Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 21

EXANA210 – EXANA219

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXANA210 – FACSA – ULG, liège – septembre 07

Soit la fonction

$$f(x) = \ln\left[\frac{\alpha e^x}{1+x^2}\right]$$

où α est un paramètre réel strictement positif.

En discurant s'il y a lieu de la valeur prise par le paramètre α

i. déterminez le domaine de définition de f.

ii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f

iii. déterminez et caractérisez les éventuels extrema.

iv étudiez la concavité et identifiez les éventuels points d'inflexion.

v esquissez le graphe de f.

Solution proposée par l'université.

i. La fonction $g(x) = \dfrac{\alpha e^x}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ pour tout $\alpha > 0$.

Comme $\ln y$ est défini pour tout $y > 0$, la fonction composée $f(x) = \ln|g(x)|$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc le domaine de définition de f

NB: Remarquons que la fonction f s'écrit aussi : $f(x) = \ln\alpha + x - \ln(1+x^2)$

ii. La fonction f, étant continue sur $\mathbb{R}$, n'a pas d'asymptote verticale.
En vue de déterminer les éventuelles asymptotes horizontale, examinons les limites des valeurs de f si x tend respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\alpha e^x}{1+x^2} = 0$ et $\lim\limits_{y\to 0} = -\infty$
et il n'y a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha e^x}{1+x^2} \overset{Hospital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha e^x}{2x} \overset{Hospital}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha e^x}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} = +\infty$

Recherchons à présent les éventuelles asymptotes obliques.
D'une part,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left[\frac{\alpha e^x}{1+x^2}\right]}{x} \overset{Hospital}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\alpha e^x(1+x^2)-\alpha e^x 2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{\alpha e^x}{1+x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = 1$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = "-\infty+\infty"$
Pour lever cette indétermination, écrivons f sous la frome alternative donnée en i., d'où
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\alpha + x - \ln(1+x^2) - x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\alpha - \ln(1+x^2)\right) = -\infty$
Il n'y a donc pas d'symptote oblique en $-\infty$
D'autre part, on obtient de la même manière, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$
et la levée de l'indétermination $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right) = "-\infty+\infty"$ conduit aussi à $-\infty$
Il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $+\infty$
En conclusion, le graphe de f ne présente aucune asymptote.

iii. La fonction f est dérivable : $f'(x) = \frac{\frac{\alpha e^x(1+x^2)-\alpha e^x 2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{\alpha e^x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$
On constate que cette dérivée s'annule seulement en $x=1$ et est strictement positive sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et le graphe de f ne présente aucun extremum.

iv. La dérivée seconde

$$f''(x)=\frac{-2(1-x)(1+x^2)-(1-x)^2\,2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2(1-x)(1+x^2+x-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{-2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

s'annule en $x=\pm 1$ et change de signe resepctivement de part et d'autre de -1 et $+1$.

Donc, les points $x=\pm 1$ correspondent à des points d'inflexion.

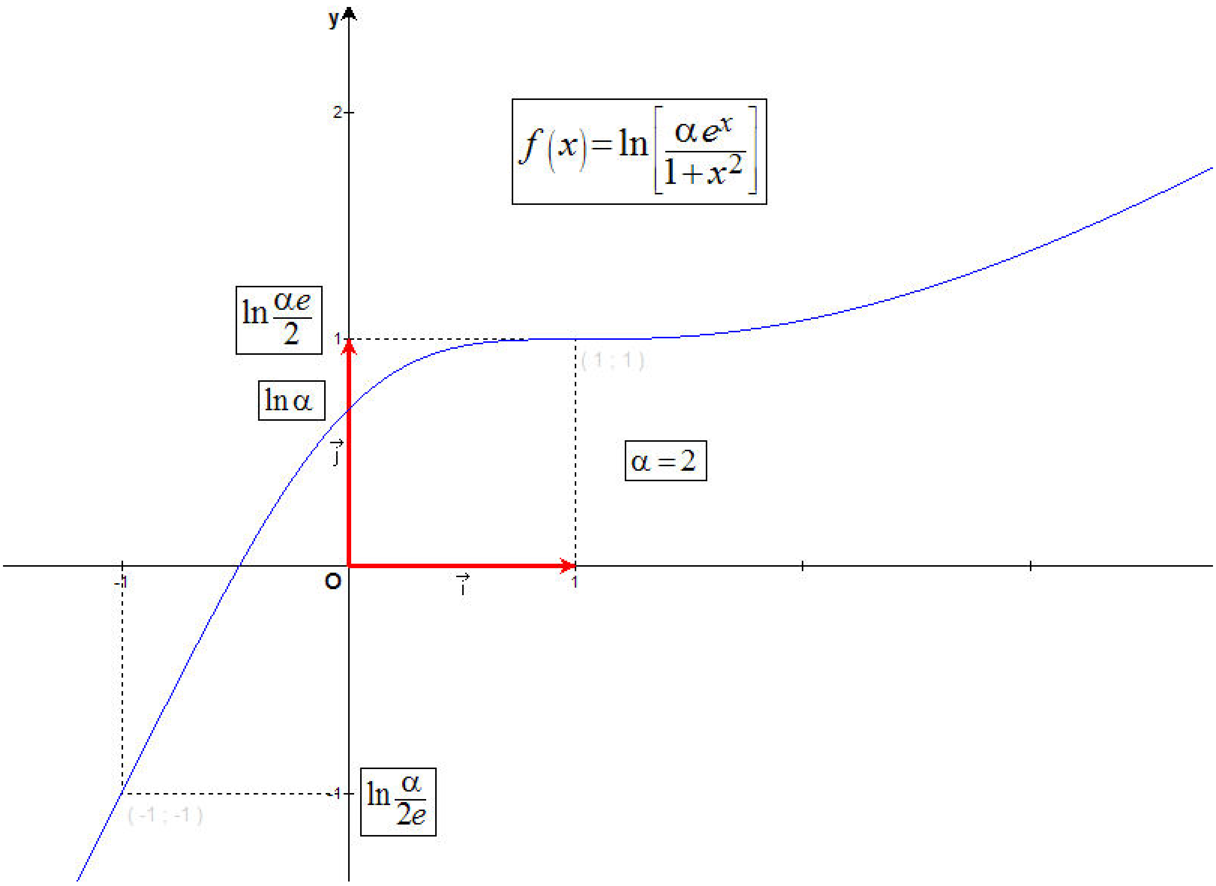
v. En vue d'esquisser le graphe de f, établissons le tableau des variations :

