$

2. Calculer :
$$\int_0^2 \tan^2 x\,dx$$

3. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$$

4. Démontrer que la fonction $f\left(x\right)=\left|\,x\,\right|\sin x$ est dérivable en $x = 0$ et donner la valeur de $f\,'\,(0)$

---

1. $I=\int_a^b f\left(a+b-x\right)dx$

Posons $t=a+b-x\rightarrow\begin{cases}x=b\rightarrow t=a\\ x=a\rightarrow t=b\\ dx=-dt\end{cases}$

$\rightarrow I=-\int_b^a f\left(t\right)dt=\int_a^b f\left(t\right)dt$

I est indépendant de t. Comme t est une simple variable d'intégration, on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable, et donc :

$I=\int_a^b f\left(t\right)dt=\int_a^b f\left(x\right)dx$

2. $I=\int_0^a \tan^2 x\,dx=\int_0^a\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left[\tan x\right]_0^a-\left[x\right]_0^a=\tan a-a$

3. On a $-1\le\sin x\le 1$. Donc $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

4. Soit $x > 0 \to \begin{cases} | x | = x \\ \sin x > 0 \end{cases} \to f(x) = | x | \sin x = x \sin x$

$\to f'(x) = \sin x + x \cos x \to f'(0) = 0$

Soit $x < 0 \to \begin{cases} | x | = -x \\ \sin x < 0 \end{cases} \to f(x) = | x | \sin x = -x \sin x$

$\to f'(x) = -\sin x - x \cos x \to f'(0) = 0$

Les dérivées à gauche $(x < 0)$ et à droite $(x > 0)$ sont égales.

La fonction est donc dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$

Le 10 mai 2006

EXANA155 – EPL, UCL, LLN, juillet 2005, série 2.

A. On munit le plan P d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=e^{-x}\cos x$.

1) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative Γ de f sur cet intervalle.

2) Calculer l'aire limitée par Γ, les droites d'équations $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ et l'axe des abscisses.

B. On se propose d'étudier l'intersection de la courbe Γ avec la droite Δ d'équation $y=x$.

1) Démontrer qu'il n'existe pas de points d'intersection de Γ et de Δ dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

2) Soit φ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi\left(x\right)=e^{-x}\cos x-x$

a) Calculer $\varphi\left(0\right)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) Etudier les variations de φ

c) En déduire qu'il existe un réel unique α de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $e^{-\alpha}\cos\alpha=\alpha$ (c'est-à-dire tel que $f(\alpha)=\alpha$).

d) Prouver que $\alpha<1$.

A.1. $f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

e^{-x} est toujours positif. Pour étudier le signe de $f'(x)$, il nous suffit d'étudier le signe de $(\cos x + \sin x)$. Calculons d'abord les racines,

$$\sin x = -\cos x \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi + x) \Rightarrow \begin{cases} \pi + x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \pi + x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \quad \text{Impossible} \end{cases}$$

Dans l'intervalle donné, nous avons donc la racine : $x = -\frac{\pi}{4}$

De plus, il est immédiat que $\begin{cases} x < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -(\cos x + \sin x) > 0 \\ x > -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -(\cos x + \sin x) < 0 \end{cases}$

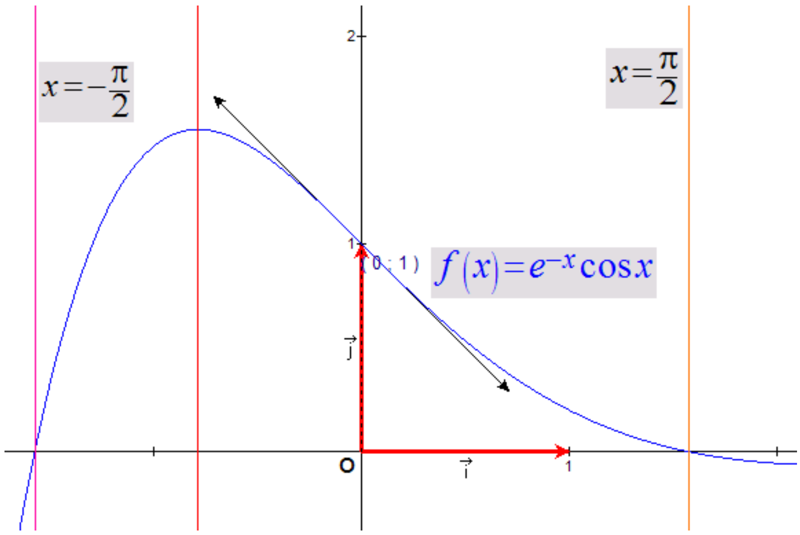
Passons à la dérivée seconde : $f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(-\sin x + \cos x) = 2e^{-x}\sin x$

Et donc résolvons : $\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ce qui correspond à un point d'inflexion.

