Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 17

EXANA0170 – EXANA179

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot

Juillet 08

EXANA170 – Bruxelles, septembre 2006.

a) Calculer l'intégrale

$$\int \cos^5 x\,dx$$

b) en déduire

$$\int_0^{\pi/2} x\cos^5 x\,dx$$

---

a) Première méthode : Linéarisation du cosinus

Nous savons que : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et que $\cos nx = \dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$. Elevons à la puissance 5

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}+10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}+e^{-5ix}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^4}\frac{\left(e^{5ix}+e^{-5ix}\right)+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\\ &= \frac{1}{16}\left(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x\right)\end{aligned}$$

Par conséquent : $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{16}\int \left(\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x\right)dx$

$$= \boxed{\frac{1}{16}\left(\frac{\sin 5x}{5}+\frac{5\sin 3x}{3}+10\sin x\right)}$$

a) <u>Deuxième méthode : Par parties</u>

$$I=\int \cos^5 x\,dx \quad \to \quad \begin{array}{ll} u=\cos^4 x & u'=-4\cos^3 x\sin x \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array}$$

$$\to I=\sin x\cos^4 x+4\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx=\sin x\cos^4 x+4\int \cos^3 x\left(1-\cos^2 x\right)dx$$

$$=\sin x\cos^4 x+4\int \cos^3 x\,dx-4I$$

$$\to I=\frac{1}{5}\left(\sin x\cos^4 x+4\underbrace{\int \cos^3 x\,dx}_{I_1}\right)$$

$$I_1=\int \cos^3 x\,dx \quad \to \quad \begin{array}{ll} u=\cos^2 x & u'=-2\cos x\sin x \\ v'=\cos x & v=\sin x \end{array}$$

$$\to \ I_1=\sin x\cos^2 x+2\int \cos x\sin^2 x\,dx=\sin x\cos^2 x+2\int \sin^2 x\,d\left(\sin x\right)$$

$$=\sin x\cos^2 x+\frac{2}{3}\sin^3 x$$

Remplaçons dans I

$$I=\frac{1}{5}\left(\sin x\cos^4 x+4\sin x\cos^2 x+\frac{8}{3}\sin^3 x\right)=\frac{1}{15}\left(3\cos^4 x+12\cos^2 x+8\sin^2 x\right)$$

$$\to \boxed{I=\frac{1}{15}\left(\cos^4 x+4\cos^2 x+8\right)}$$

On peut vérifier facilement sur une calculatrice graphique que les dexu expressions de I représente la même courbe.

b) $J=\int_0^{\pi/2} x\cos^5 x\,dx$

$$\text{Par parties : } \quad \begin{array}{ll} u=x & u'=1 \\ v'=\cos^5 x & v=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{5\sin 3x}{3}+10\sin x\right) \end{array}$$

$$\to \ J=\left[\frac{x}{16}\left(\frac{\sin 5x}{5}+\frac{5\sin 3x}{3}+10\sin x\right)\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 5x}{5}+\frac{5\sin 3x}{3}+10\sin x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{32}\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{3}+10\right)-\frac{1}{16}\left[-\frac{\cos 5x}{25}-\frac{5\cos 3x}{9}-10\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{4\pi}{15}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{25}+\frac{5}{9}+10\right)=\frac{4\pi}{15}-\frac{149}{225}$$

$$\to \boxed{J=\frac{60\pi-149}{225}\cong 0.1755}$$

EXANA171 – Louvain, série 1, juillet 2006.

Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs noté $\mathbb{R}_+^*$, par

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda + \ln x}{1 + x^2}$$

Soit M (α; β) un point du plan avec $\alpha > 0$. Démontrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ) représentative de f_λ .

Démontrer que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2.(\lambda + \ln x)$

Etudier les variations de g_λ. On démontrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette solution sera notée m_λ

Dresser le tableau de variation de f_λ . Démontrer que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$ et représenter graphiquement (C_1).

---

a) Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs de λ, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, qui définissent deux courbes qui passent par $M(\alpha,\beta)$.

