

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 19**

EXANA0190 – EXANA199

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXANA190 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  impaire, périodique de période 4. Dans l'intervalle  $[0,2]$ , elle est définie par :

$$f(x) = 1 - |1 - x|$$

Calculer :

$$\int_0^5 f(x) dx$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

La question est simplissime quand on se schématise la situation :

La fonction étant impaire, le graphe de  $f(x)$  est dans l'intervalle  $[-2,0]$  l'opposé de celui défini dans l'énoncé. La période étant de 4, cet opposé se retrouve donc aussi dans l'intervalle  $[2,4]$ .

On peut donc déjà dire par ce simple raisonnement que  $\int_0^4 f(x) dx = 0$ .

Il reste à calculer  $\int_4^5 f(x) dx$  qui est la même que  $\int_0^1 f(x) dx$  vu la période de 4.

Entre 0 et 1, la fonction est définie par  $f(x) = x$

Et donc :

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx = 0 + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA191 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Déterminer les réels a, b et c de telle manière que :

$$\frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

Calculer :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

Il suffit de remettre sous le même dénominateur :

$$\frac{(bx+c)(1+x) + a(1+x^2)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + c + a}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il est maintenant facile de calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \int_0^1 \left( \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

La première intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2$$

La seconde intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\text{ArcTan}(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

La troisième intégrale nous donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx^2 = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

L'intégrale d'une somme étant égale à la somme des intégrales, on a finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{2} \left( \ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right) = \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8} \approx 0,566}$$

---

## EXANA192 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Calculer :

$$A = \int_0^x e^t \cos(2t) dt$$

$$B = \int_0^x e^t \sin(2t) dt$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

Calculons d'abord les primitives par partie :

Pour A :

$$\begin{aligned} u = \cos(2t) &\rightarrow du = -2 \sin(2t) dt &\Rightarrow F_A = e^t \cos(2t) + 2 \int e^t \sin(2t) dt = e^t \cos(2t) + 2F_B \\ dv = e^t dt &\rightarrow v = e^t \end{aligned}$$

Pour B :

$$\begin{aligned} u = \sin(2t) &\rightarrow du = 2 \cos(2t) dt &\Rightarrow F_B = e^t \sin(2t) - 2 \int e^t \cos(2t) dt = e^t \sin(2t) - 2F_A \\ dv = e^t dt &\rightarrow v = e^t \end{aligned}$$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} F_A = e^t \cos(2t) + 2B \\ F_B = e^t \sin(2t) - 2A \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$F_A = \frac{e^t}{5} (\cos(2t) + 2 \sin(2t))$$

$$F_B = \frac{e^t}{5} (\sin(2t) - 2 \cos(2t))$$

Notons que :

$$F_A(0) = \frac{1}{5} \quad F_A(x) = \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x))$$

$$F_B(0) = \frac{-2}{5} \quad F_B(x) = \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x))$$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{e^x}{5} (\cos(2x) + 2 \sin(2x)) - \frac{1}{5} \\ B &= \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) + \frac{2}{5} \end{aligned}}$$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA193 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Le polynôme de degré 4 suivant, appelé polynôme de Tchebychev, possède une propriété intéressante sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Pour la découvrir, réaliser l'étude de la fonction ci-dessous et tracer son graphique.

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

### Solution proposée par Steve Tumson

Tout d'abord, il n'y a aucune restriction sur le domaine de définition et il est évident que la fonction est paire.

Il n'y a aucune asymptote au vu du commentaire précédent.

Etudions la variation de  $f$  grâce à sa dérivée première :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = 32x^3 - 16x = 16x(2x^2 - 1) = 16x(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)$$

