Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 23

EXANA230 – EXANA239

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Novembre 08

EXANA230 – EPL – UCL – Louvain, juillet 08, série 1.

Soit f la fonction définie pour les réels strictement positifs par

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x}$$

Et C la courbe du plan définie par $y = f(x)$ pour $x > 0$ (c'est le graphe de f)

1) Calculer la limite $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et les fonctions dérivée première et seconde de $f(x)$

   Conseil : utiliser un changement de variable pour ce calcul de limite

2) Déterminer l'équation des éventuelles asymptotes de C

3) Dresser un tableau de variation de f contenant

   a. les racines et le signe de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$

   b. les extrema et les domaines de croissance/décroissance de $f(x)$

   c. les points d'inflexion et les domaines de concavité cers le haut/bas de $f(x)$

4) A l'aide des résultats obtenus plus haut, représenter la courbe C dans un repère orthonormé

5) En utilisant les résultats obtenus aux points précédents, discuter en fonction du paramètre réel λ le nombre de solutions strictement positives de l'équation (en x) ci dessous

$$x \ln(\lambda x) = -1$$

Solution proposée par Steve Tumson

1) Un changement de variable judicieux s'impose pour calculer cette limite nous amenant à une indétermination. En effet, appliquer ici la règle de l'Hospital nous ramène toujours au même problème d'indétermination : on tourne continuellement en rond.

Posons donc $\frac{1}{x} = \ln t$

On réécrit ainsi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{1/x=\ln t} \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{t \to +\infty} \frac{1/t}{1} = \boxed{0}$$

Pour les dérivés, on utilise les simples formules du produit :

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-1/x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{-1/x} + \frac{1}{x}\frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(1-x)$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{x^2} e^{-1/x} - \frac{3}{x^4} e^{-1/x} + \frac{1}{x^3}\frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(2x^2-4x+1)$$

2) La seule asymptote verticale envisageable au vu du domaine de définition, est en x = 0, or nous avons démontré au premier point que la limite tendant vers 0 a pour valeur 0, il n'y a donc aucune asymptote verticale.

Par contre, il y a une asymptote horizontale : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

3) L'étude du signe est ici très simple étant donné que nous travaillons pour les abscisses positives et que les exponentielles sont elles aussi toujours positives :

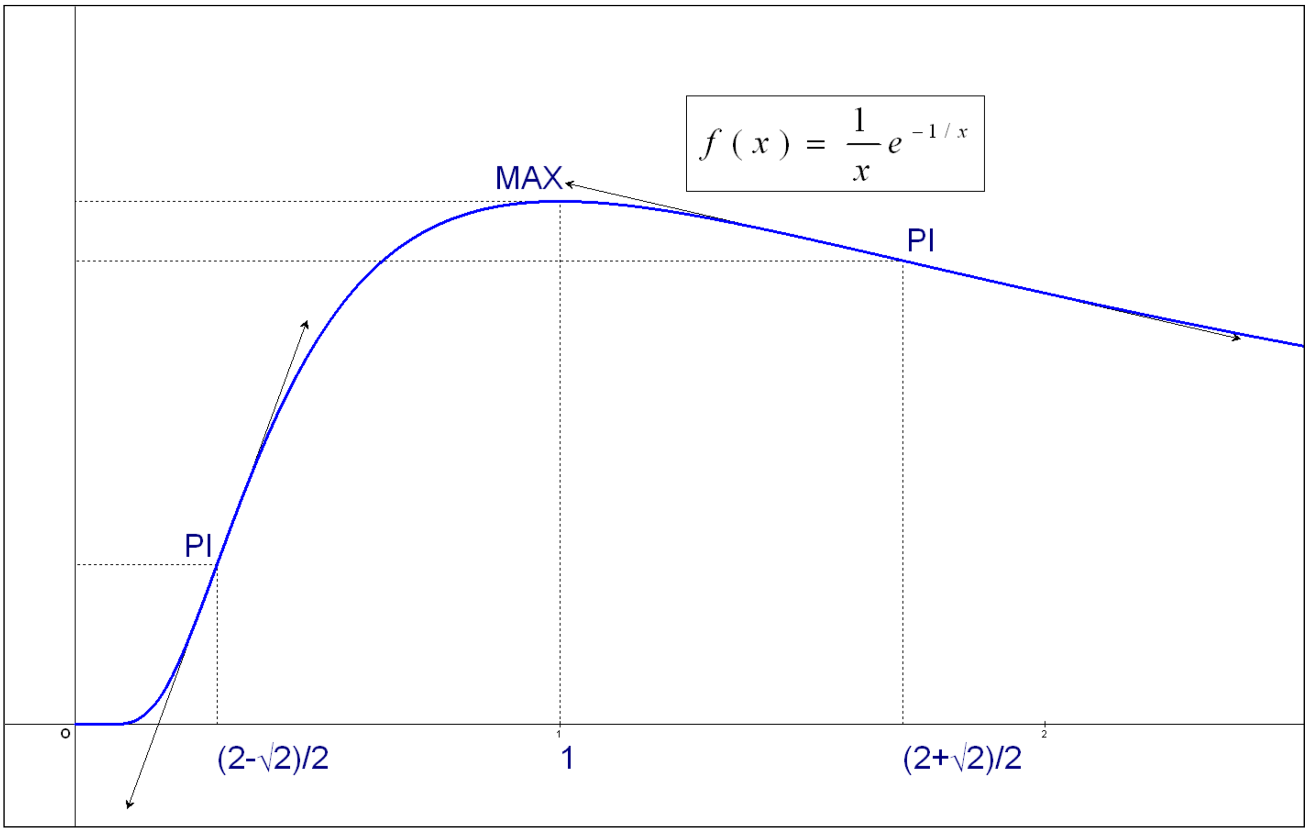
- La fonction $f(x)$ est toujours positive
- Le signe de $f'(x)$ = le signe du premier degré $(1-x)$
- Le signe de $f''(x)$ = le signe du second degré $(2x^2-4x+1)$