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\lambda_1 + \ln\alpha}{1+\alpha^2} \\ \beta = \dfrac{\lambda_2 + \ln\alpha}{1+\alpha^2} \end{cases} \rightarrow \frac{\lambda_1 + \ln\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\lambda_2 + \ln\alpha}{1+\alpha^2} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Ce qui est contraire à l'hypothèse. Il n'y a donc qu'une seule courbe C_λ qui passe par M.

b) Calculons $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - (\lambda + \ln x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2(\lambda + \ln x)}{x(1+x^2)^2}$

$$= \frac{g_\lambda(x)}{x(1+x^2)^2}$$

Et comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $g_\lambda(x)$

$c)$ Calculons $g'_\lambda(x) = 2x - 4x(\lambda + \ln x) - 2x^2\dfrac{1}{x} = -4x(\lambda + \ln x)$

Comme $x > 0$, $g'_\lambda(x) = 0$ si $\lambda + \ln x = 0 \to x = e^{-\lambda} > 0$

Ce qui permet de dresser le tableau suivant :

		$e^{-\lambda}$	
$-x$	$-$	$-$	$-$
$\lambda + \ln x$	$-$	0	$+$
	$+$	0	$-$

$g_\lambda(x)$ est donc croissante pour $x < e^{-\lambda}$ et décroissante pour $x > e^{-\lambda}$

Calculons aussi :

$$g_\lambda\left(e^{-\lambda}\right) = 1 + e^{-2\lambda} - 2e^{-2}(\lambda - \lambda) = 1 + e^{-2\lambda} > 0$$

$$\lim_{x\to0^+} g_\lambda = \underbrace{\lim_{x\to0^+}\left(1 + x^2 - 2\lambda x^2\right)}_{=1} - \underbrace{\lim_{x\to0^+} 2x^2 \ln x}_{=0} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_\lambda = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2(\lambda + \ln x)\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 . \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2(\lambda + \ln x)\right)$$

$$= (\infty)^2 . (-\infty) = -\infty$$

Conclusion

pour $0 < x < e^{-\lambda}$	g_λ est croissante et positive
pour $x = e^{-\lambda}$	g_λ est maximale et positive
pour $x > e^{-\lambda}$	g_λ est décroissante
pour $x \to +\infty$	g_λ est négative

$\to g_\lambda$ admet une et une seule racine sur $\mathbb{R}_+^*$ notée m_λ

$d)$ Tableau de variation de f_λ

		m_λ	
g_λ	$+$	0	$-$
f_λ	$\nearrow$	Max	$\searrow$

De plus : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f_\lambda = \lim_{x\to0^+} \frac{\lambda + \ln x}{1 + x^2} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda + \ln x}{1 + x^2} = 0 \quad (Ox \text{ est une AH})$

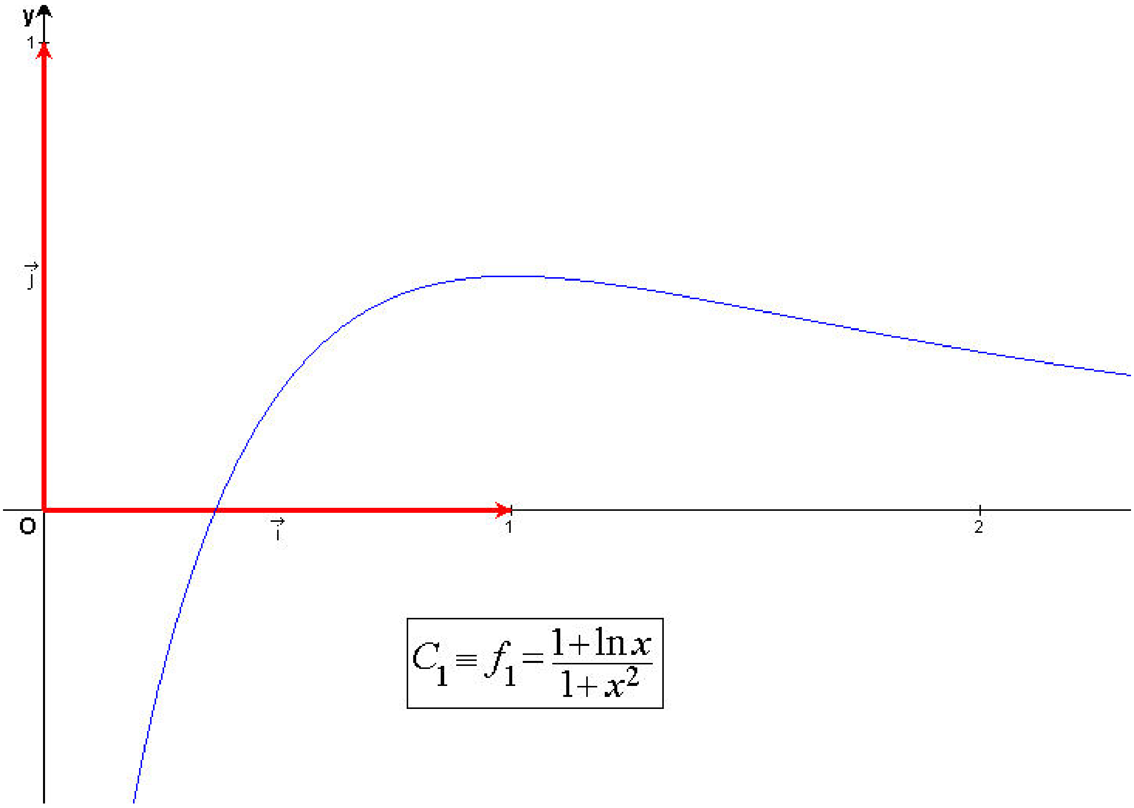
Calculons $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{\lambda + \ln m_\lambda}{1 + m_\lambda^2} \qquad (1)$