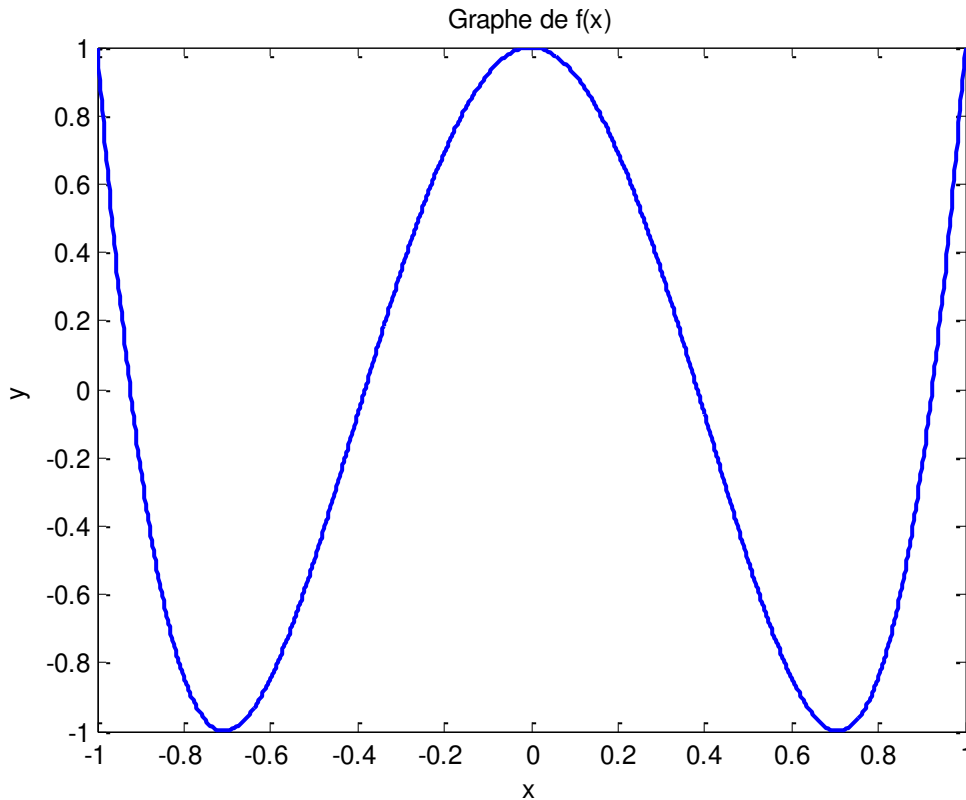
Tableau de variation :

	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$16x$	-	-	0	+
$\sqrt{2}x - 1$	-	-	-	0
$\sqrt{2}x + 1$	-	0	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\searrow$	<i>Min</i>	$\nearrow$	<i>Max</i>
				$\searrow$
				$\nearrow$

Etudions maintenant la concavité à l'aide de la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 96x^2 - 16 = 16(6x^2 - 1) = 16(\sqrt{6}x - 1)(\sqrt{6}x + 1)$$

	$-\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	
$\sqrt{6}x - 1$	-	-	0
$\sqrt{6}x + 1$	-	0	+
$f''(x)$	+	<i>PI</i>	-
			<i>PI</i>
			+



Il reste à déterminer cette fameuse propriété intéressante entre  $-1$  et  $1$ .

Il faut se poser la question : à quoi me fait penser une fonction paire, bornée, définie sur un intervalle de  $-1$  à  $1$  et dont le graphe nous inspire fortement une fonction trigonométrique .....

..... à une composition de la fonction trigonométrique cosinus et la fonction cyclométrique arccosinus bien entendu !

Il vient comme choix d'écrire que notre polynôme dans  $[-1, 1]$  est égale à une expression de type :

$$f(x) = a \cos(n(\arccos(bx))) \quad \text{ou} \quad f(x) = a \arccos(n(\cos(bx)))$$

Le domaine est  $[-1, 1]$  et le graphe final est borné ce qui nous incite fortement à travailler avec la première expression.

Le domaine de  $f(x) = a \cos(n(\arccos(bx)))$  est  $\left[\frac{-1}{b}, \frac{1}{b}\right]$  et nous travaillerons

donc avec  $b = 1$ .

L'amplitude de  $f(x) = a \cos(n(\arccos(bx)))$  est  $a$  et nous travaillerons donc avec  $a = 1$

Le paramètre  $n$  quant à lui ne peut pas être nul ni valoir 1 dans quel cas la fonction s'écrirait bêtement  $f(x) = \cos(\arccos(x)) = x$ .

On peut écrire  $f(x) = \cos(n(\arccos(x))) = \cos(n\beta)$  en posant  $\beta = \arccos(x)$ .

Dès lors, vu que :  $f(x) = \cos(n\beta) = \Re\{\cos(n\beta) + i\sin(n\beta)\}$

(Note :  $\Re\{z\}$  désigne la partie réelle de  $z$ )

La formule de Moivre nous permet d'écrire :

$$f(x) = \Re\{\cos(n\beta) + i\sin(n\beta)\} = \Re\{(\cos(\beta) + i\sin(\beta))^n\}$$

Où en remplaçant  $\beta$  :

$$f(x) = \Re\{(\cos(\arccos x) + i\sin(\arccos x))^n\} = \Re\{(x + i\sqrt{1-x^2})^n\}$$

Notre polynôme étant d'ordre 4, nous choisirons bien naturellement de travailler avec  $n = 4$ .