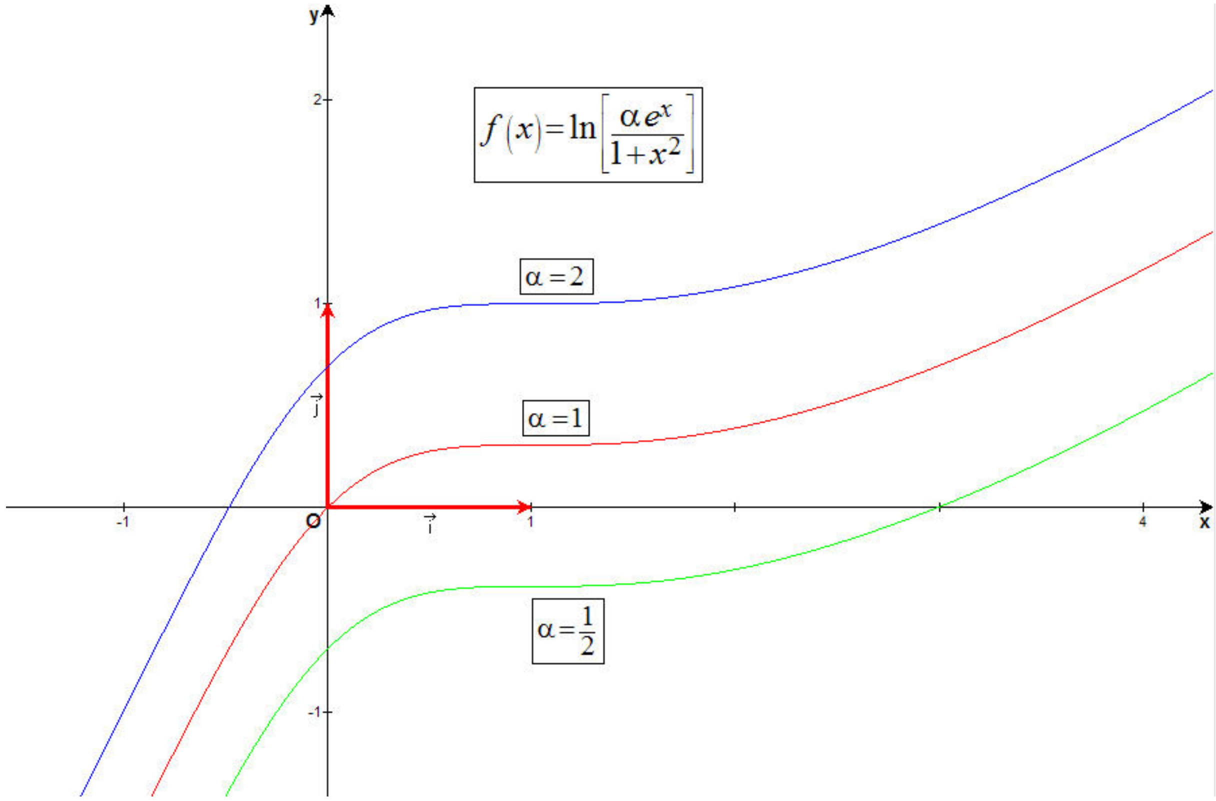
	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'	1	+	2	+	0	+	1
f''	0	+	0	−	0	+	0
f	$-\infty$	$\nearrow$ $\cup$	$\ln\frac{\alpha}{2e}$ PI	$\nearrow$ $\cap$	$\ln\frac{\alpha e}{2}$ PI tg horiz	$\nearrow$ $\cup$	$+\infty$

Pour $\alpha>0$, le graphe a l'allure donnée ci-dessous.

Notons de plus que $f(x)=\ln\alpha+\ln\frac{e^x}{1+x^2}$ avec $f(0)=\ln\alpha$.

DOnc les graphes pour différentes valeurs de $\alpha>0$ sont tous parallèles et si $\alpha=1$, le graphe passe par l'origine des axes.





y
2
1
-1
O
-1
1
4
x
$f(x)=\ln\left[\frac{\alpha e^x}{1+x^2}\right]$
$\alpha=2$
$\alpha=1$
$\alpha=\frac{1}{2}$

15 oct. 07.

EXANA211 – FACSA – ULG, liège – septembre 07

On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^n \, dx$$

où n désigne un entier positif ou nul.

i. calculez I_0.

ii. calculez I_1

iii. calculez I_2

iv montrez que la suite des intégrales I_n varie monotonément. en fonction de n, c'est-à-dire

$$I_n < I_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ou } I_n > I_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Solution proposée par l'université.

i. Pour $n = 0$, nous avons $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$

ii. Pour $n = 1$, nous avons

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

iii. Pour $n = 2$, nous avons

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} (\tan x)^2 \, dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$$

$$= \left[(\tan x - x)\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

iv. De ce qui précède, nous constatons que $I_0 \approx 0.785 > I_1 \approx 0.346 > I_2 \approx 0.215$.
Ceci suggérait que $I_n > I_{n+1}$

Montrons le en genéral. Comme $0 < \tan x < 1, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, nous déduisons que

$$(\tan x)^n > (\tan x)^{n+1} > 0, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ainsi le graphe de $(\tan x)^n$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ est situé au-dessus de celui de $(\tan x)^{n+1}$ (qui est lui-même situé au-dessus de l'axe des x). Ceci signifie que l'aire sous-tendue par $(\tan x)^n$ est supérieure à celle sous-tendue par $(\tan x)^{n+1}$, C'est à dire : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx > \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x \, dx = I_{n+1}$

En conclusion : $I_n > I_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Ce qui signifie que I_n décroit monotonément en fonction de n.

---

15 oct. 07.

EXANA212 – FSA – UCL – Louvain, juillet 07 série 1.

1. Calculez la dérivée de la fonction suivante

$$f(x)=\left(x^2\right)^{\left(e^{2x}\right)}$$

2. Calculez la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} u\sqrt{1+\frac{1}{u}}-u$$

3. Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle] 0 1 [par

$$f(a)=\int_a^1 x^3 \ln x \, dx$$

Calculez $\lim_{a\to 0} f(a)$.

4. Soit *f* une fonction continue quelconque définie sur l'intervalle [0, *a*].
Démontrez l'égalité

$$\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt=\int_0^a f(a-t)t^2 dt$$

---

1) Comme x^2 est toujours positif, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\left(x^2\right)^{\left(e^{2x}\right)}=e^{\ln x^2 . e^{2x}}$$

$$\to f'(x)=e^{\ln x^2 . e^{2x}}\left(\frac{1}{x^2}.2x.e^{2x}+\ln x^2.e^{2x}.2\right)=2e^{2x}.\left(x^2\right)^{\left(e^{2x}\right)}\left(\frac{1}{x}+\ln x^2\right)$$

$$\to \boxed{f'(x)=2e^{2x}.\left(x^2\right)^{\left(e^{2x}\right)}\frac{1+2\ln x}{x}}$$

2) $$\lim_{x\to\infty} u\sqrt{1+\frac{1}{u}}-u=\lim_{x\to\infty} u\left(\sqrt{1+\frac{1}{u}}-1\right)=\lim_{x\to\infty} u\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{u}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{u}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{u}}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty} u\frac{1+\frac{1}{u}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{u}}+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u}}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

3) $f(a)=\int_a^1 x^3\ln x\,dx$

$$\left.\begin{array}{ll} u=\ln x & \rightarrow \quad u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x^3 & \rightarrow \quad v=\dfrac{x^4}{4} \end{array}\right\} \rightarrow f(a)=\left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_a^1-\frac{1}{4}\int_a^1 x^3dx=-\frac{a^4}{4}\ln a-\frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_a^1$$

$$=-\frac{a^4}{4}\ln a-\frac{1}{16}+\frac{a^4}{16}$$

$$\lim_{a\to0} f(a)=\lim_{a\to0}\left(-\frac{a^4}{4}\ln a-\frac{1}{16}+\frac{a^4}{16}\right)=-\frac{1}{4}\underbrace{\lim_{a\to0}a^4\ln a}_{A}+\underbrace{\lim_{a\to0}\left(-\frac{1}{16}+\frac{a^4}{16}\right)}_{=-\frac{1}{16}}$$

$$A=\lim_{a\to0}a^4\ln a=\lim_{a\to0}\frac{\ln a}{a^{-4}}\xrightarrow{Hospital}\lim_{a\to0}\frac{\frac{1}{a}}{-4a^{-5}}=-\frac{1}{4}\lim_{a\to0}a^4=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{a\to0} f(a)=-\frac{1}{16}}$$

4) Le membre de gauche admet une primitive F.

$$\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt=\left[F(t)\right]_0^a=F(a)-F(0) \qquad (1)$$

qui est un nombre dépendant uniquement de a

Pour le membre de droite, posons $:u=a-t\rightarrow\begin{cases} t=a-u \\ du=-dt \\ t=a\rightarrow u=0 \\ t=0\rightarrow u=a \end{cases}$

$$\rightarrow\int_0^a f(a-t)t^2dt=-\int_a^0 f(u)(a-u)^2\,du=\int_0^a f(u)(a-u)^2\,du$$

Ce qui donnera la même primitive F

$$\rightarrow\int_0^a f(a-t)t^2dt=\left[F(t)\right]_0^a=F(a)-F(0) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ de (1) et (2): $\boxed{\int_0^a (a-t)^2 f(t)dt=\int_0^a f(a-t)t^2dt}$

30 jan 08.