or m_λ est une racine de $g_\lambda \to 1 + m_\lambda^2 - 2m_\lambda^2(\lambda + \ln m_\lambda) = 0$

$\to \lambda + \ln m_\lambda = \dfrac{1 + m_\lambda^2}{2m_\lambda^2}$

Remplaçons dans $(1) \to f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$

Ce qui signifie aussi que $f_\lambda(m_\lambda)$ est positif



Le 15 avril 2007

EXANA172 – Louvain, série 1, juillet 2006.

1. Comparer, sans les calculer, les intégrales suivantes :
$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$ et $\int_0^1 \frac{x}{x+1}dx$.
2. On pose $f(x)=\sqrt{e^{-\frac{1}{x}}}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Donner une primitive de $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$
4. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin(x\ln x)}{x}$

---

a) Soient $\begin{cases} I_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx & \text{et} \quad f_1(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1} \\ I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx & \text{et} \quad f_2(x)=\frac{x}{x+1} \end{cases}$

Notons que que sur l'intervalle $[0,1]$

$f_1(0)=f_2(0)=0$

$f_1(1)=f_2(1)=\frac{1}{2}$

Pour les autres valeurs de x: $\sqrt{x}>x \to f_1(x)>f_2(x)$

Conclusion : $\boxed{I_1 > I_2}$

b) Par définition,

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \to f(x)$, la fonction f est continue en le réel a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Ceci implique trois conditions simultanées

$-f$ est définie en a

$-$ la limite en a de f existe

$-$ x ne doit plus être distinct de a

Nous vérifions facilement que la fonction n'est pas continue en $x=0$, puisque

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{e^{-\frac{1}{x}}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-}\sqrt{e^{-\frac{1}{x}}}=+\infty$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes.

Or pour qu'une fonction soit dérivable en un réel a, elle doit être continue.

La fonction n'est donc pas dérivable en $x=0$

$c)\ I=\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=-\int \frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}=-\arctan(\cos x)+C$

$$d)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x\ln x)}{x}$$

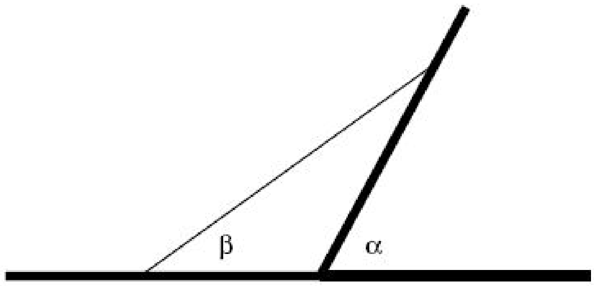
$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0^+}\cos(x\ln x)(\ln x+1)=\lim_{x\to 0^+}\cos(x\ln x)\lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)$$

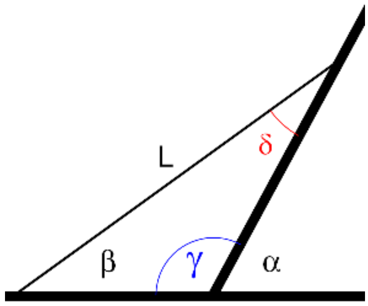
$$=\underbrace{\cos\left(\underbrace{\lim_{x\to 0^+}x\ln x}_{=0}\right)}_{=1}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}(\ln x+1)}_{-\infty}=-\infty$$

Le 15 avril 2007

EXANA173 – Louvain, série 1, juillet 2006.

Sur une surface horizontale, il y a un plan incliné qui fait un angle α avec cette surface. Supposons que $0 < \alpha < 90$ (en degrés).
On pose une échelle contre le plan incliné comme indiqué dans la figure. Quel est l'angle β que l'échelle doit faire avec la surface horizontale pour que la coupe transversale entre l'échelle, la surface horizontale et le plan incliné ait une superficie maximale ? Quelle est cette superficie en fonction de la longueur de l'échelle ?