Il vient donc :

$$f(x) = \Re\{(x + i\sqrt{1-x^2})^4\}$$

Calculons

$$\begin{aligned} (x + i\sqrt{1-x^2})^4 &= \left( (x + i\sqrt{1-x^2})^2 \right)^2 = \left( (2x^2 - 1) + 2ix\sqrt{1-x^2} \right)^2 \\ &= (2x^2 - 1)^2 - 4x^2(1-x^2) + 4ix(2x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Sa partie réelle est donc :

$$(2x^2 - 1)^2 - 4x^2(1-x^2) = 4x^4 + 1 - 4x^2 - 4x^2 + 4x^4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

On retrouve donc bien notre polynôme de départ !

Conclusion :

Dans l'intervalle  $[-1,1]$ , le polynôme  $8x^4 - 8x^2 + 1$  est équivalent à  $\cos(4\arccos(x))$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA194 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit la fonction  $h(x)$  définie dans l'intervalle  $[1,3]$  par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) = \ln x & x \in [1, e] \\ g(x) = ax^2 + bx + 1 & x \in [e, 3] \end{cases}$$

1. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $h$  et sa dérivée soit continue en  $x = e$
  2. Calculer le volume engendré par la rotation de la représentation de  $h(x)$  autour de l'axe des abscisses.
- 

**Solution proposée par Steve Tumson**



$$1. \quad \begin{cases} f(e) = \ln e = 1 \\ g(e) = ae^2 + be + 1 \end{cases} \Rightarrow f(e) = g(e) \Leftrightarrow ae + b = 0$$

$$\begin{cases} f'(e) = \frac{1}{e} \\ g'(e) = 2ae + b \end{cases} \Rightarrow f'(e) = g'(e) \Leftrightarrow \frac{1}{e} = 2ae + b$$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} ae + b = 0 \\ \frac{1}{e} = 2ae + b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} a = e^{-2} \\ b = -e^{-1} \end{matrix}}$$

$$2. \quad V = \pi \int_1^3 h^2(x) dx = \pi \int_1^e f^2(x) dx + \pi \int_e^3 g^2(x) dx$$

La première primitive se calcule par partie :

$$\int f^2(x) dx = \int \ln^2 x dx$$

$$u = \ln x \quad \rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \ln x dx \quad \rightarrow v = x \ln x - x$$

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x dx &= x \ln^2 x - x \ln x - \int \ln x dx + \int dx = x \ln^2 x - x \ln x - x \ln x + x + x + C \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

Et donc, 
$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left[ x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = e - 2$$

La deuxième primitive se calcule plus facilement :

$$\begin{aligned} \int_e^3 g^2(x) dx &= \int_e^3 (e^{-2}x^2 - e^{-1}x + 1)^2 dx \\ &= \int_e^3 (e^{-4}x^4 - 2e^{-3}x^3 + 3e^{-2}x^2 - 2e^{-1}x + 1) dx \\ &= \left[ \frac{e^{-4}x^5}{5} - \frac{e^{-3}x^4}{2} + e^{-2}x^3 - e^{-1}x^2 + x \right]_e^3 \\ &= \left( \frac{e^{-4}3^5}{5} - \frac{e^{-3}3^4}{2} + e^{-2}3^3 - e^{-1}3^2 + 3 \right) - \left( \frac{7e}{10} \right) \approx 0,31 \end{aligned}$$

Le volume engendré est donc :

$$\boxed{V \approx \pi(e - 2 + 0,31) \approx \pi}$$

## EXANA195 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Primitiver les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin^2 x \cos x$$

$$g(x) = \sin^3 x$$

$$h(x) = 9x \sin^2 x \cos x$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

- $\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

- $\int g(x)dx = \int \sin^3 x dx = \int \left( \frac{3 \sin(x) - \sin(3x)}{4} \right) dx = \frac{3}{4} \int \sin x dx - \frac{1}{4} \int \sin(3x) dx$   
 $= \frac{3}{4} \int \sin x dx - \frac{1}{4} \int \sin(3x) dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos(3x) + C$

- $\int h(x)dx = \int 9x \sin^2 x \cos x dx = \int (9x)(f(x)) dx$

$$u = 9x \quad \rightarrow du = 9dx$$

Par partie :  $dv = f(x)dx \quad \rightarrow v = \frac{\sin^3 x}{3}$

$$\int (9x)(f(x)) dx = 3x \sin^3 x - 3 \int \sin^3 x dx = 3x \sin^3 x - 3 \int g(x) dx$$

$$= 3x \sin^3 x + \frac{9}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos(3x) + C$$