EXANA213 – FSA – UCL – Louvain, juillet 07 série 1.

Soit a un paramètre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+a)^2 e^{a-x}$$

Le graphe de f est la courbe du plan définie par $y = f(x)$.

1. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau des variations de f contenant
   (a) les racines et le signe de f, f' et f'',
   (b) les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   (c) les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.

   (les éléments de ce tableau peuvent bien entendu dépendre de a)
2. A l'aide de ce tableau, esquissez l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé, en indiquant les éventuels
   (a) asymptotes (dont on précisera les équations),
   (b) racines (dont on précisera les abscisses),
   (c) extrema (dont on précisera les abscisses et ordonnées),
   (d) points d'inflexion (dont on précisera uniquement les abscisses).

   (ces points et droites caractéristiques peuvent bien entendu dépendre du paramètre a)
3. Calculez l'ordonnée du point du graphe de f d'abscisse $x = a$ puis calculez l'équation de la droite tangente au graphe en ce point. Dans le cas où le paramètre a est égal à 2, utilisez cette équation pour calculer une valeur numérique approximative de $f(2.001)$.
4. En utilisant les résultats obtenus aux points (1) et (2), discutez en fonction du paramètre a le nombre de solutions de l'équation en x

   $$(x+a)^2 = 4e^{x-a}$$

   (*conseil* : on pourra considérer le nombre de points d'intersection du graphe de f avec une droite bien choisie parallèle à l'axe des abscisses)

---

1) Racine de $f(x)$: $x=-a$

Dérivée première

$f'(x)=2(x+a)e^{a-x}-(x+a)^2e^{a-x}=e^{a-x}(x+a)(2-x-a)$

Racines de $f'(x):\begin{cases}x=-a\\x=2-a\end{cases}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x+a)(2-x-a)$

Tableau de variation

		$-a$		$2-a$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Si $x=a,$ l'extréma est un minimum : $Min(-a,0)$

Si $x=2-a,$ l'extréma est un maximum : $Max\left(2-a,4e^{-2+2a}\right)$

Dérivée seconde

$$f''(x)=-e^{a-x}(x+a)(2-a-x)+e^{a-x}(2-a-x)-e^{a-x}(x+a)$$
$$=e^{a-x}\left(x^2+2(a-2)x+a^2-4a+2\right)$$

Racines de $f''(x):x=(a-2)\pm\sqrt{(a-2)^2-(a^2-4a+2)}=(a-2)\pm\sqrt{a^2-4a+4-a^2+4a-2}$

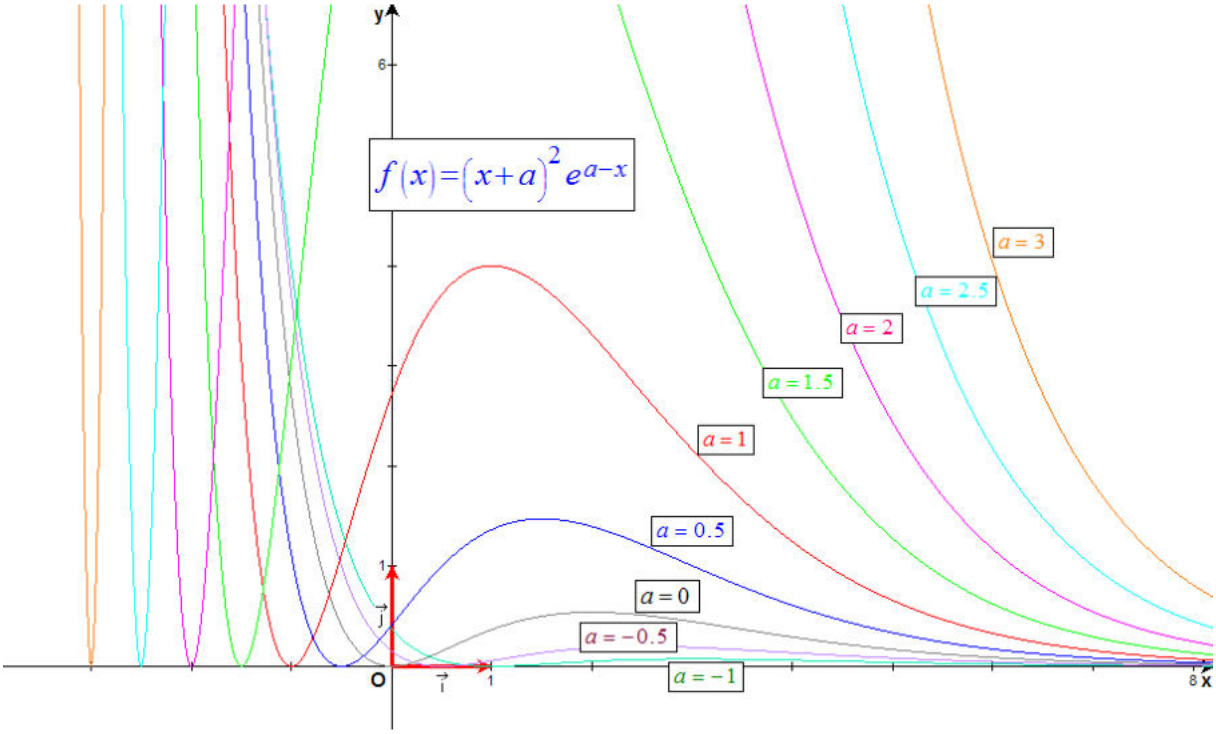
$\rightarrow x=a-2\pm2\rightarrow\begin{cases}x=a-2-\sqrt{2}\\x=a-2+\sqrt{2}\end{cases}$

Tableau de variation

		$a-2-\sqrt{2}$		$a-2+\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

2) La famille de courbes possède un asymptote horizontale : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\rightarrow AH\equiv y=0$