Les relations entre les angles sont $\begin{cases} \delta = \beta - \alpha \\ \gamma = \pi - \alpha \end{cases}$

La relation des sinus donne : $\frac{\sin\gamma}{L} = \frac{\sin\delta}{x} \rightarrow \frac{\sin(\pi-\alpha)}{L} = \frac{\sin\delta}{x} \rightarrow x = L\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}$

La surface du triangle est donné par :

$$A = \frac{1}{2}L.x.\sin\beta \rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}L^2\sin(\beta-\alpha)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$$

Pour opitimiser cette surface, dérivons :

$$\left(\sin(\beta-\alpha)\sin\beta\right)' = \cos(\beta-\alpha)\sin\beta + \sin(\beta-\alpha)\cos\beta$$

Cette dérivée doit être nulle

$$\cos(\beta-\alpha)\sin\beta + \sin(\beta-\alpha)\cos\beta = 0 \rightarrow \cos(\beta-\alpha)\sin\beta = -\sin(\beta-\alpha)\cos\beta$$

$$\rightarrow \tan\beta = -\tan(\beta-\alpha) \rightarrow \tan\beta = \tan(\alpha-\beta) \rightarrow \beta = \alpha-\beta \rightarrow \boxed{\beta = \frac{\alpha}{2}}$$

Le triangle est alors isocèle.

La surface devient : $A = \frac{1}{2}L^2\sin(\beta-\alpha)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}L^2\sin\alpha\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$

$$\rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}L^2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Le 15 avril 2007

EXANA174 – Louvain, série 2, juillet 2006.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x.\arccos x$$

a) Donner son domaine de définition.
b) Déterminer f' et son domaine de définition.
c) Déterminer f'' et en déduire le tableau de variation de f'.
d) Démontrer que f' s'annule pour une valeur unique $\alpha \in \,]0; 1[$.
e) En déduire le tableau de variation de f et démontrer que f admet un extremum égal à $\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.
f) Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormé en précisant les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 1.

$a)$ Dom $f : [\,-1; +1\,]$

$b)$ $f'(x) = \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ Dom $f'(x) :]\,-1, +1\,[$

$$c)\ f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} - x.\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x)}{1-x^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} - \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}(-1+x^2-1) = \frac{(x^2-2)\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$$

On en déduit que $f''(x)$ est toujours négatif sur l'intervalle $]\,-1, +1\,[$
$\rightarrow f'(x)$ est toujours décroissante.

$d)$ On note que $\begin{cases} f'(0) = \dfrac{\pi}{2} > 0 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = -\infty \end{cases}$

Autrement dit dans l'intervalle $]\,0, +1\,[$, $f'(x)$ est toujours décroissante et passe d'une valeur positive à une valeur négative.
$\rightarrow f'$ s'annule pour une valeur unique $\alpha \in \,]\,0, +1\,[$

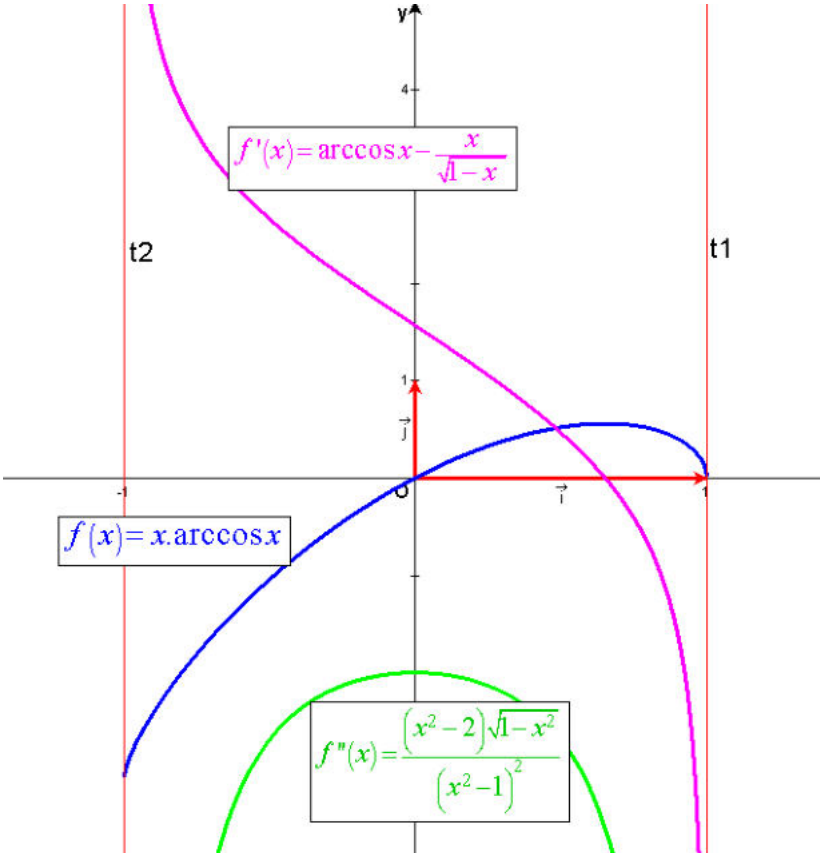
e) Tableau de variation de $f\,'$

	-1		α		1
$f\,'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	

Calculons le maximum.