De plus, $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0; \quad x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Ce qui donne le tableau de variation :

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$Max\left(-\frac{\pi}{4}, 1.55\right)$	$\searrow$	$I(0,1)$	$\searrow$	0
Concavité		$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cup$	



A.2 Il suffit de calculer : $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$

Par parties : $\begin{matrix} u=e^{-x} & u'=-e^{-x} \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{matrix}$

$\Rightarrow A=\left[e^{-x}\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx=e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$

Le deuxième terme par parties : $\begin{matrix} u=e^{-x} & u'=-e^{-x} \\ v'=\sin x & v=-\cos x \end{matrix}$

$\Rightarrow A=e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^{-x}\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$

$\Rightarrow 2A=e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

B.1. Compte tenu du point A, nous avons :

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow y=0;\ f(x)>0 \\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[& \Rightarrow y<0;\ f(x)>0\Rightarrow \text{Il n'existe pas de points d'intersection de } \Gamma \text{ et } \Delta \\ x=-\frac{\pi}{2} & \Rightarrow y<0;\ f(x)=0 \end{cases}$$

B.2.a $\varphi(0)=1 \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\simeq -1.57$

B.2.b On constate que $\varphi(x)=f(x)-1\Rightarrow \begin{cases} \varphi'(x)=f'(x)-1 \\ \varphi''(x)=f''(x) \end{cases}$

Les variations de $\varphi(x)$ sont donc pratiquement les mêmes que $f(x)$

B.2.c En particulier, $\varphi(x)$ et $f(x)$:

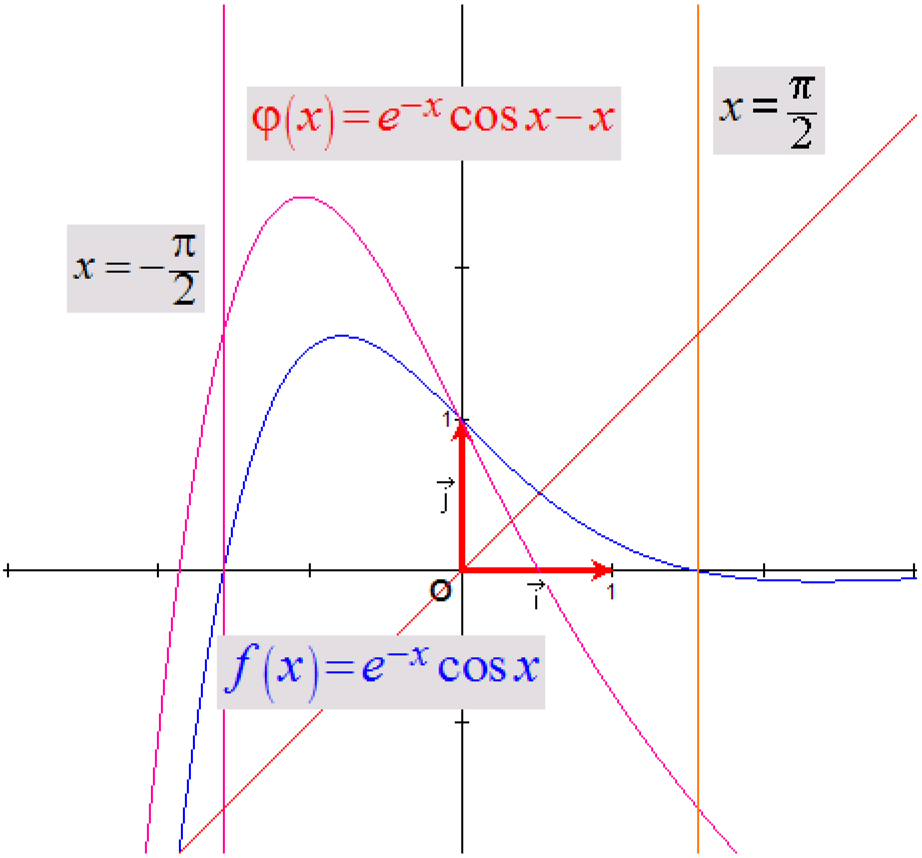
- sont toutes deux uniformément décroissantes dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

  car $f'(x)<0\Rightarrow g'(x)=f'(x)-1<0$

- ont la même concavité et ont le même point d'inflexion (0,1)

En vertu du point B.2.a, nous pouvons donc déduire qu'il existe un réel unique α tel que : $e^{-\alpha}\cos\alpha=\alpha$

B.2.d Il suffit de calculer $\varphi(1)=e^{-1}\cos 1-1\simeq 0.80\ <0,$ ce qui indique que le zéro de $\varphi(x)$ se trouve dans l'intervalle $]0,1[$, et donc $\alpha<1$



Le 10 mai 2006

EXANA156 – Louvain, juillet 2005, série 2.