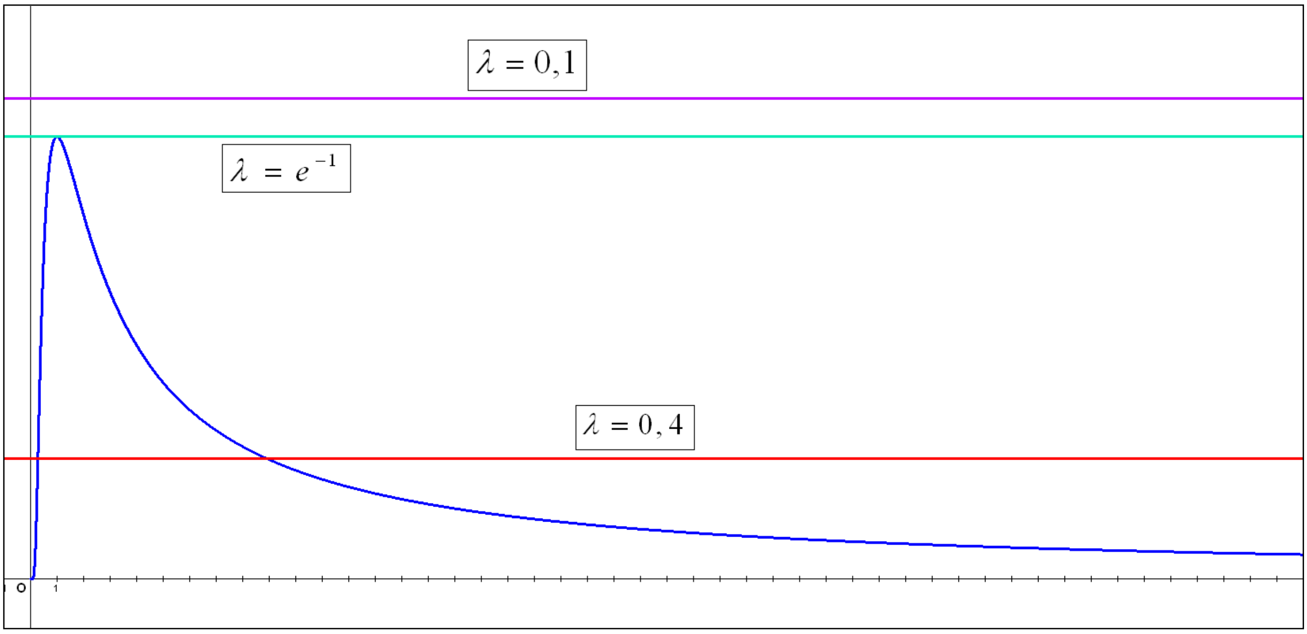
	0		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f(x)$	/	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	/	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	/	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Variation	/	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
Concavité	/	$\cup$	$P.I.$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$P.I.$	$\cup$

4) Le tableau ci-dessus nous permet de tracer la courbe C (voir première figure ci-dessous)

5) Il faut simplement voir que résoudre l'équation $x\ln(\lambda x) = -1$ et résoudre $f(x) = \lambda$ est strictement équivalent ! On voit donc bien sur la deuxième figure ci-dessous que la discussion est claire :

$$\begin{cases} \lambda > e^{-1} \text{ ou } \lambda \le 0 & \rightarrow \text{Pas de solution} \\ \lambda = e^{-1} & \rightarrow \text{Une solution} \\ 0 < \lambda < e^{-1} & \rightarrow \text{Deux solutions} \end{cases}$$