Soit donc α tel que $f\,'(\alpha)=0 \rightarrow \arccos\alpha-\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=0$

$$\rightarrow \arccos\alpha=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \rightarrow \alpha.\arccos\alpha=\boxed{\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}=f(\alpha)}$$



EXANA175 – EPB, UCL, LLN, série 2, juillet 2006.

1. Soient f et g les fonctions telles que : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

   Déterminer le domaine de définition de fog puis déterminer $(fog)(x)$.

2. Donner le signe de $I=\int_1^0 \left(x-x^2\right)e^x\,dx$ puis calculer I.

3. Calculer la limite de la fonction : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\,e^{\frac{1}{x-1}}$ quand x tend vers 1.

4. On considère la fonction f définie sur $[\,0;\ +\infty\,[$ par : $f(x)=x^2-\sqrt{x}$

   Etudier la dérivabilité de f en 0.

---

1) $\left.\begin{array}{l}\text{dom } f: R\setminus\{1\}\\ \text{dom } g: R_0\end{array}\right\}\rightarrow \text{dom}\,(f\circ g): R\setminus\{\,0{,}1\,\}$

$$(f\circ g)(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{(1+x)x}{(1-x)x}$$

2) $I=\int_1^0 \left(x-x^2\right)e^x\,dx=\int_0^1 \underbrace{\left(x^2-x\right)\,e^x}_{f(x)}\,dx$

On note que $f(0)=f(1)=0$

Le tableau du signe de $f(x)$ est

	0		1
e^x	+	+	+
x^2-x	0	–	0
$f(x)$	0	–	0

Calculons $I=\underbrace{\int_0^1 x^2\,e^x dx}_{I_2}-\underbrace{\int_0^1 x\,e^x\,dx}_{I_1}$

$I_1=\int_0^1 x\,e^x\,dx.$ Par parties : $\begin{array}{ll} u=x & u'=1\\ v'=e^x & v=e^x\end{array}\rightarrow I_1=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-e+1=1$

$\underbrace{I_2=\int_0^1 x^2\,e^x dx}_{I_2}$ Par parties $\begin{array}{ll} u=x^2 & u'=2x\\ v'=e^x & v=e^x\end{array}\rightarrow I_2=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2I_1=e-2$

Finalement : $I=I_2-I_1=e-2-1=\boxed{e-3\simeq-0.2817}$

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

$a)\ \lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}1} f(x)=\dfrac{1}{+0}\times(+\infty)=+\infty$

$$b)\ \lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\sqrt{x}.\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{e^{\ln(x-1)}}=1\times\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}e^{\frac{1}{x-1}-\ln(x-1)}=e^{\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\frac{1-(x-1)\ln(x-1)}{x-1}}$$

$$=e^{\frac{1-\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)\ln(x-1)}{\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)}}=e^{\frac{1-\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}}{\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)}}=e^{\frac{1-\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}}{\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)}}=e^{\frac{1+\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)}{\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}1}(x-1)}}$$

$$=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=0$$

4) $f(x)=x^2-\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0-0=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ n'existe pas.

$f(x)$ n'est donc pas dérivable en 0, mais est uniquement dérivable à droite.

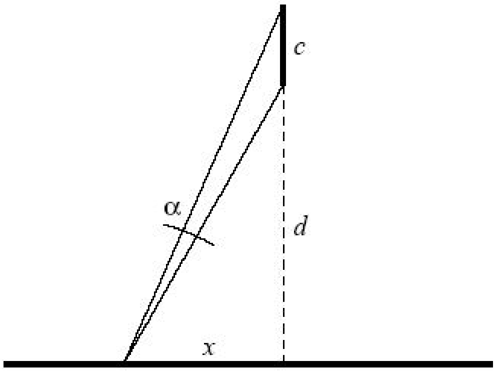
Cette dérivée est $f'(x)=x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ avec $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=-\infty$

Le 15 avril 2007

EXANA176 – EPL, UCL, LLN, série 2, juillet 2006.
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Enoncé de EPL

A la distance d d'un chemin rectiligne, il se trouve un mur rectiligne de longueur c qui forme un angle droit avec le chemin.