Supposons qu'il y a un barrage qui maintient un lac. Le barrage est fait de terre battue. Il y a un défaut de construction au fond du barrage. Il arrive donc un jour qu'un trou se forme au fond du barrage. Le barrage commence ensuite à se vider de plus en plus vite, à cause du trou qui s'agrandit avec le temps. Voici les variables impliquées:

– V : le volume du lac (en m^3).
– s: la surface du trou (en m^2).
– d: le débit d'eau qui passe par le trou (en $m^{/3}/s$).

Nous faisons maintenant l'hypothèse que le comportement de ce système est donné par les propriétés suivantes, qu'on suppose vraies au début de la vidange du lac [1]. Le débit d'eau est proportionnel à la surface du trou. L'agrandissement de la surface du trou par unité de temps (c'est-à-dire, la dérivée) est proportionnel au débit d'eau. La surface du trou au temps initial ($t = 0$) est $s_0>0$. La diminution du volume du lac par unité de temps est donnée par le débit d'eau. Exprimez alors le volume du lac en fonction du temps.

(1) Les propriétés données ici ne correspondent pas forcément avec le comportement en réalité.

Le débit est proportionnel à la surface du trou : $d = \alpha s \qquad (1)$

L'agrandissement par unité de temps est proportionel au débit : $\dfrac{ds}{dt} = \beta d \quad (2)$

(ds désigne la différentielle de s)

De (1) et $(2) \rightarrow \dfrac{ds}{dt} = \alpha\beta s \rightarrow \dfrac{ds}{s} = \alpha\beta dt.$

On intégre : $\int_{s_0}^{s} \dfrac{ds}{s} = \int_0^t \alpha\beta dt. \rightarrow [\ln s]_{s_0}^{S} = \alpha\beta t \rightarrow s = s_0 e^{\alpha\beta t}$

Ce qui nous donne comme débit d'eau : $d = \alpha s_0 e^{\alpha\beta t}$

La diminution du volume du lac est donné par le débit d'eau : $-\dfrac{dV}{dt} = \alpha s_0 e^{\alpha\beta t}$

$(-\text{ car } dV \text{ est négatif})$

On intégre : $-\int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t \alpha s_0 e^{\alpha\beta t} dt \quad (V_0 \text{ : volume en } t = 0, V \text{ volume au temps } t)$

$\rightarrow V_0 - V = \alpha s_0 \dfrac{e^{\alpha\beta t}}{\alpha\beta} \rightarrow \boxed{V = V_0 - \dfrac{s_0}{\beta} e^{\alpha\beta t}}$

Le 10 mai 2006

EXANA157 – Louvain, septembre 2005.

1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$, $x\in[\,0,1\,[$

Etudier la dérivabilité de f en 0.

2. Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^3-x+1$. Exprimer $f(-x)$ et $f(-x)+f(x)$.

Quel élément de symétrie sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ présente-t-elle ?

3. On pose $I=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx$

Calculer I. En utilisant un changement de variable approprié, montrer que $J=\pi\times I-I$.
En déduire la valeur de J.

4. Calculer $I_\alpha(a)=\int_1^a\dfrac{1}{t^\alpha}dt$ en fonction de α et de a où α et a sont deux réels strictement positifs.

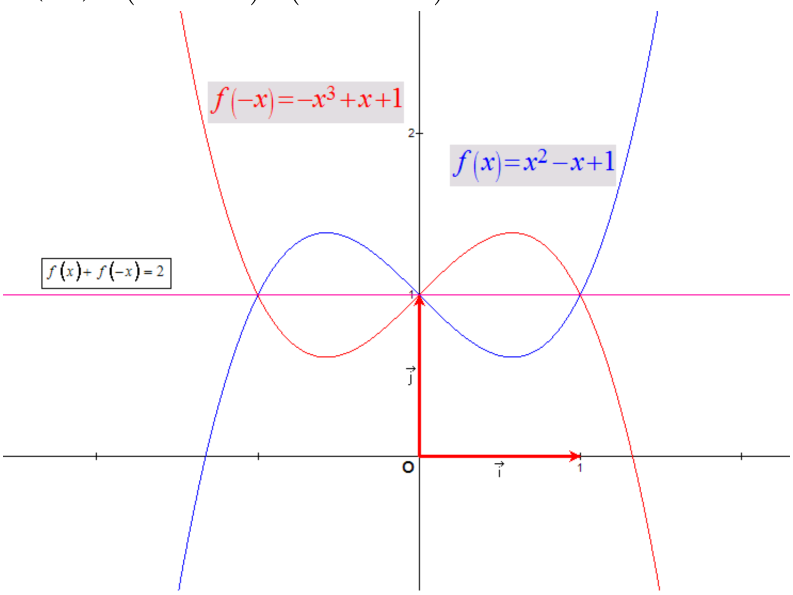
$$1.\ f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}\,\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x^3}}\,\frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}(3-2x)$$