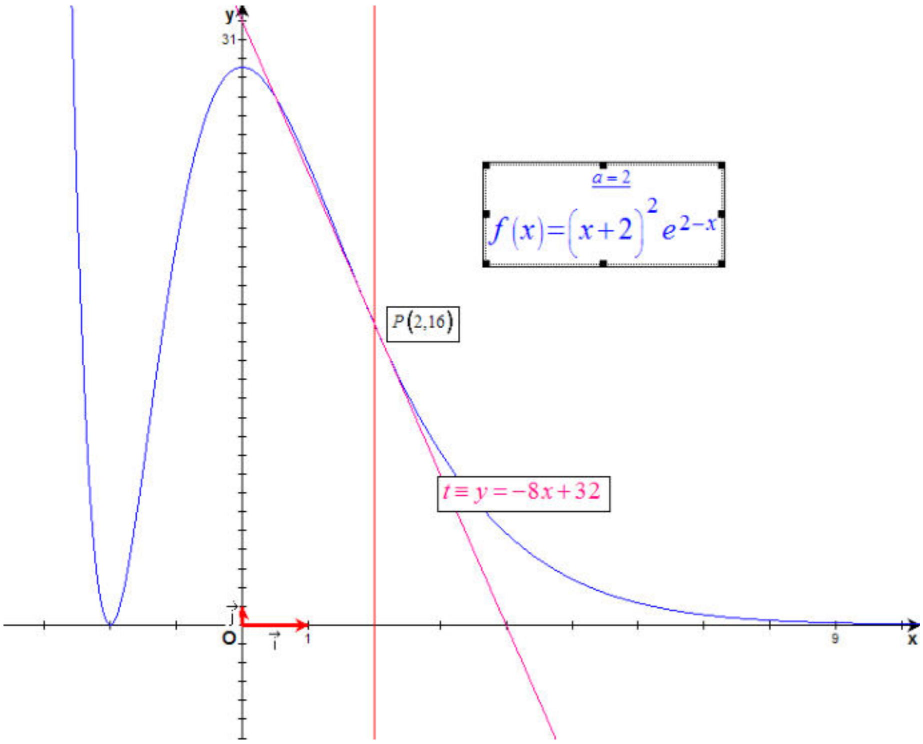


3) $\begin{cases} f(a)=4a^2 \\ f'(a)=4a(1-a) \end{cases} \rightarrow t \equiv y-4a^2=4a(1-a)(x-a)$

Si $a=2 \rightarrow t \equiv y=-8x+32$

2.001 étant très proche de 2, la fonction est assimilable à la tangente t

$\rightarrow f(2.001) \simeq y=-8\times 2.001+32=15.992$



4) Transformons l'équation : $(x+a)^2 = 4e^{x-a} \rightarrow e^{x-a}(x+a)^2 = 4$

Ce qui nous ramène à la fonction étudiée.

La question devient alors :

Quel est le nombre d'intersection entre la fonction et la droite d'équation $y = 4$?

Remarquons que l'ordonnée du maximum est : $4e^{-2+2a}$ c'est-à-dire une fonction de a croissante. De plus : $4e^{-2+2a} = 4 \rightarrow a = 1$

	$a < 1$	1 solution
Conclusion :	$a = 1$	2 solutions
	$a > 1$	3 solutions

30 Jan 08.

EXANA214 – EPL, UCL, LLN, juillet 07 série 1.

Soit un canon installé sur un plan incliné comme indiqué sur ce diagramme ci-dessous.

Le plan incliné fait un angle β avec l'horizontale (on a $0 \leq \beta < \pi / 2$).

Le canon fait un angle α avec l'horizontale (et on a $\beta \leq \alpha < \pi/2$).

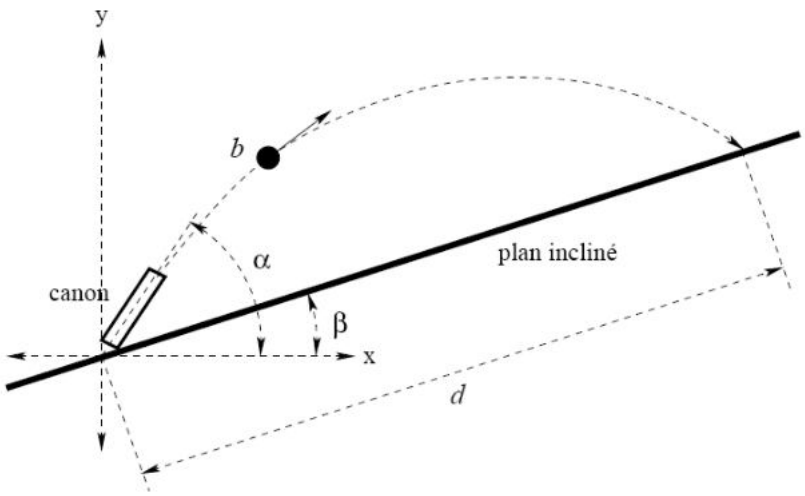
Lecanon tire une boule *b*. La vitesse initiale de la boule est v_0 et l'accélération gravitationnelle est g. Supposez alors quela position de la boule après un temps t est donnée par

$$(x, y) = \left(v_0 t \cos\alpha, v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \right)$$

Après un certaintemps, la boule tombe sur le plan incliné à une distance d du canon.

Pour cette question,

1. déterminez la valeur de t au moment de l'impact de la boule sur le plan incliné,
2. déterminez la valeur de l'angle α (en fonction de l'angle β) pour que la distance d soit maximale,
3. quelle est cette distance maximale ?



1) Nous avons donc le système : $\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha & (1) \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} & (2) \end{cases}$

Si d est la portée du tir, nous avons aussi : $\begin{cases} x = d\cos\beta & (3) \\ y = d\sin\beta & (4) \end{cases}$

Ce qui nous donne : $\begin{cases} (1)=(3) \Rightarrow v_0 t\cos\alpha = d\cos\beta & (5) \\ (2)=(4) \Rightarrow v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} = d\sin\beta & (6) \end{cases}$

De (5), nous tirons la valeur de t au moment de l'impact de la boule sur le plan incliné:

$$\boxed{t = \frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha}} \qquad (7)$$

2) Remplaçons t dans (6) en utilisant (7):

$$v_0 . \frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha}.\sin\alpha - \frac{g}{2}.\left(\frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = d\sin\beta$$

Nous pouvons simplifier par $d \neq 0$ et nous obtenons :

$$\frac{g}{2}.\frac{\cos^2\beta}{v_0^{\,2}\cos^2\alpha}.d = \cos\beta\tan\alpha - \sin\beta \Rightarrow d = \frac{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}{g\cos^2\beta}.\cos\beta.(\tan\alpha - \tan\beta)$$

$$\Rightarrow d = \underbrace{\frac{2v_0^{\,2}}{g\cos\beta}}_{A}\left(\underbrace{\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tan\beta\cos^2\alpha}_{B}\right) \qquad (8)$$

Le facteur A est indépendant de α. Pour calculer la distance maximale $d_{\max}$,
il suffit de dériver le facteur B en fonction de α et ensuite d'annuler cette dérivée.

$$B' = \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tan\beta\cos^2\alpha\right)' = \cos 2\alpha + 2\tan\beta\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\tan\beta\sin 2\alpha \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{1}{\tan\beta} = \cot(-\beta)$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}}$$

Vérifions que α est bien dans les limites définies :

$\begin{cases} \beta = 0 \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} \\ \beta = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ Résultat connu. Voir cours de physique

3) Pour calculer la distance maximale, remplaçons α dans

$$d_{\max} = \frac{2v_0^{\ 2}}{g\cos\beta}\left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \tan\beta\cos^2\alpha\right) = \frac{2v_0^{\ 2}}{g\cos\beta}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{2} - \tan\beta\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}_{C}\right)$$

Calculons le facteur C :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-\sin\beta)$$