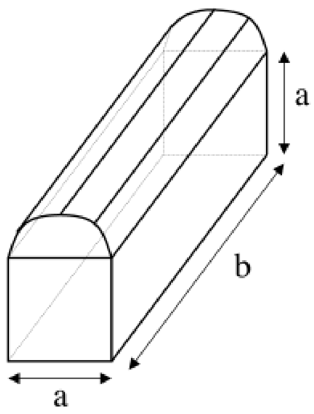
23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXANA231 – EPL – UCL – Louvain, juillet 08, série 1.

On considère un pain correspondant à la figure ci-dessous, de longueur b (en cm) et dont la section se compose d'un carré de côté a (en cm) surmonté d'un demi-cercle de rayon $\frac{a}{2}$.

En tant qu'amateur de pain, j' aime la mie moelleuse et je n'aime pas la croûte.
Pour un volume de mie donnée, quelles dimensions donner au pain pour obtenir un minimum de croûte ?

1) Exprimez le volume de la mie V et la surface de la croûte S en fonction des dimensions a et b (en négligeant l'épaisseur de la croûte)
2) En supposant le volume V connu et constant, déterminez en fonction de V les valeurs des dimensions a et b qui conduisent à la plus petite surface S possible
3) Quelle valeur de S est obtenue ? Quel est le rapport de dimension $\frac{a}{b}$ correspondant ?



Solution proposée par Steve Tumson

1) La surface et le volume s'expriment comme suit :

$$S(a,b) = 2a^2 + 3ab + b\pi\frac{a}{2} + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(8+\pi)a^2 + \frac{1}{2}(6+\pi)ab$$

$$V(a,b) = \left(a^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)b = \frac{1}{8}a^2b(8+\pi)$$

2) Il suffit de trouver un lien entre les deux variables via le volume de mie :

$$b = \frac{8V}{a^2(8+\pi)}$$

On peut ainsi réécrire l'expression de la croûte :

$$S(a) = \frac{1}{4}(8+\pi)a^2 + \frac{4V}{a}\frac{(6+\pi)}{(8+\pi)}$$

Le minimum est atteint quand la dérivée s'annule :

$$\frac{dS(a)}{da} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}a(8+\pi) - \frac{4V}{a^2}\frac{(6+\pi)}{(8+\pi)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{\frac{(6+\pi)8V}{(8+\pi)^2}}}$$

On a donc aussi :

$$b = \frac{8V}{\left(\sqrt[3]{\frac{(6+\pi)8V}{(8+\pi)^2}}\right)^2(8+\pi)} \Leftrightarrow \boxed{b = \sqrt[3]{\frac{(8+\pi)8V}{(6+\pi)^2}}}$$

3) Le rapport entre a et b est donc $\frac{a}{b} = \sqrt[3]{\frac{(6+\pi)8V}{(8+\pi)^2}}\sqrt[3]{\frac{(6+\pi)^2}{(8+\pi)8V}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{6+\pi}{8+\pi}}$

Pour la clarté de l'écriture de l'expression de la croûte minimiser, on écrit :

$$\begin{aligned}
S = b^2\left[\frac{1}{4}(8+\pi)\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}(6+\pi)\left(\frac{a}{b}\right)\right] &= 4\left(\frac{(8+\pi)V}{(6+\pi)^2}\right)^{2/3}\left[\frac{1}{4}(8+\pi)\left(\frac{6+\pi}{8+\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}(6+\pi)\left(\frac{6+\pi}{8+\pi}\right)\right] \\
&= \left(\frac{(8+\pi)V}{(6+\pi)^2}\right)^{2/3}\left[(8+\pi)\left(\frac{6+\pi}{8+\pi}\right)^2 + 2(6+\pi)\left(\frac{6+\pi}{8+\pi}\right)\right] \\
&= \left(\frac{(8+\pi)V}{(6+\pi)^2}\right)^{2/3}\left[3\frac{(6+\pi)^2}{(8+\pi)}\right] = \sqrt[3]{\frac{27(6+\pi)^2V^2}{8+\pi}} \\
&\simeq \boxed{5{,}87V^{2/3}}
\end{aligned}$$

23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXANA232 – EPL – UCL – Louvain, juillet 08, série 2.