---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA196 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Etudier la fonction suivante :

$$f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 2}$$

---

Solution proposée par Steve Tumson

1. Domaine :  $x \neq \ln 2$

2. Asymptotes :

- Verticales : envisageable en  $x = \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} \right) = 2 \ln 2 + \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{e^x}{e^x - 2} = 2 \ln 2 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} \right) = 2 \ln 2 + \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^x}{e^x - 2} = 2 \ln 2 + \frac{2}{0^-} = -\infty$$

- Obliques : critère de Cauchy pour asymptote d'équation  $y = kx + t$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{e^x}{x(e^x - 2)} \right) = 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(1 - e^{-x})} = 2$$

$$t_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 2e^{-x}} = 1$$

$$t_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 2} = 0$$

Il y a donc une asymptote verticale  $x = \ln 2$ , une asymptote oblique à droite  $y = 2x + 1$  et une asymptote oblique à gauche  $y = 2x$ .

3. Variation : s'étudie par le biais de la dérivée première

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2 + \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x}{e^x - 2} \right) = 2 - \frac{2e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{2e^{2x} - 10e^x + 8}{(e^x - 2)^2}$$

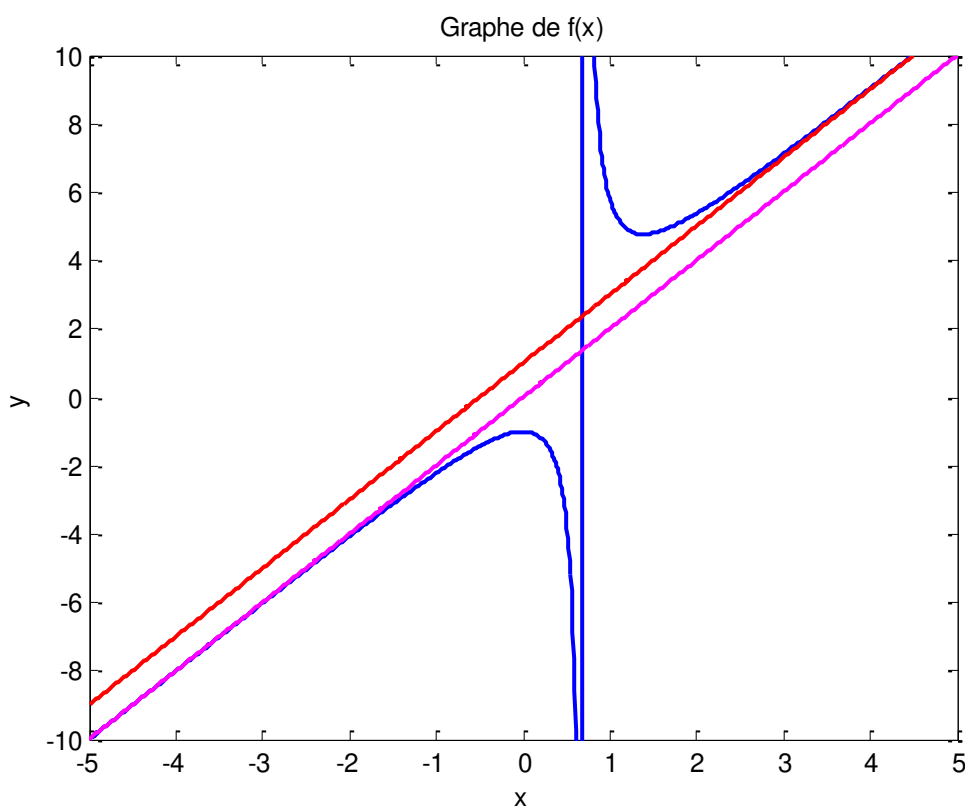
Si on pose  $T = e^x$ , le numérateur s'écrit  $2T^2 - 10T + 8$  et s'annule pour  $T = 4$  et  $T = 1$

On écrit donc que les racines du numérateur sont :  $\begin{cases} e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \approx 1,38 \end{cases}$

Tableau de variation :

	0	ln 2	ln 4	
$2e^{2x} - 10e^x + 8$	+ 0	- /	- 0	+
$f'(x)$	+ 0	- /	- 0	+
$f(x)$	↗ <i>Max</i>	↘ <i>AV</i>	↘ <i>Min</i>	↗

La dérivée seconde n'est pas demandée.




---

Le 22 juillet 2007.