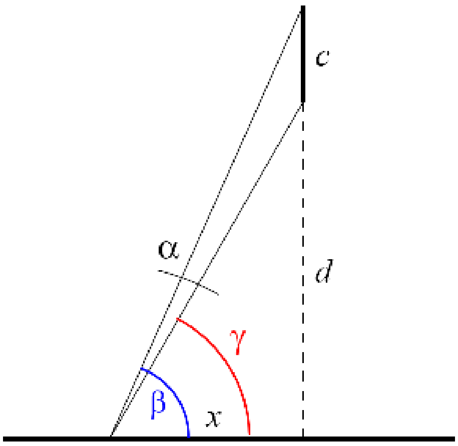


Supposons que nous nous trouvons sur le chemin à un endroit qui est à distance x de l'intersection du chemin avec la prolongation du mur. A cet androit le mur est visible sous l'angle α. Quelle est la valeur de x pour laquelle l'angle α est maximal?
Quel est cet angle? Vous pouvez supposer que l'épaisseur du mur est négligeable.

Enoncé de EPB

Une statue de 9 mètres de hauteur est placée que un socle de 16 mètres de hauteur.
A quelle distance du socle faut-il placer un appareil photographique pour que l'angle α sous lequel on voit la statue soit le plus grand possible (le socle et la statue seront assimilés à des segments verticaux superposés, le sol sera supposé horizontale et l'angle sera mésuré au sol)?

Solution de EPL



Nous avons : $\alpha=\beta-\gamma$

or $\begin{cases}\beta=\arctan\dfrac{c+d}{x}\\ \gamma=\arctan\dfrac{d}{x}\end{cases} \Rightarrow \alpha=\arctan\dfrac{c+d}{x}-\arctan\dfrac{d}{x}$ (1)

Pour maximaliser α, il suffit d'égaliser la dérivée à zéro

$$\Rightarrow \alpha'=\left(\arctan\frac{c+d}{x}\right)'-\left(\arctan\frac{d}{x}\right)'=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{c+d}{x}\right)^2}.\left(-\frac{c+d}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+\left(\frac{d}{x}\right)^2}.\left(-\frac{d}{x^2}\right)\Rightarrow \frac{c+d}{x^2+(c+d)^2}=\frac{d}{x^2+d^2}$$

$$\Rightarrow (c+d)(x^2+d^2)=d\left(x^2+(c+d)^2\right)\Rightarrow cx^2+\cancel{dx^2}+cd^2+\cancel{d^3}=\cancel{dx^2}+dc^2+2cd^2+\cancel{d^3}$$

$$\Rightarrow cx^2=dc^2+cd^2\rightarrow x^2=dc+d^2\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{dc+d^2}} \qquad (2)$$

Remplaçons dans $(1)\Rightarrow \alpha=\arctan\dfrac{c+d}{\sqrt{dc+d^2}}-\arctan\dfrac{d}{\sqrt{dc+d^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\arctan\sqrt{\frac{c+d}{d}}-\arctan\sqrt{\frac{d}{c+d}}}$$

On peut transformer la dernière expression :

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{\frac{c+d}{d}}-\sqrt{\frac{d}{c+d}}}{1+\sqrt{\frac{c+d}{d}}.\sqrt{\frac{d}{c+d}}}=\frac{1}{2}\frac{c+d-d}{\sqrt{d(c+d)}}\Rightarrow \boxed{\alpha=\arctan\frac{c}{2x}} \qquad (3)$$

Solution de EPL

Distance. Il suffit de remplacer dans (2): $x=\sqrt{9\times16+16^2}=20$ m

Angle. On remplace dans (3): $\alpha=\arctan\dfrac{9}{2\times20}=12.68°$

Le 15 avril 2007. Modifié le 13 septembre 2018.