1. Calculez l'intégrale suivante :

$$\int_{-3}^{2} e^{-|t|}dt$$

2. Calculez une primitive de la fonction suivante :

$$f(x) = (\ln x)^2$$

3. Soit a un paramètre réel positif. On considère la région du plan définie par

$$S_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |x| < a \text{ et } |y| \leq \frac{1}{1+x^2} \right\}$$

Calculez l'aire de S_a puis déterminez sa limite lorsque a tend vers l'infini.

4. On considère une fonction $f(x) = x(x-1)\sin\left(x^2 + e^{x+1}\right)$.

Démontrez rigoureusement qu'il existe au moins un réel a tel que $f'(a) = 0$.

Indice : il n'est pas nécessaire de calculer la dérivée de la fonction f.

Solution proposée par Steve Tumson

1. $\int_{-3}^{2} e^{-|t|}dt = \int_{-3}^{0} e^{t}dt + \int_{0}^{2} e^{-t}dt = \left[e^{t}\right]_{-3}^{0} - \left[e^{-t}\right]_{0}^{2} = \left[1-e^{-3}\right] - \left[e^{-2}-1\right] = 2-e^{-3}-e^{-2} \simeq \boxed{1{,}815}$

2. Par partie :

$$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$$
$$dv = \ln x\, dx \qquad v = x\ln x - x$$

$$\Rightarrow (\ln x)(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\left(\frac{dx}{x}\right) = x\ln^2 x - x\ln x - \int \ln x\, dx + \int dx$$
$$= x\ln^2 x - x\ln x - (x\ln x - x) + x + C$$
$$= \boxed{x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C}$$

3. La fonction délimitant l'aire est en valeur absolue de y : la fonction est donc symétrique axiale d'axe des abscisses ! On peut donc écrire :

$$S_a = \int_{-a}^{a} |y|\,dx = 2\int_{-a}^{a} y\,dx$$

De plus, la fonction y est paire, il y a donc une symétrie axiale d'axe des ordonnées ! On réécrit donc l'intégrale :

$$S_a = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = 4\int_{0}^{a} y\,dx$$

Il reste à calculer cette dernière :

$$S_a = 4\int_{0}^{a} y\,dx = 4\int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} = 4\left[\arctan(x)\right]_0^a = \boxed{4\arctan(a)}$$

Quand a tend vers l'infini, l'arc tangente tend vers $\pi/2$, on a donc :

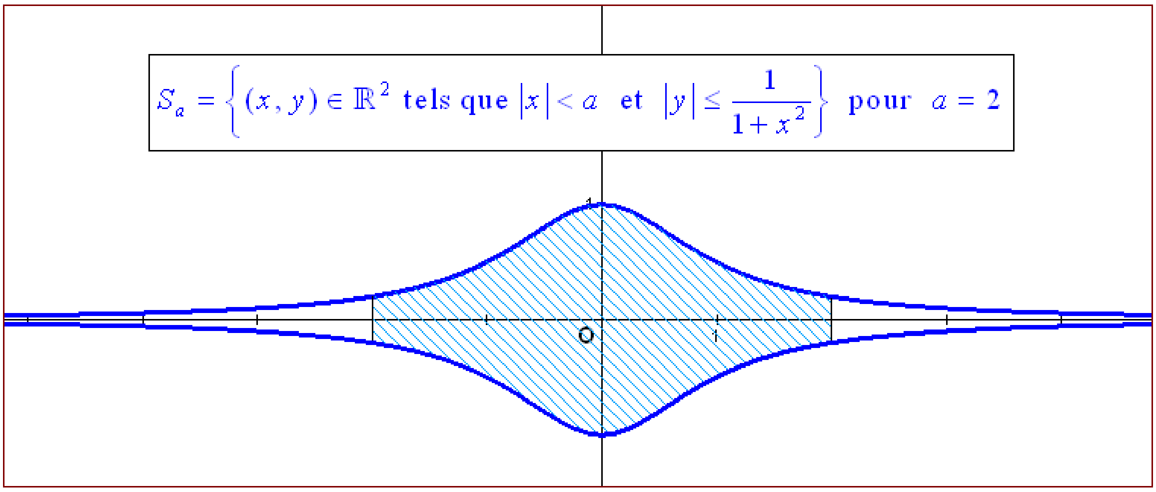
$$\boxed{\lim_{a\to\infty} S_a = 2\pi}$$