## EXANA197 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$$

1. Déterminer les triplets  $(a,b,c)$  et  $(a',b',c')$  tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1-e^x}$$

$$f(x) = a'x + b' + \frac{c'e^x}{1-e^x}$$

2. Analyser la fonction (la dérivée seconde est à calculer)

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. Il suffit de tout ramener au même dénominateur et d'utiliser les coefficients indéterminés :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1-e^x} = \frac{ax(1-e^x) + b(1-e^x) + c}{1-e^x} = \frac{(-ax-b)e^x + ax + b + c}{1-e^x}$$

$$\text{Il faut donc : } \begin{cases} a = -\frac{4}{9} \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

De la même façon pour la deuxième écriture :

$$f(x) = a'x + b' + \frac{c'e^x}{1-e^x} = \frac{a'x(1-e^x) + b'(1-e^x) + c'e^x}{1-e^x} = \frac{(-a'x - b' + c')e^x + a'x + b'}{1-e^x}$$

$$\text{Il faut donc : } \begin{cases} a' = -\frac{4}{9} \\ b' = 0 \\ c' = 1 \end{cases}$$

2. Nous disposons donc de 3 formes différentes de notre fonction :

$$f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$$

$$f(x) = -\frac{4}{9}x - 1 + \frac{1}{1-e^x}$$

$$f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$$

Le domaine de définition n'est pas trop compliqué :  $x \neq 0$

Les asymptotes maintenant :

• Verticale : on s'attend à en trouver une en  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{4}{9}x - 1 + \frac{1}{1-e^x} \right) = -1 + \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{4}{9}x - 1 + \frac{1}{1-e^x} \right) = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty$$

• Oblique : on utilise le critère de Cauchy pour une asymptote d'équation  $y = kx + t$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{4}{9} + \frac{e^x}{x(1-e^x)} \right) = -\frac{4}{9} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x(1-e^x)} = -\frac{4}{9} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(e^{-x}-1)} = -\frac{4}{9}$$

$$t_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x} \right) - \left( -\frac{4}{9}x \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x}{1-e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x}-1} = -1$$

$$t_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \left( -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x} \right) - \left( -\frac{4}{9}x \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right) = 0$$

Il y a donc une asymptote verticale, une asymptote oblique à droite  $y = -\frac{4}{9}x - 1$

et une asymptote oblique à gauche  $y = -\frac{4}{9}x$

Pour l'étude de la variation (dérivée première), la forme la plus simple pour le calcul est clairement la seconde :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -\frac{4}{9} + \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-e^x} \right) = -\frac{4}{9} + \frac{e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{-4e^{2x} + 17e^x - 4}{9(1-e^x)^2}$$

Le numérateur se factorise en posant  $T = e^x$ , il vient :  $-4T^2 + 17T - 4$

Les solutions sont :  $T = 4$  et  $T = \frac{1}{4}$

$$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$$

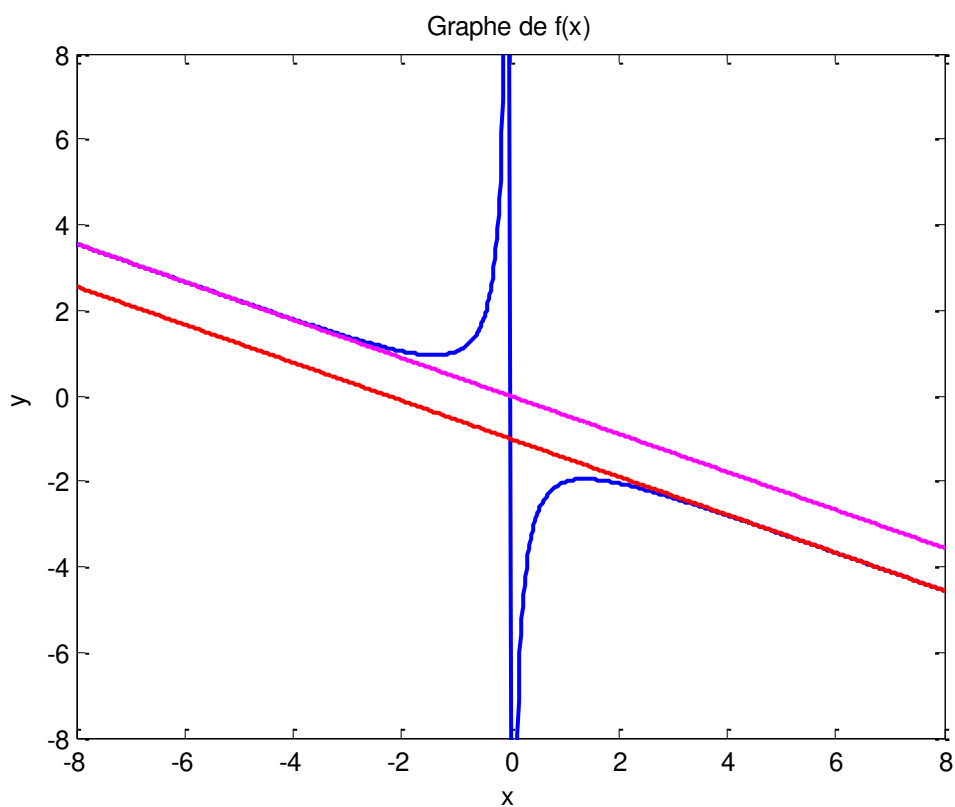
Ou encore :  $e^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\ln 4$