Et on a : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}(3-2x)=0$

2. $f(x)=x^3-x+1 \qquad f(-x)=(-x)^3-(-x)+1=-x^3+x+1$

$f(x)+f(-x)=\left(x^3-x+1\right)+\left(-x^3+x+1\right)=2\rightarrow$ Symétrie d'axe $y=2$



3) Posons : $x=\frac{\pi}{2}-t \rightarrow \begin{cases} dx=-dt \\ x=0 \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

On obtient : $J=\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2 tdt$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt$$

Vu que la fonction $t\cos^2 t$ est impaire et qu'on l'intègre sur intervalle symétrique par rapport à 0 on peut dire que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt=0$ et on peut donc écrire

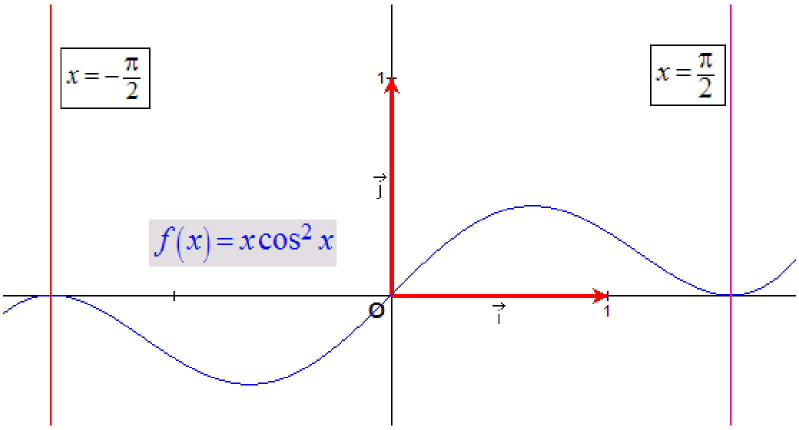
$$J=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 dt=\frac{\pi}{2}I=\frac{\pi^2}{4}$$

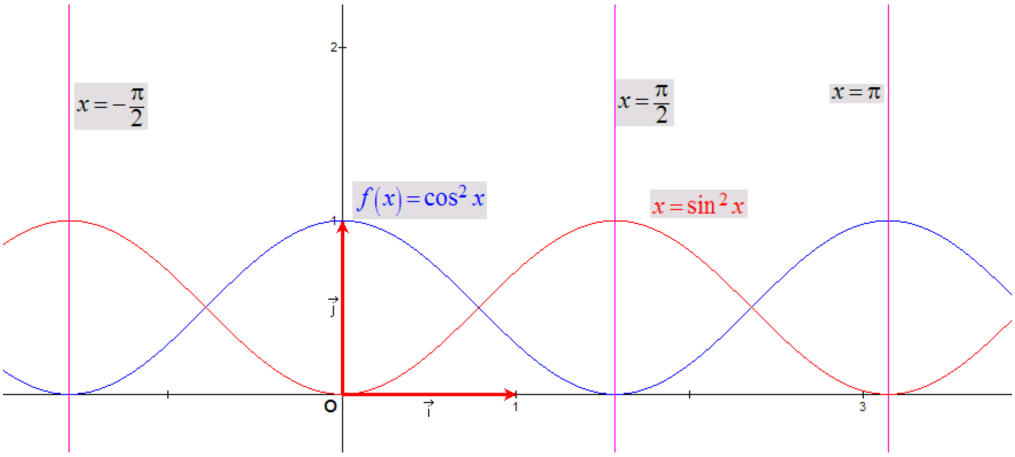
On pouvait aussi écrire : $J=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)dt=\frac{\pi}{2}\left([t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt\right)$

or $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=I \rightarrow J=\frac{\pi}{2}(\pi-I)=I(\pi-\mathrm{I})$

Ce qui signifie qu'il y a une erreur dans l'énoncé. L'intégrale J a été vérifiée sur Mathlab et Mathematica.