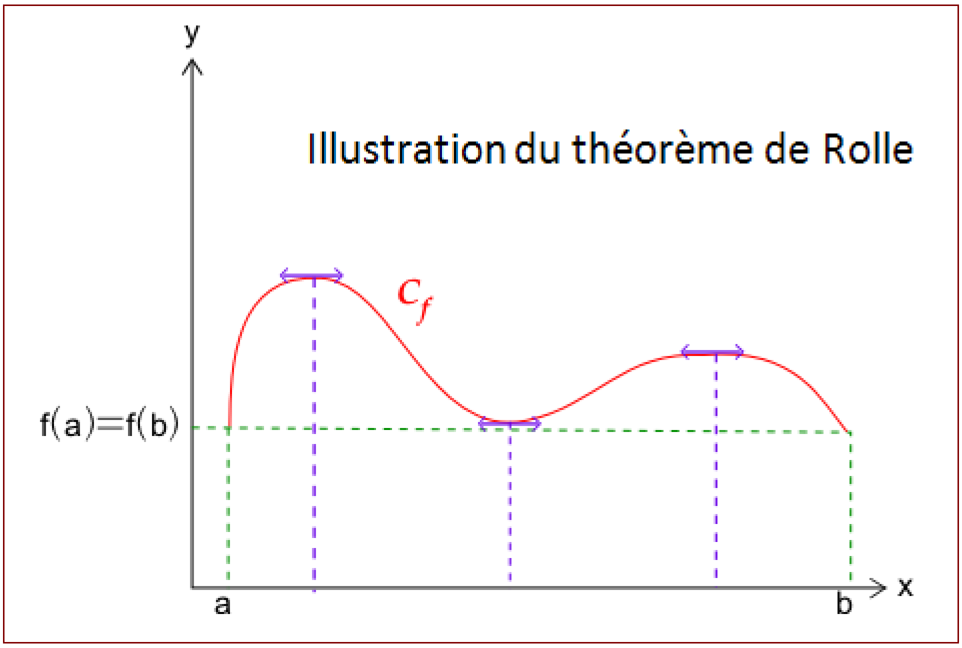
4. La fonction passe au moins deux fois par zéro en $x=0$ et en $x=1$.
Si la fonction est nulle en $x=0$, elle croît (resp. décroît) ensuite. Pour redevenir nulle en $x=1$, elle a donc du décroître (resp. croître) entre $x=0$ et $x=1$. Il existe donc un maximum (resp. minimum) entre 0 et 1, et donc on peut affirmer que :

$$f'(a) = 0 \qquad \text{avec} \qquad a \in \left]0,1\right[$$

Cette démarche est plus connue sous le nom de théorème de Rolle dont voici l'énoncé exact :

> *<u>Théorème de Rolle</u>* :
>
> *Pour deux nombres réels a et b tels que $a<b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe au moins un élément c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$*





23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXANA233 – EPL – UCL – Louvain, juillet 08, série 2.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$$

et C la courbe de plan définie par $y=f(x)$ (c'est le graphe de f)

1. Quel est le domaine de f ? La courbe C possède-t-elle des asymptotes ?
2. Calculez les fonctions dérivée $f'(x)$ et dérivée seconde $f''(x)$
3. Dressez un tableau des variations de f contenant
   a. Les racines et signe de f, f' et f''
   b. Les extrema et le domaine de croissance/décroissance de f
   c. Les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f
   (*Il n'est pas nécessaire de calculer les ordonnés des différents pts obtenus.*)
4. A l'aide des résultats obtenus plus haut, représentez la courbe C dans un repère orthonormé
5. On considère une seconde fonction g, quadratique, définie à l'aide de trois paramètres a,b,c par :

$$g(x)=ax^2+bx+c$$

   a. Déterminez les valeurs des paramètres a,b et c de telle façon que les valeurs des fonctions f et g coïncident au point d'abscisse $x=0$, ainsi que leur dérivée première et seconde.
   b. Si on considère que, pour ce paramètre, la fonction g fournit une bonne approximation de f autour de l'abscisse $x=0$, utilisez cette fonction g pour calculer une valeur approchée de la quantité $\ln(1.11)$

Solution proposée par Steve Tumson

1. Le polynôme à l'intérieur du logarithme est toujours positif, le domaine de la fonction est donc l'ensemble des réels :

$$dom f = \mathbb{R}$$

Vu le domaine, une asymptote verticale n'est pas envisageable.

Qu'en est-il pour une asymptote oblique ou horizontale ? Utilisons le critère de Cauchy :

AH ou $AO \equiv y = kx + t$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{1+x+x^2} = 0$$

$$t = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+x+x^2\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ La courbe C ne possède aucune asymptote !

2. Il s'agit de dérivées de fonctions composées classiques :

$$f(x) = \ln\left(1+x+x^2\right)$$

$$f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\left(1+x+x^2\right) - (1+2x)^2}{\left(1+x+x^2\right)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{\left(1+x+x^2\right)^2}$$

3.

$$f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$$

$racine \to \ln\left(1+x+x^2\right)=0 \Leftrightarrow 1+x+x^2=1 \Leftrightarrow x(1+x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0\,;\,x=-1}$

$signe \to \ln\left(1+x+x^2\right)>0 \Leftrightarrow 1+x+x^2>1$ (Car la fonction logarithme est bijective !)