Tableau de variation

	$-\ln 4$		0		$\ln 4$		
$-4e^{2x} + 17e^x - 4$	-	0	+	/	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	/	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	<i>Min</i>	$\nearrow$	<i>AV</i>	$\nearrow$	<i>Max</i>	$\searrow$

Il reste à simplement calculer la dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x}{(1-e^x)^2} \right) = \frac{e^x(1-e^x)^2 + 2e^{2x}(1-e^x)}{(1-e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^3}$$



Le 22 juillet 2007.

## EXANA198 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Lorsque le paramètre  $m \geq 0$ , rechercher le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f(x) = \sqrt{\ln \left( \sqrt{\frac{x^2 + m}{x + 4}} \right)}$$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

- La première condition est sur la première racine carrée (dans le logarithme).  
Le paramètre étant toujours positif, le numérateur l'est aussi.  
La première condition est donc simplement :  $x > -4$

- La deuxième condition est sur la seconde racine.  
Un logarithme est positif pour toute valeur de  $x$  supérieure à 1.

$$\ln \left( \sqrt{\frac{x^2 + m}{x + 4}} \right) \geq 0$$

La fonction logarithme étant bijective, on peut écrire :

$$\sqrt{\frac{x^2 + m}{x + 4}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + m}{x + 4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + (m - 4)}{x + 4} \geq 0$$

Vu la première condition d'existence, on peut écrire plus simplement :

$$x^2 - x + (m - 4) \geq 0$$

Le discriminant de ce second degré s'écrit :  $\rho = 17 - 4m$

- o Si  $m > \frac{17}{4}$  le polynôme n'admet aucune racine réelle :  
l'inéquation est vérifiée  $\forall x \in ]-4, +\infty[$
- o Si  $0 \leq m < \frac{17}{4}$  le second degré admet deux racines réelles distinctes  
 $0 \leq m < \frac{17}{4}$  et l'inéquation est vérifiée  
 $\forall x \in \left] -4, \frac{1 - \sqrt{17 - 4m}}{2} \right] \cup \left[ \frac{1 + \sqrt{17 - 4m}}{2}, +\infty \right[$
- o Si  $m = \frac{17}{4}$  le second degré admet une racine double réelle  $x_{1,2} = \frac{e^2}{2}$   
et l'inéquation est vérifiée  $\forall x \in ]-4, +\infty[$

---

Le 22 juillet 2007.



## EXANA199 – FPMS – Mons, Juillet 2004. (ANA04.07)

On demande de représenter graphiquement, **sans faire d'étude de fonction**, la fonction suivante :

$$f(\phi) = |1 - (\cos N\phi + i \sin N\phi)|^2$$

pour  $\phi$  allant de 0 à  $2\pi$  et pour  $N$  prenant successivement les valeurs :  $N : 1, 2, 3, \dots, 10$

---

### Solution proposée par Steve Tumson

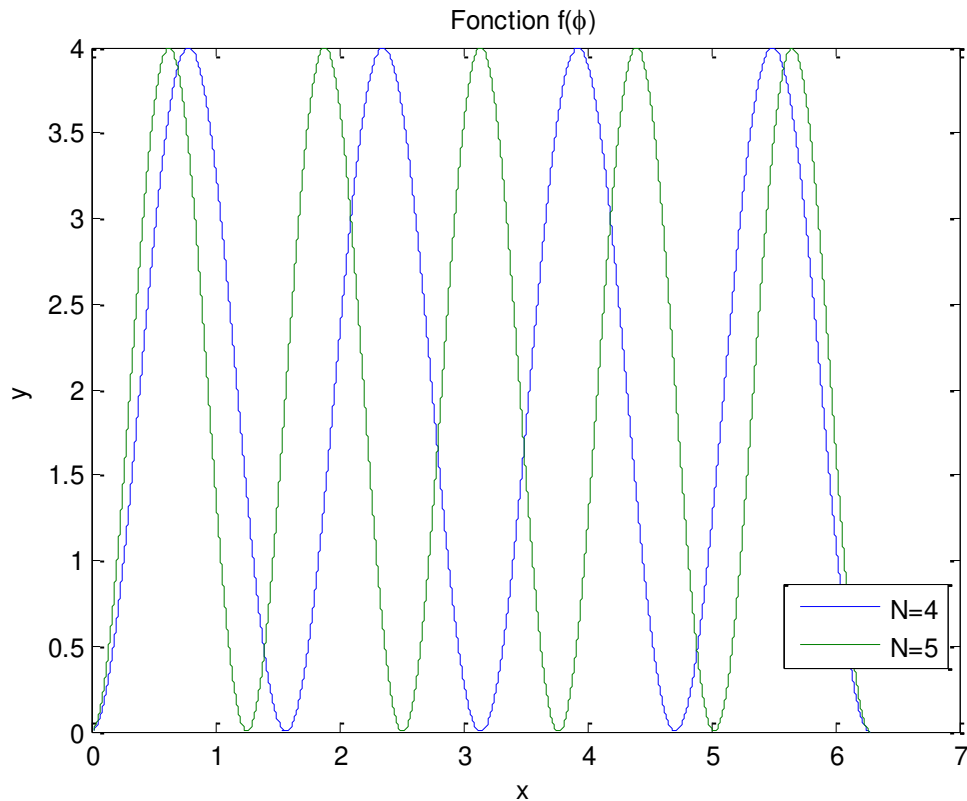
Il suffit de calculer la fonction de façon à éliminer le module.