EXANA177 – EPL, UCL, LLN, septembre 2006.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$
2. Calculer $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x-x\ln x}\,dx$
3. Soit f la fonction définie sur R par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}+x-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ a & \text{si } x=0\end{cases}$
   a. Déterminer a pour que f soit continue en $x = 0$
   b. Pour la valeur de a trouvée en 1, démontrer que f est dérivable en 0

---

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

2) $I=\displaystyle\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x-x\ln x}\,dx=\int_{e^2}^{e^3}\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$

On pose $t=\ln x\rightarrow\begin{cases}dt=\dfrac{1}{x}dx\\ x=e^2\rightarrow t=2\\ x=e^3\rightarrow t=3\end{cases}$

$\rightarrow I=-\displaystyle\int_2^3\frac{dt}{t-1}=-\left[\ln(t-1)\right]_2^3=\boxed{-\ln 2}$

3) Continuité

Par définition,

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$, la fonction f est continue en le réel a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Ceci implique trois conditions simultanées

- $-f$ est définie en a
- $-$ la limite en a de f existe
- $-$ x ne doit plus être distinct de a

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\left(-e^{-x}+1\right)=0\to a=0 \qquad (1)$$

Dans ce cas, la fonction est bien définie en a. La limite existe et $f(0)=0$

Dérivabilité

La fonction f est dérivable en le réel a si le taux d'acroissement de f admet une limite réelle lorsque l'acroissement de la varible x tend vers 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{2x}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

La limite existe donc et f est dérivable en $x=0$

Vérifions la valeur de la dérivée, en appliquant les formules de dérivation

$$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x}\right)'=\frac{\left(-e^{-x}+1\right)x-\left(e^{-x}+x-1\right)}{x^2}=\frac{-e^{-x}(x+1)+1}{x^2}$$

Calculons la limite en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}(x+1)+1}{x^2}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}$$

Ce qui est bien la même valeur.

EXANA178 – EPL, UCL, LLN, septembre 2006.

On considère la fonction g définie sur [0; + ∝ [par :

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}$$

a) Etudier les variations de g.
b) Démontrer qu'il existe un unique réel a strictement positif tel que $g(a) = 0$, puis prouver que $a \in$] (ln 2)/2 ; 1 [.
c) Etudier le signe de g.

On considère la fonction f définie sur] 0; +∝ [par :

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

d) Montrer que pour tout x strictement positif

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\, g\left(\frac{1}{x}\right)$$

e) En déduire les variations de f.
(On ne demande pas de calculer la limite de f quand x tend vers 0.)

$a)$ $g'(x) = -1 + 2e^{-x}$

$$g'(x) = 0 \to -1 + 2e^{-x} = 0 \to x = \frac{\ln 2}{2}$$

$g''(x) = -4e^{-x}$ Toujours négatif

Variations de $g(x)$

	0		$\frac{\ln 2}{2}$	
$g'(x)$	1	+	0	−
$g''(x)$	−	−	−	−
$g(x)$	0	↗	Max	↘

$b)$ $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{-2\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \simeq 0.1534 > 0$

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Autrement dit, la fonction $g(x)$ est continuement décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\ln 2}{2}; -\infty\right[$ et passe d'une valeur positive à une valeur négative. $\to g(x)$ s'annule sur cet intervalle.

Et comme $g(1) = 1 - 1 - e^{-2} < 0$, cet intervalle se réduit à $\left]\frac{\ln 2}{2}; 1\right[$

Soit donc a, tel que $g(a) = 0$

$c)$ Signe de $g(x)$

	0		a		1	
$g(x)$	0	+	0	−	−	−

$$d)\ g\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{x}-e^{-\frac{2}{x}}=\frac{x-1-xe^{-\frac{2}{x}}}{x}$$

$$f(x)=x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}$$

$$\rightarrow f'(x)=\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}+x.\frac{1}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}.e^{\frac{2}{x}}.\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)-e^{\frac{2}{x}}}{x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}$$

$$=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}\left(\frac{x-xe^{-\frac{2}{x}}-1}{x}\right)=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}g\left(\frac{1}{x}\right)$$

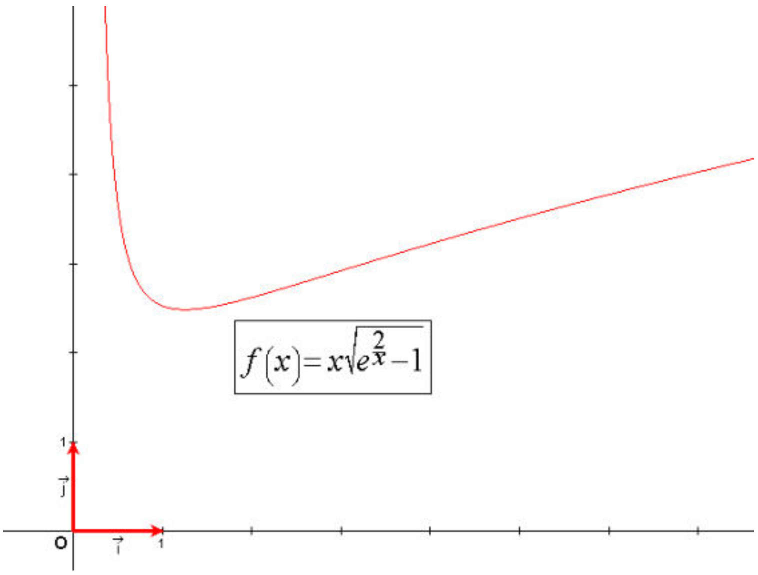
$e)$ Puisque $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}>0,$ le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(\dfrac{1}{x}\right)=+1>0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty<0$