$\Leftrightarrow x(1+x)>0$

$$f'(x)=\frac{1+2x}{1+x+x^2}$$

$racine \to \boxed{x=-1/2}$

$signe\ de\ f'(x) \to signe\ de\ 1+2x$

$$f''(x)=\frac{2\left(1+x+x^2\right)-(1+2x)^2}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{-2x^2-2x+1}{\left(1+x+x^2\right)^2}=\frac{-2}{\left(1+x+x^2\right)^2}\left(x-\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$racine \to \boxed{x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\simeq 0,37\ ;\ x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\simeq -1,37}$

$signe\ de\ f''(x) \to signe\ de\ -2x^2-2x+1$

		$-1,37$		-1		$-0,5$		0		$0,37$	
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
variation de f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
concavité de f	$\cap$	PI	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	PI	$\cap$

4. Voir graphe ci-dessous

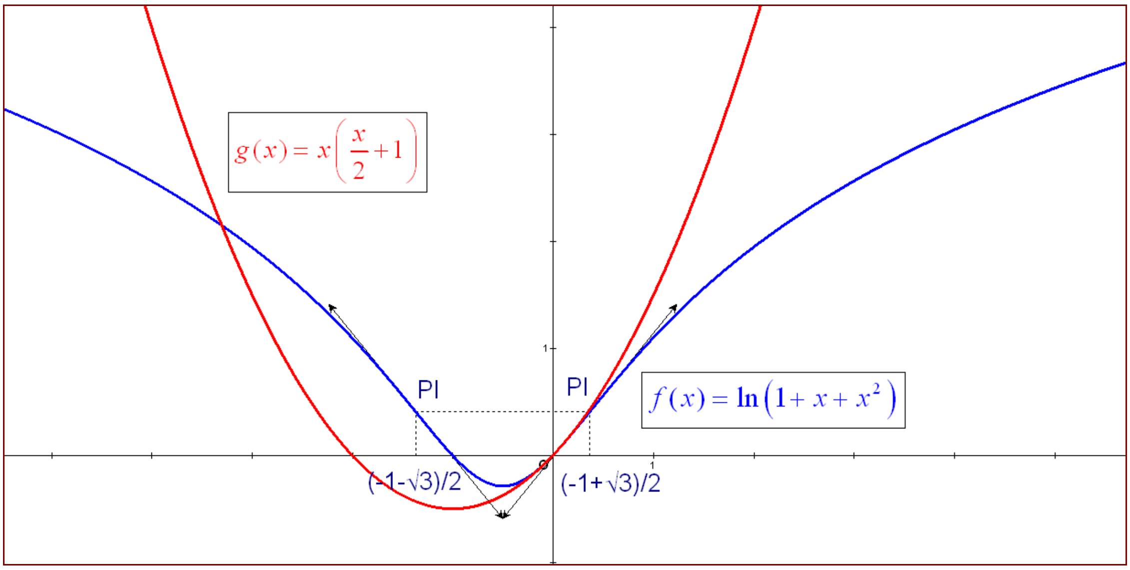
5.

$$\begin{cases} f(0)=g(0) \Leftrightarrow \ln(1)=c \Leftrightarrow \boxed{c=0} \\ f'(0)=g'(0) \Leftrightarrow \boxed{1=b} \\ f''(0)=g''(0) \Leftrightarrow 1=2a \Leftrightarrow \boxed{a=1/2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x)=x\left(\frac{1}{2}x+1\right)}$$

6.

$$\ln(1.11)=f(x=0,1)\simeq g(x=0,1)=0,1\left(\frac{0,1}{2}+1\right)=0,105$$

(la valeur exact de $\ln(1.11)$ est 0,10436)



23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXANA234 – EPL – UCL – Louvain, juillet 08, série 2.

La consommation d'essence d'une voiture dépend de sa vitesse ; de façon plus précise, on suppose que la consommation instantanée C (en litres par heure) dépend de la vitesse instantanée v (en kilomètre par heure) selon la fonction[1]

$$C(v) = a + bv^2$$

où a et b sont des paramètres connus dépendant de la voiture (exprimés respectivement en litres par heure et en litres fois heure par kilomètre carré)

1. Pour une voiture roulant à vitesse constante, déterminez en fonction des paramètres a et b la vitesse qui minimise la consommation d'essence nécessaire pour parcourir un kilomètre.