Donc : $d_{\max} = \dfrac{2v_0^{\ 2}}{g\cos\beta}\left(\dfrac{\cos\beta}{2} - \tan\beta.\dfrac{1-\sin\beta}{2}\right) = \dfrac{v_0^{\ 2}}{g}\dfrac{\cos^2\beta - \sin\beta + \sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$$\Rightarrow \boxed{d_{\max} = \frac{v_0^{\ 2}}{g}.\frac{1-\sin\beta}{\cos^2\beta}}$$

Nous pouvons vérifier des résultats connus :

$\beta = 0 \Rightarrow d_{\max} = \dfrac{v_0^{\ 2}}{g}$ Voir cours de physique : tir oblique

$\beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow d_{\max} = \dfrac{v_0^{\ 2}}{g}.\dfrac{0}{0}$ C'est une indétermination

$$d_{\max} = \lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}} \frac{v_0^{\ 2}}{g}.\frac{1-\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{v_0^{\ 2}}{g}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

$$\xrightarrow{Hospital} \frac{v_0^{\ 2}}{g}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos\beta}{-2\cos\beta\sin\beta} = \frac{v_0^{\ 2}}{2g}\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\beta} = \frac{v_0^{\ 2}}{2g}$$

Nous retrouvons bien la formule donnant la hauteur atteinte lors d'un lancer vertical avec une vitesse initiale v_0

30 jan 08.

EXANA215 – FSA – UCL – Louvain, juillet 07 série 2.

1. Calculez une primitive de la fonction

$$f(x) = x^2 e^{2x}$$

2. Calculez la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \sin x}{x^2 + x + \sin x}$$

3. Calculez

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2} dx$$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{x^4 + x^2} - |x|$$

Etudiez la différentiabilité de f en 0.

---

1) $I = \int x^2 e^{2x}\, dx$

Par parties : $\begin{cases} u' = e^{2x} \to u = \frac{1}{2} e^{2x} \\ v = x^2 \quad \to v' = 2x \end{cases} \to I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \underbrace{\int x\, e^{2x}\, dx}_{I_1}$

Calculons I_1 aussi par parties :

$$\begin{cases} u' = e^{2x} \to u = \frac{1}{2} e^{2x} \\ v = x \quad \to v' = 1 \end{cases} \to I_1 = \frac{1}{2} x\, e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Donc : $I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} = \boxed{\frac{e^{2x}}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + C}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan \sin x}{x^2 + x + \sin x} \xrightarrow{Hospital} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(\sin x)} \cos x}{2x + 1 + \cos x} = \boxed{\frac{1}{2}}$

3) $\int_1^2 \frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d\left(x^3+1\right)}{\left(1+x^3\right)^2} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x^3}\right]_1^2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \frac{2-9}{18} = \frac{7}{54}$

4) $a)$ Soit $x > 0 \rightarrow |\ x\ | = x$

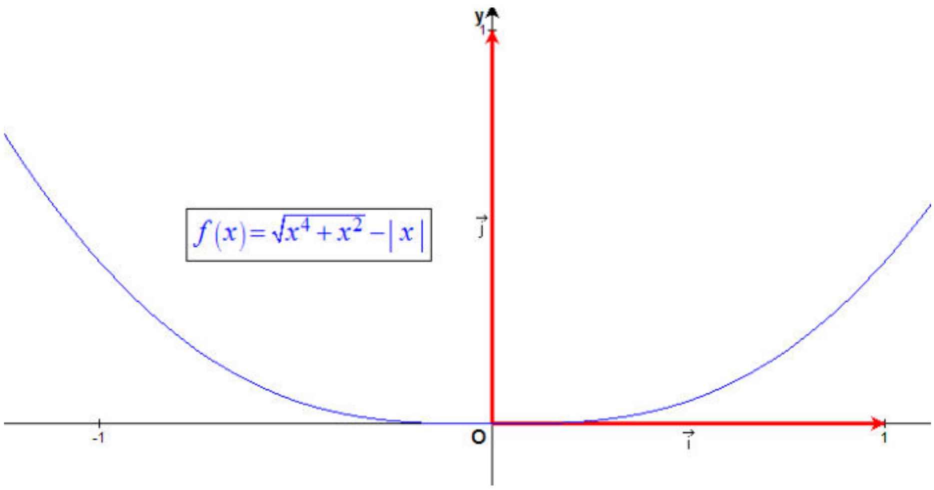
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + x^2}}.(4x^3 + 2x) - 1 = \frac{x(2x^2 + x)}{|\ x\ |\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) = 0$$

$b)$ Soit $x < 0 \rightarrow |\ x\ | = -x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + x^2}}.(4x^3 + 2x) + 1 = \frac{x(2x^2 + x)}{|\ x\ |\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = -\frac{2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 \right) = 0$$



30 Jan 08.

EXANA216 – FSA – UCL – Louvain, juillet 07 série 2.

Soit a un paramètre réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + \frac{e^{-2x} - e^{a-x}}{e^a - 1}$$

Le graphe de f est la courbe du plan définie par $y = f(x)$.

1. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau des variations de f contenant
   (a) les racines et le signe de f, f' et f'',
   (b) les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   (c) les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.
   (les éléments de ce tableau peuvent bien entendu dépendre de a)
2. A l'aide de ce tableau, esquissez l'allure du graphe de f dans un repère orthonormé, en indiquant les éventuels
   (a) asymptotes (dont on précisera les équations),
   (b) racines (dont on précisera les abscisses),
   (c) extrema (dont on précisera les abscisses et ordonnées),
   (d) points d'inflexion (dont on précisera uniquement les abscisses).
   (ces points et droites caractéristiques peuvent bien entendu dépendre du paramètre a)
3. Calculez l'équation de la droite tangente au graphe au point d'abscisse 0 puis déterminez son intersection avec la droite d'équation $y = 1$.
4. On considère à présent la restriction de la fonction f au domaine [0 $\propto$ [. Déterminez les valeurs du paramètre a pour lesquelles cette restriction admet une fonction réciproque, et déterminez pour ces valeurs le domaine de définition de cette fonction réciproque.

---

1) Racines de $f(x)$: $1+\dfrac{e^{-2x}-e^{a-x}}{e^a-1}=0\rightarrow e^a-1+e^{-2x}-e^{a-x}=0$

$\rightarrow e^{-2x}-e^a e^{-x}+e^a-1=0\rightarrow e^{-x}=\dfrac{1}{2}\left(e^a\pm\sqrt{e^{2a}-4e^a+4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^a\pm\left(e^a-2\right)\right)$

$\rightarrow\begin{cases}e^{-x}=1\rightarrow e^{-x}=e^0 & \rightarrow x=0\\ e^{-x}=e^a-1 & \rightarrow x=-\ln\left(e^a-1\right)\end{cases}$

Notons le cas particulier : $a=\ln 2$. Nous avons alors une racine double et la fonction devient : $f(x)=\left(e^{-x}-1\right)^2$

Dérivée première

$f'(x)=\dfrac{1}{e^a-1}\left(e^{-2x}(-2)-e^{a-x}(-1)\right)=\dfrac{e^{-x}\left(e^a-2e^{-x}\right)}{e^a-1}$

Racine de $f'(x)$: $e^a-2e^{-x}=0\rightarrow e^{-x}=\dfrac{e^a}{2}=e^{\ln 2^{-1}}e^a=e^{a-\ln 2}\rightarrow x=\ln 2-a$

Comme a est strictement positif $e^a>1$. De même, $e^{-x}>$.

Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $\left(e^a-2e^{-x}\right)$

Ce qui donne le tableau :

		$\ln 2-a$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

L'extréma est donc un minimum dont l'abscisse est $x=\ln 2-a$

Et l'ordonnée : $f(\ln 2-a)=1+\dfrac{e^{-2\ln 2+2a}-e^{a-\ln 2+a}}{e^a-1}=\dfrac{e^a-1+e^{2a}\left(e^{\ln 2^{-2}}-e^{\ln 2^{-1}}\right)}{e^a-1}$

$$=\frac{e^a-1+e^{2a}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)}{e^a-1}=-\frac{e^{2a}-4e^a+4}{4\left(e^a-1\right)}=\frac{\left(e^a-2\right)^2}{4\left(1-e^a\right)}$$

$$\rightarrow Min:\left(\ln 2-a,\frac{\left(e^a-2\right)^2}{4\left(1-e^a\right)}\right)$$

Par exemple, si $a=2\rightarrow Min(-1.31;-1.14)$

Dérivée seconde

$$f''(x)=\frac{1}{e^a-1}\left(4e^{-2x}-e^ae^{-x}\right)=\frac{e^{-x}\left(4e^{-x}-e^a\right)}{e^a-1}$$

Racine de $f''(x): 4e^{-x}-e^a=0 \rightarrow x=2\ln 2-a$

Tableau de $f''(x)$:

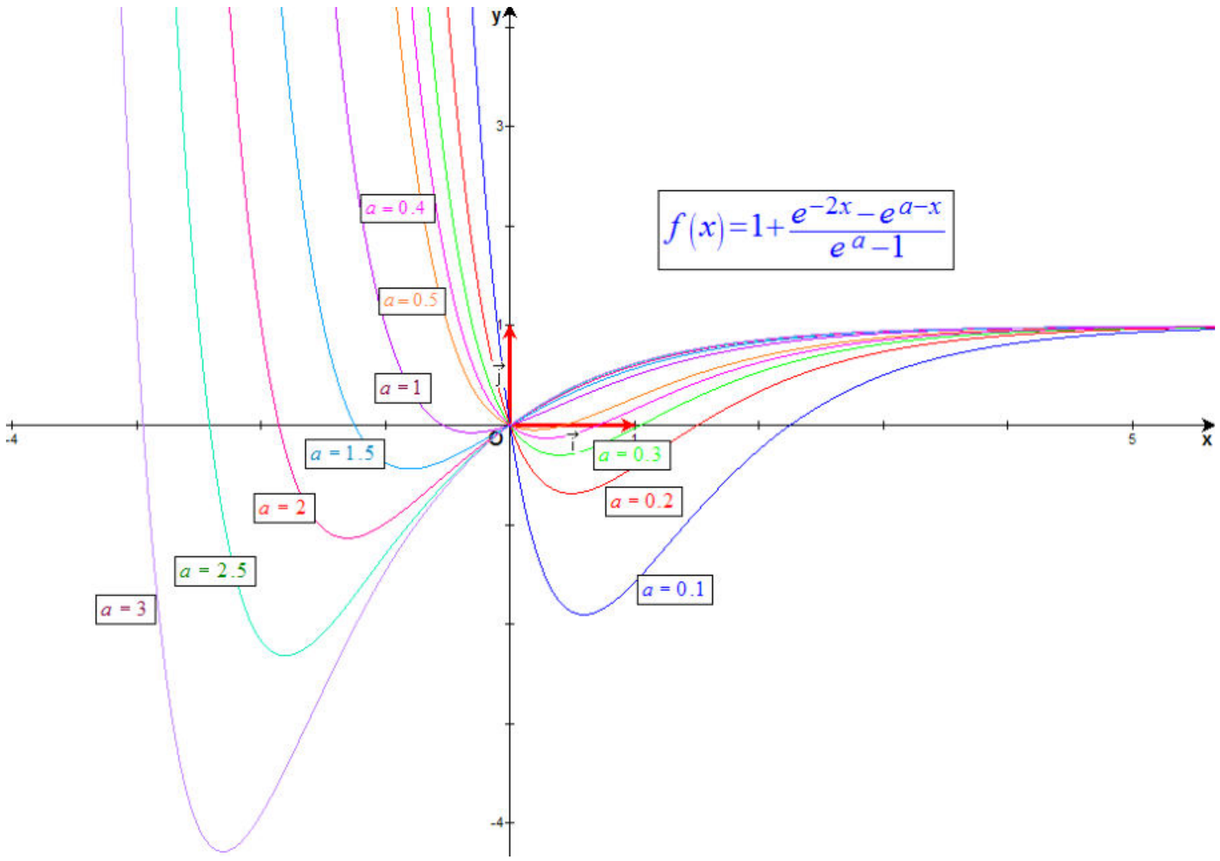
		$2\ln 2-a$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$

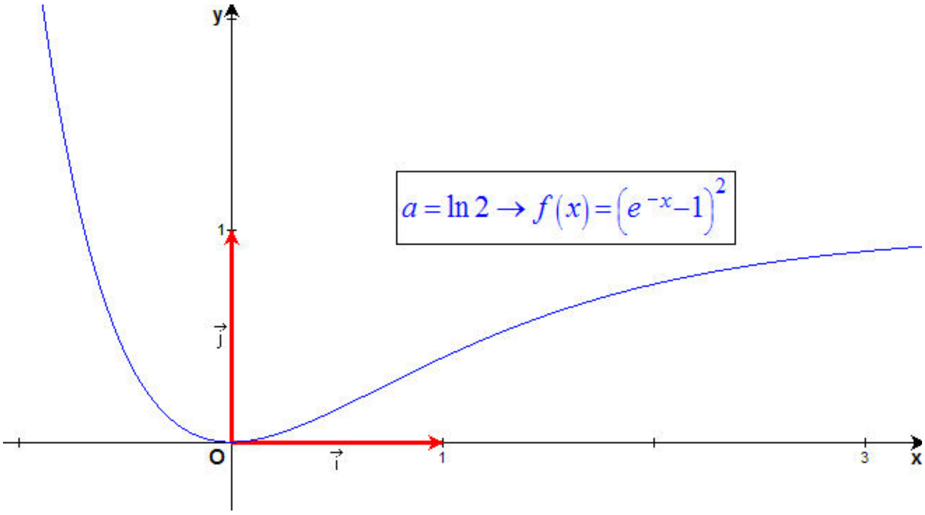
2) Ci-dessous, les graphes sont donnés pour différentes valeurs de a
Cette famille de courbe admet pour asymptote horizontale :
$AH = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \rightarrow AH \equiv y=1$
En plus, les graphs particuliers pour $a=\ln 2$ et $a=2$ sont donnés.