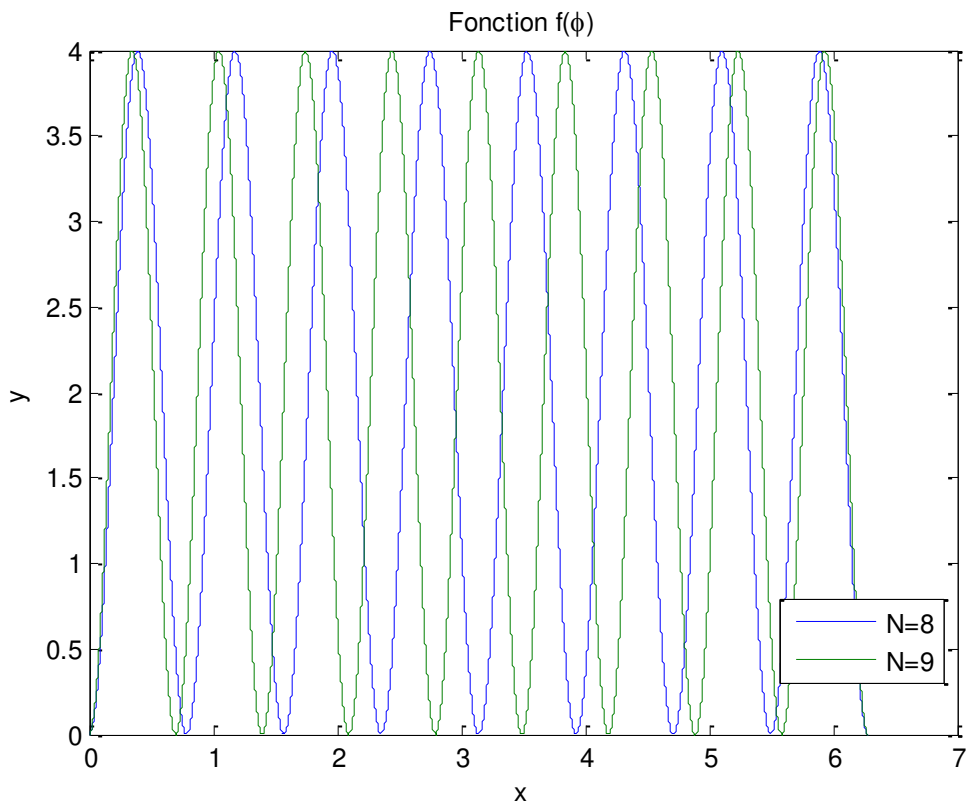
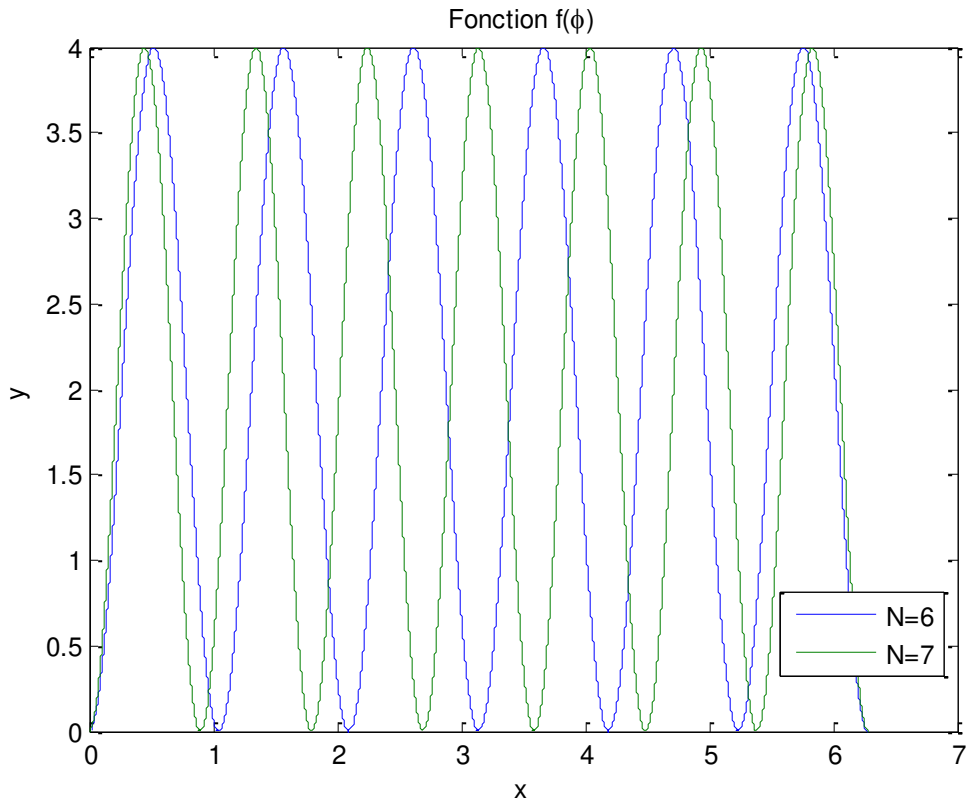
$$|1 - (\cos N\phi + i \sin N\phi)| = \sqrt{(1 - \cos N\phi)^2 + (\sin N\phi)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos N\phi}$$