2. On suppose à présent qu'une voiture se déplace le long d'un axe rectiligne, et que la distance parcourue le long de cet axe (en kilomètres) est donnée en fonction du temps écoulé (en heures) par la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{d}\right)$$

où d est un paramètre correspondant à la durée nécessaire pour parcourir un kilomètre en démarrant à $t = 0$.
   a. Déterminez l'évolution de la vitesse instantanée en fonction du temps écoulé lors de ce parcours d'un kilomètre.
   b. Calculez, en fonction des paramètres a et b et de la durée d, la consommation totale d'essence nécessaire pour parcourir ce kilomètre.
   c. Déterminez en fonction des paramètres a et b pour quelle durée d la consommation nécessaire est minimale.

3. Comparez les consommations obtenus aux points 1 et 2 pour le parcours d'un kilomètre.

[1] *La consommation croît plus rapidement qu'une fonction linéaire à cause de la résistance de l'air.*

Solution proposée par Steve Tumson

1. La consommation recherchée s'exprime en litres. L'expression de $C(v)$ donnée est en litre par heure, il faut donc la multiplier par le temps de parcours pour avoir une consommation en litre. De plus, la vitesse étant constante, la loi de mouvement est dictée par un MRU. La fonction à minimiser s'écrit donc :

$$C' = Ct = at + btv^2 \Leftrightarrow C' = at + bt\left(\frac{e}{t}\right)^2 = at + \frac{b}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dC'}{dt} = a - \frac{b}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{e}{t} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

2.

a. La fonction $f(t)$ exprime en fait le déplacement en fonction du temps.

La vitesse instantanée s'obtient simplement en dérivant le déplacement :

$$\boxed{v(t) = \frac{df}{dt} = \frac{\pi}{2d}\sin\left(\frac{\pi t}{d}\right)}$$

b. On reprend l'expression du point 1 :

$$C' = at + btv^2_{t=d} = ad + bd\left(\frac{\pi}{2d}\sin\left(\frac{\pi d}{d}\right)\right)^2 = \boxed{ad + \frac{b\pi^2}{4}\frac{1}{d}}$$

c. Il suffit d'annuler la dérivé de l'expression trouvée juste avant :

$$\frac{\partial C'}{\partial d} = a - \frac{b\pi^2}{4}\frac{1}{d^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}$$

3. La consommation optimisée au point 1 :

$$\begin{cases} C_1' = at + \dfrac{b}{t} \\ t = \sqrt{\dfrac{b}{a}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_1' = 2\sqrt{ab}}$$

La consommation optimisée au point 2 :

$$\begin{cases} C_2' = ad + \dfrac{b\pi^2}{4}\dfrac{1}{d} \\ d = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{b}{a}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2' = \pi\sqrt{ab}}$$

On consomme donc moins en roulant à vitesse constante.

23 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXANA235 – FPMs – Mons, juillet 08, groupe A.

Etudiez la fonstion suivante et faites en une représentation graphique soignée.

$$f(x) = x + \ln \frac{x-4}{2x}$$

Indication : N'essayez pas de calculer les zéros de la fonction

---

Solution proposée par Fabienne Zoetard

1) $dom\ f = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]4, +\infty\right[$

2) Asymptotes

AV: $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(x + \ln \frac{x-4}{2x} \right) = +\infty \to AV_1 \equiv x = 0 \ \text{(A gauche)}$

$\lim\limits_{x\to 4} \left(x + \ln \frac{x-4}{2x} \right) = -\infty \to AV_2 \equiv x = 4 \ \text{(A droite)}$

AH: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x + \ln \frac{x-4}{2x} \right) = +\infty \to$ pas de AH

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \ln \frac{x-4}{2x} \right) = -\infty \to$ pas de AH

AO:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x} + \dfrac{\ln \frac{x-4}{2x}}{x} \right) = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x + \ln \dfrac{x-4}{2x} - x \right) = -\ln 2 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} a' = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x}{x} + \dfrac{\ln \frac{x-4}{2x}}{x} \right) = 1 \\ b' = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x + \ln \dfrac{x-4}{2x} - x \right) = -\ln 2 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \to AO \equiv y = x - \ln 2$$

3) $f'(x)=1+\dfrac{1}{\dfrac{x-4}{2x}}.\dfrac{1.2x-(x-4).2}{4x^2}=1+\dfrac{4}{(x-4)x}=\dfrac{x^2-4x+4}{x(x-4)}=\dfrac{(x-2)^2}{x(x-4)}$

Le numérateur est toujours positif. Le signe de f' est déterminé par le dénominateur.