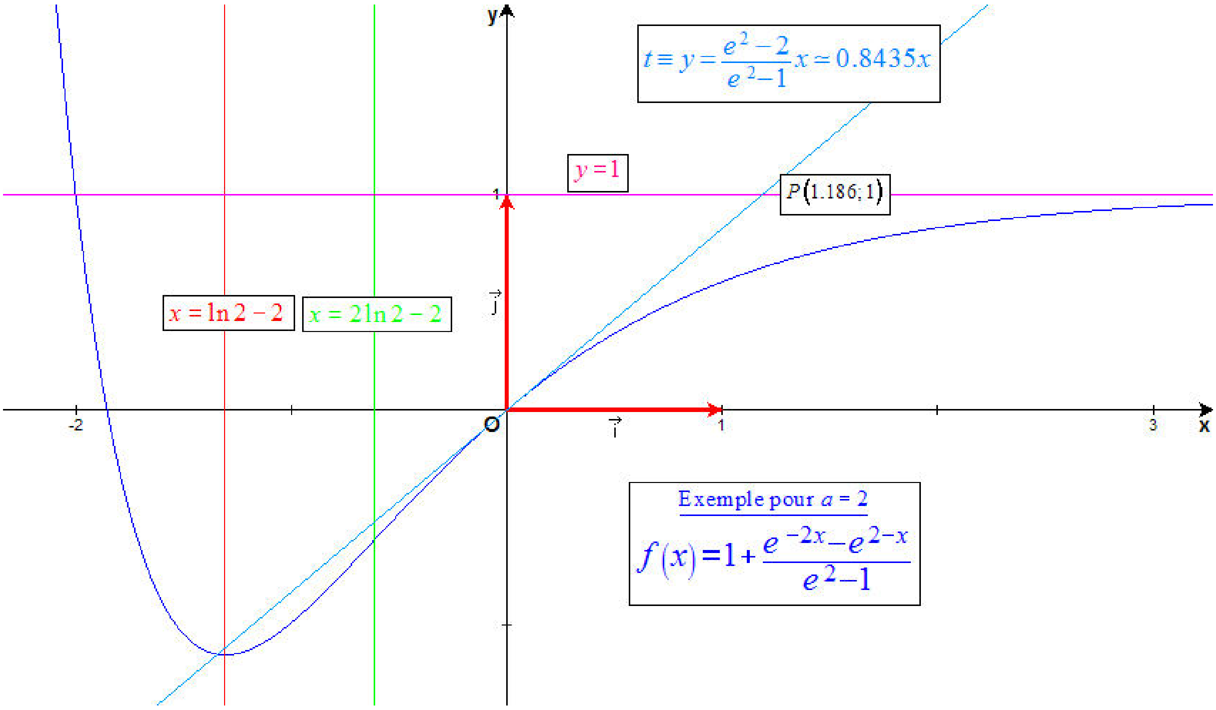
3) Equation de la tangente en $x=0$

$$f'(0)=\frac{e^a-2}{e^a-1} \rightarrow t \equiv y=\frac{e^a-2}{e^a-1}x$$

Le point P intersection de t et de $y=1$ a pour coordonnées $P\left(\frac{e^a-1}{e^a-2},1\right)$







4) Pour qu'une fonction admette une fonction réciproque, il faut qu'elle soit injective.
Les graphes indiquent clairement que les courbes de la famille sont injectives sur la restriction $[0, \infty[$, pour $a > \ln 2$
Le domaine de ces fonctions réciproques est $[0, 1[$

30 jan 08.

EXANA217 – EPL, UCL, LLN, juillet 07 série 2.

Pour cette question, nous allons explorer un irrigateur un peu curieux, dont le but est de créer unrideau d'eau le plus grand possible. Voici un diagramme de l'installation est donné ci-dessous

L'irrigateur crée un rideau d'eau qui est perpendiculaire au sol. Le rideau est arrêté brusquement par un mur vertical à une distance de d mètres de l'irrigateur.

Si l'angle $\alpha = \pi / 2$alors le point le plus haut du rideau arrive juste au mur.

Si $\alpha = 0$ alors la surface du rideau est 0.

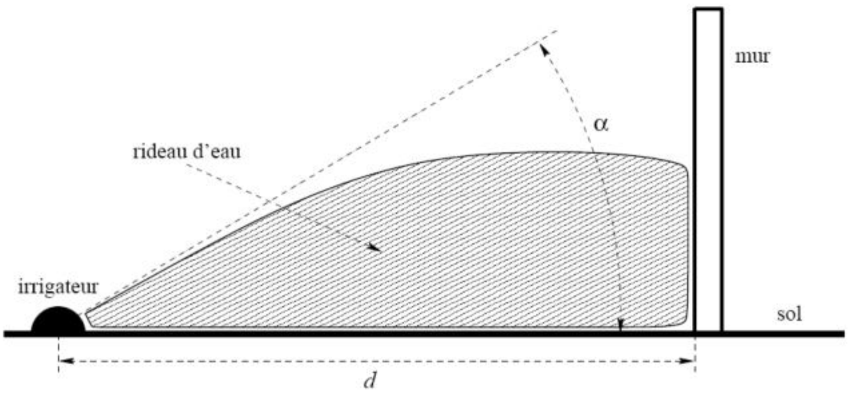
Si $\alpha = \pi / 2$ alors la surface du rideau est de nouveau 0.

Entre ces deux dernières valeurs, il y a une valeur de l'angle pour laquelle la surface du rideau est maximale.

Pour cette question, calculez cette valeur de l'angle et calculez la valeur maximale de la surface du rideau d'eau $\left(\text{en m}^2\right)$.

Vous pouvez supposer que la partie supérieure du rideau est une coupe de parabole avec l'équation suivante $\left(\text{l'origine du repère coïncidant avec l'irrigateur}\right)$:

$$y = x\tan\alpha - \frac{cx^2}{\cos^2\alpha}$$



Nous savons que si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ alors le point le plus haut du rideau arrive juste au mur.

En d'autres termes, le sommet de la parabole décrite par $y = x\tan\alpha - \frac{cx^2}{\cos^2\alpha}$ se trouve en $x = d$. La parabole est alors d'équation : $y = x\tan\frac{\pi}{4} - \frac{cx^2}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = x - 2cx^2$

Or pour une parabole définie par $y = ax^2 + bx + c$, l'abscisse du sommet est donné par $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow d = -\frac{1}{-4c} \Rightarrow c = \frac{1}{4d}$.

L'équation de la parabole est finalement : $\boxed{y = x\tan\alpha - \frac{x^2}{4d\cos^2\alpha}}$

La surface du rideau est donnée par :

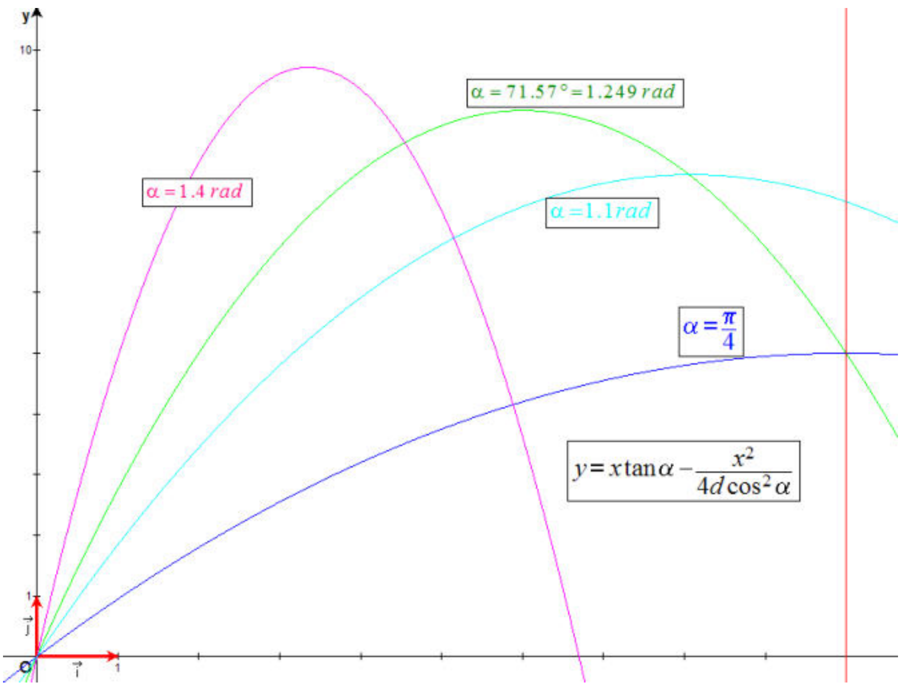
$$S = \int_0^d \left(x\tan\alpha - \frac{x^2}{4d\cos^2\alpha} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\tan\alpha - \frac{x^3}{12d\cos^2\alpha} \right]_0^d = \frac{d^2}{2}\left(\tan\alpha - \frac{1}{6\cos^2\alpha} \right)$$

La valeur de α pour laquelle la surface du rideau est maximale est donnée par la dérivée.