$g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ s'annule donc sur l'intervalle $\left]\ 0;+\infty\ \right[$

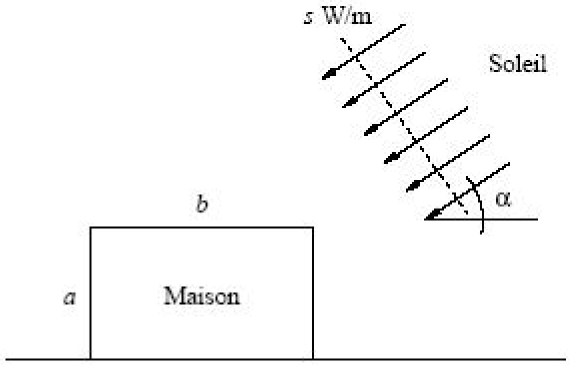
Soit b tel que $g\left(\dfrac{1}{b}\right)=0,$ nous avons alors de tableau de variations de f suivant :

	0		b	
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$-\infty$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$

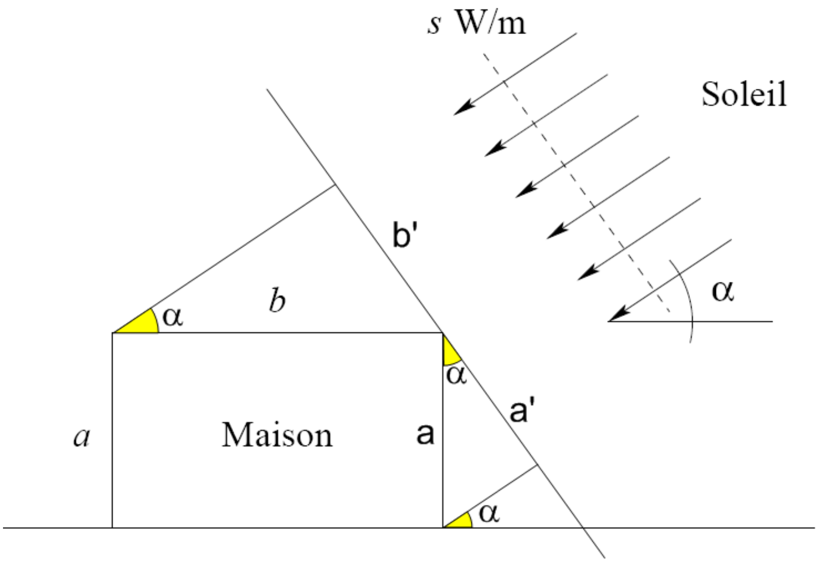


EXANA179 – EPB, UCL, LLN, septembre 2006.

Nous allons investiguer l'insolation d'une maison. Dans le cas général, c'est un problème en trois dimensions. Pour simplifier le problème, nous allons regarder une coupe de la maison en deux dimensions :



Supposons que la maison a une hauteur de a mètres et une largeur de b mètres.
Les rayons du soleil forment un angle α avec le sol. Le soleil envoie une puissance de s Watt/mètre, mesurée en angle droit avecles rayons.
Répondez alors auxdeux questions suivantes :
1. Quelle est lavaleur de α en fonction de a,b et s pour laquelle l'insolation est maximale ?
2. Quelle est la valeur de cette insolation maximale en fonction de a, b et s?



1) L'intensité reçue est égale à : $I = (a' + b')s$ (1)

où a' et b' sont les projections de a et b sur le plan perpendiculaire au sens de propagation des rayons.

Nous avons $\begin{cases} a' = a\cos\alpha \\ b' = b\sin\alpha \end{cases}$. $\Rightarrow (1)$ devient : $I = (a\cos\alpha + b\sin\alpha)s$ (2)

Pour maximaliser, il suffit d'égaler la dérivée à zéro :

$$\Rightarrow a\sin\alpha - b\sin\alpha = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arctan\frac{b}{a}}$$

2) Exprimons $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ en fonction de $\frac{b}{a}$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{b^2}{a^2} + 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Remplaçons dans $(2) \Rightarrow I = s\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \Rightarrow \boxed{I = s\sqrt{a^2+b^2}}$

Le 15 avril 2007