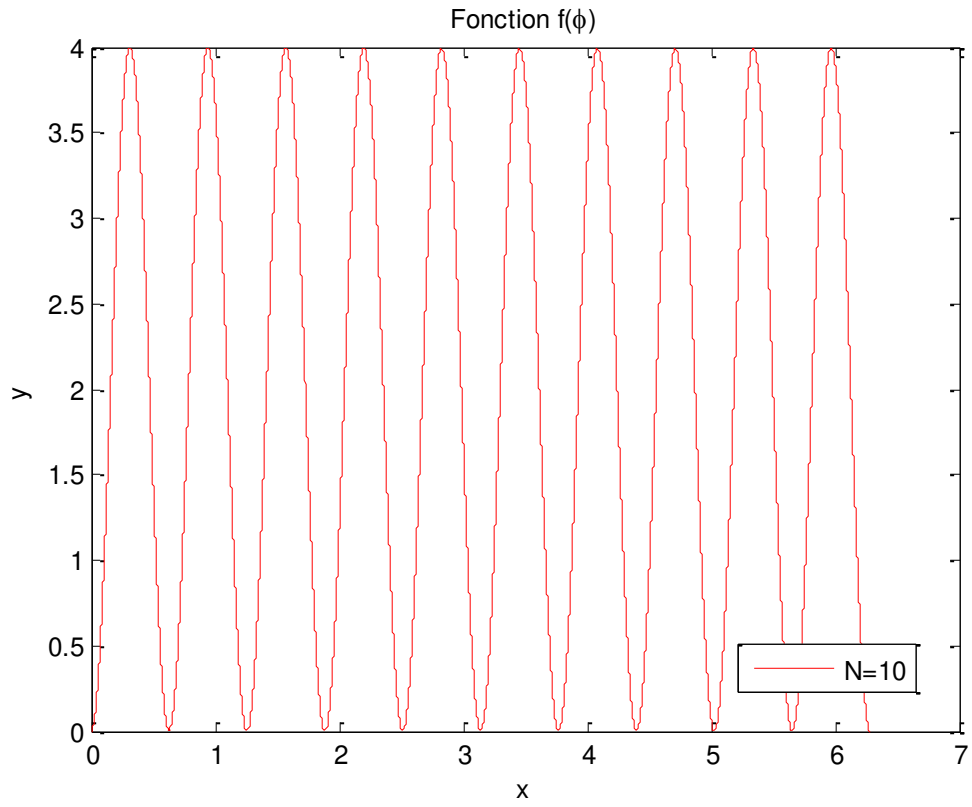
Et donc en fait :

$$f(\phi) = 2(1 - \cos N\phi)$$

C'est le graphe d'une cosinusoïde d'amplitude 2 et de période  $T = \frac{2\pi}{N}$







---

20 juillet 07.