Merci à Steve Tumson pour l'aide fournie.





4) $\underline{\alpha \neq 1}$

$$I_\alpha(a)=\int_1^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt=\int_1^a t^{-\alpha}\,dt=\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^a=\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{a^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

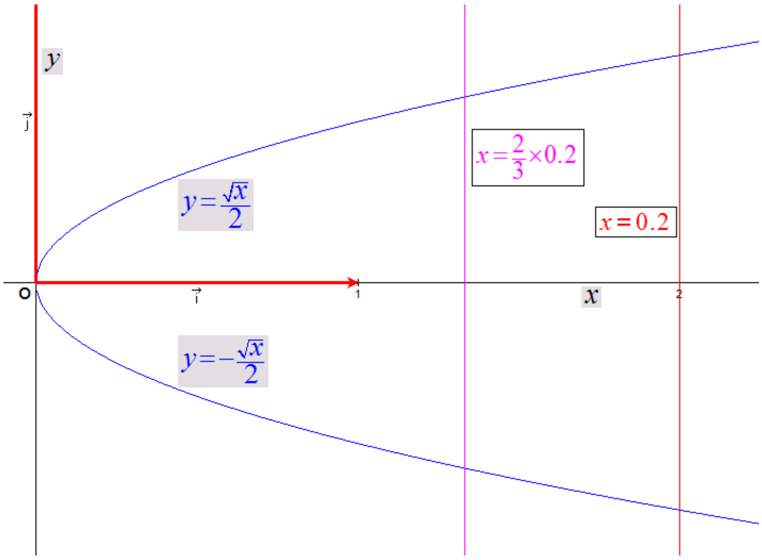
$\underline{\alpha=1}$

$$I_\alpha(a)=\int_1^a \frac{1}{t}\,dt==\left[\ln t\right]_1^a=\ln a$$

Le 10 mai 2006

EXANA158 – Louvain, septembre 2005.

Un grand bol en verre a une hauteur de 0.2m, mesuré à l'intérieur du bol. A la hauteur x à partir du fond du bol, son diamètre intérieur est $\sqrt{x}$ (en mètres). Un pot de confiture avec forme cylindrique a une hauteur intérieure de 0.1m et un diamètre intérieur de 0.1m. Combien de pots de confiture pleins de confiture de groseilles sont nécessaires (à l'unité près) pour remplir le grand bol jusqu'au 2/3 de sa hauteur avec de la confiture de groseilles ?



La figure montre le grand bol placé en position horizontale. La forme est décrite par les fonctions $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$ et $y=-\frac{\sqrt{x}}{2}$.

Calculons le volume du grand bol, donc entre $x=0$ et $x=\frac{2}{3}\times 0.2=\frac{4}{30}$

$$V_B=\pi\int_0^{\frac{4}{30}}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{4}{30}} x\,dx=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{4}{30}}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{4}{30}\right)^2=6.981.10^{-3}\ m^3$$

Calculons le volume d'un pot de confiture.

$$V_P=\frac{\pi d^2 h}{4}=\frac{\pi\times 0.1^2\times 0.1}{4}=0.785.10^{-3}\ m^3$$

Le nombre de pots de confiture est donné par

$$n=\frac{V_B}{V_P}=\frac{6.981.10^{-3}}{0.785.10^{-3}}=8.89\ \text{ soit donc 9 pots.}$$

Le 10 mai 2006

EXANA159 – Mons, juillet 2006, groupe B.

Quelqu'un marche vers une tour à une vitesse constante de 1 mètre par seconde. Si la hauteur de la tour est de 6 mètres, à quelle vitesse (en m/s) la distance entre l'homme et le sommet de la tour diminue-t-elle, quand la distance entre l'homme et le sommet de la tour est de 10 mètres.

Soient x la distance entre l'homme et le pied de la tour, y la distance entre l'homme et le sommet de la tour et v_x la vitesse de l'homme.

On a : $y = \sqrt{36 + x^2}$

La vitesse est simplement la dérivée de l'espace parcouru en fonction du temps.

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{36+x^2}}.2x\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sqrt{36+x^2}}v_x = \frac{x}{y}v_x$$

avec $y = 10 \rightarrow x = 8;\ v_x = 1 \rightarrow v_y = \frac{8}{10}1 = 0.8\,m/s$

Note : $v_y = \frac{x}{y}v_x$. On vérifie $\lim_{x\to 0} v_y = 0$ et $\lim_{x\to\infty} v_y = v_x$

L e 5 juillet 2006