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \left(\tan\alpha - \frac{1}{6\cos^2 x} \right)' = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{6}.\frac{-2}{\cos^3\alpha}.(-\sin\alpha) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(1 - \frac{\tan\alpha}{3} \right) = 0$$

$\Rightarrow \tan\alpha = 3 \rightarrow \boxed{\alpha = 71.57° = 1.249\ rad}$

La figure ci-dessous donne les paraboles pour différentes valeurs de α.



30 jan 08.

EXANA218 – FPMS, Mons, 2002.

Etudiez la fonction

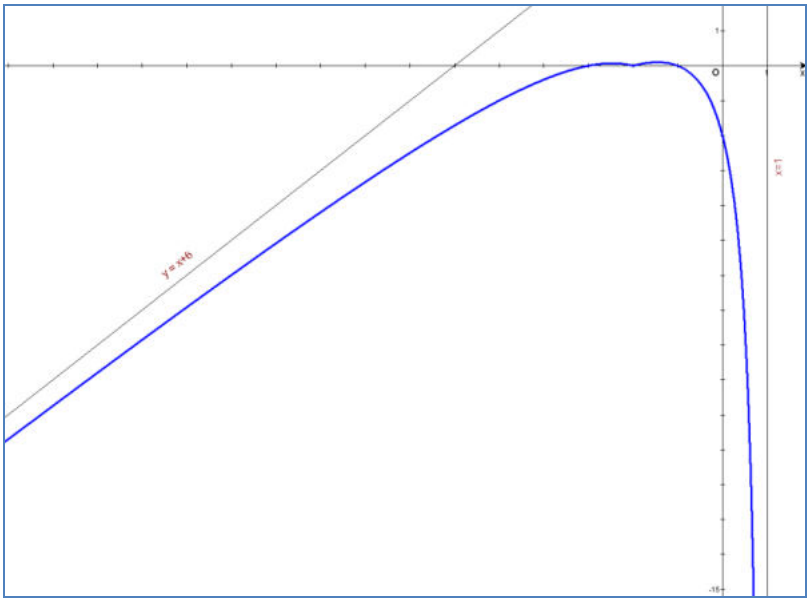
$$f(x)=\frac{(x+2)^2-|x+2|}{x-1}$$

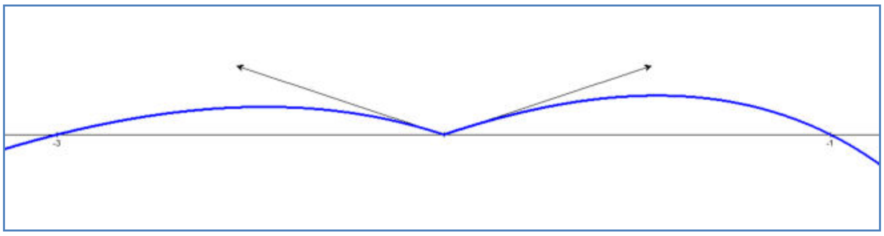
sur le domaine $\{x\le 1\}$.

Donnez de cette fonction une représentation graphique aussi précise que possible.

Calculez et utilisez la dérivée seconde.

Solution proposée par Steve Tumson





La fonction peut se réécrire :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+2)^2+x+2}{x-1}=\dfrac{x^2+5x+6}{x-1}=\dfrac{(x+3)(x+2)}{x-1} & \text{si } x<-2 \\ f(x)=\dfrac{(x+2)^2-x-2}{x-1}=\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x-1} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

* domf : $x\neq 1$

* racines : $x=-3$; $x=-2$; $x=-1$

* asymptotes :

$AV : \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x+3)(x+2)}{x-1}=\dfrac{12}{0^-}=-\infty \qquad \Rightarrow \boxed{AV\equiv x=1}$

AO ou $AH\equiv y=ax+b$:

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+3)(x+2)}{x(x-1)}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x-1)}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+3)(x+2)-x(x-1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x+6}{(x-1)}=6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{AO\equiv y=x+6}$$

* dérivée première

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{(2x+5)(x-1)-(x^2+5x+6)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-11}{(x-1)^2}=\dfrac{\left(x-(1+2\sqrt{3})\right)\left(x-(1-2\sqrt{3})\right)}{(x-1)^2} & \text{si } x<-2 \\ f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+2)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}=\dfrac{\left(x-(1+\sqrt{6})\right)\left(x-(1-\sqrt{6})\right)}{(x-1)^2} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

* dérivée seconde

$$\begin{cases} f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-11)}{(x-1)^4}=\dfrac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-11)}{(x-1)^3}=\dfrac{24}{(x-1)^3} & \text{si } x<-2 \\ f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-5)}{(x-1)^4}=\dfrac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x-5)}{(x-1)^3}=\dfrac{12}{(x-1)^3} & \text{si } x>-2 \end{cases}$$

* tableau de variation

		$1-2\sqrt{3}$		-2		$1-\sqrt{6}$		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\nexists$
Variation	$\nearrow$	*MAX*	$\searrow$	/	$\nearrow$	*MAX*	$\searrow$	*AV*
Concavité	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	*AV*

* tangentes en $x=-2$:

1) à gauche : $y=-\dfrac{1}{3}(x+2)$

1) à droite : $y=\dfrac{1}{3}(x+2)$

9 septembre 08

EXANA219 – FPMS, Mons, 2002.

Si on suppose que la consommation C_{TOT} d'une voiture (en litres par 100 km) s'écrit sous la forme :

$$C_{TOT} = C_{AIR} + C_{ROUES}$$

Où C_{AIR} est un terme dû au frottement de l'air et C_{ROUES} est un terme dû au frottement des roues avec le sol et où $C_{AIR} = av^2$ (avec v, la vitesse de la voiture) et $C_{ROUES} = b/v$ (a et b sont deux constantes positives).

On demande :

1) L'expression de la consommation minimale de la voiture

2) Les valeurs de a et b qui permettent d'annuler la consommation minimale et les vitesses correspondantes

---

Solution proposée par Steve Tumson

1) $C_{TOT} = av^2 + \dfrac{b}{v}$

$$\frac{dC_{TOT}}{dv} = 2av_{MIN} - \frac{b}{v_{MIN}^2} = 0 \Leftrightarrow v_{MIN}^3 = \frac{b}{2a} \Leftrightarrow v_{MIN} = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$$

$$\Rightarrow C_{MIN} = a\sqrt[3]{\frac{b^2}{4a^2}} + b\sqrt[3]{\frac{2a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}} + \sqrt[3]{2ab^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + 2\right)\sqrt[3]{ab^2} \simeq \boxed{1,31\sqrt[3]{ab^2}}$$

2) $\boxed{\begin{cases} a = 0 \to v = \infty \\ b = 0 \to v = 0 \end{cases}}$

---

9 septembre 08