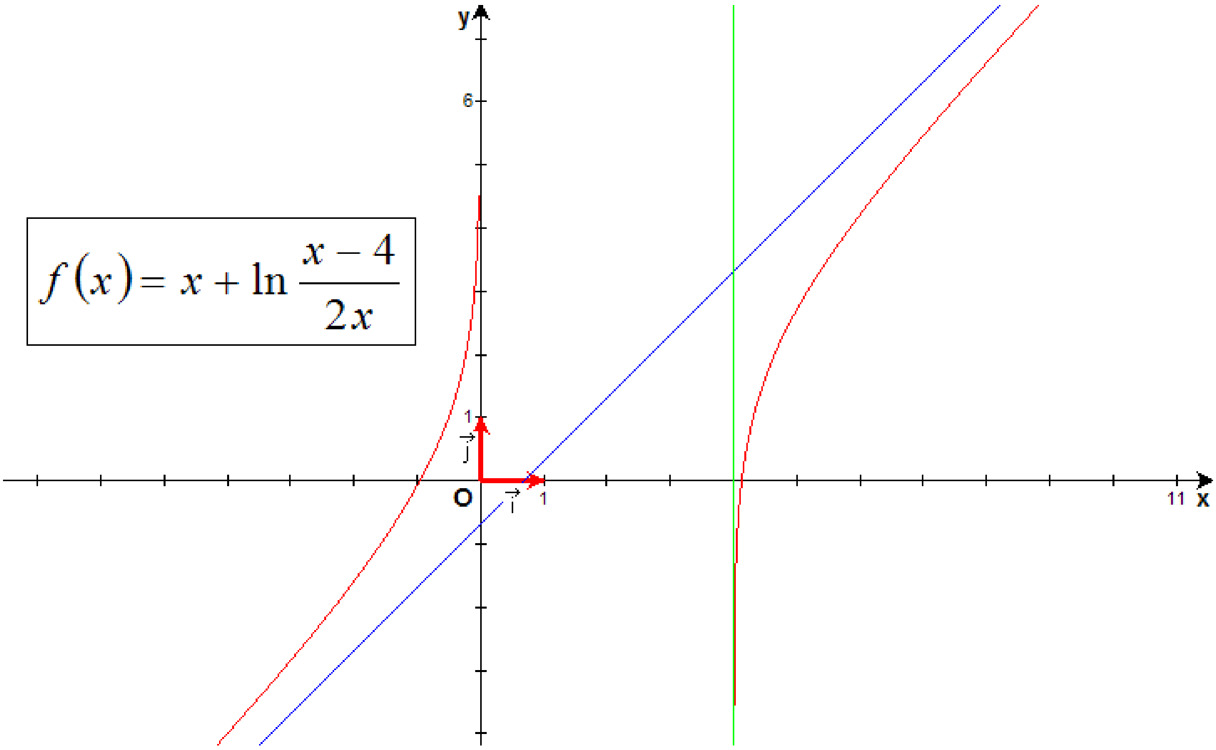
$$f''(x)=\frac{2(x-2).x(x-4)-(x-2)^2(2x-4)}{x^2(x-4)^2}=\frac{2(x-2)\left(x^2-4x-x^2+4x-4\right)}{x^2(x-4)^2}$$

$$=-\frac{8(x-2)}{x^2(x-4)^2}$$

Le signe de $f''(x)$ est la signe de $2-x$

4) Tableau des variations

		0		4	
f'	$+$	$\parallel$		$\parallel$	$+$
f''	$+$	$\parallel$		$\parallel$	$-$
f	$\nearrow$ $\cup$	AV_1		AV_2	$\searrow$ $\cap$



23 juillet 08.

EXANA236 – FPMs – Mons, juillet 08, groupe C.

Soit l'intégrale définie

$$I_n = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{(\cos x)^n}{\sin x}\, dx$$

où n est un nombre entier

a) Calculer $I_n - I_{n+2}$ sans calculer I_n

b) Sachant que $I_0 = -\frac{\ln\sqrt{3}}{3}$, déduisez ma valeur de I_6

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\text{a) } I_n - I_{n+2} = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\cos^n x - \cos^{n+2}}{\sin x}\, dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\cos^n x\left(1-\cos^2 x\right)}{\sin x}\, dx = \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{\cos^n x.\sin^2 x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi/3} \cos^n x \sin x dx = -\int_{\pi/2}^{\pi/3} \cos^n x(-\sin x)\, dx = -\left[\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{n+1}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right] = \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}$$

$$\rightarrow \boxed{I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1).2^{n+1}}}$$

$$\text{b) } I_6 = I_4 - \frac{1}{5.2^5} = I_2 - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5} = I_0 - \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{5.2^5}$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{24} - \frac{1}{160} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{263}{480} \cong 1.36.10^{-3}$$

Note : $I_0 = -\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$ et non pas $-\frac{\ln\sqrt{3}}{3}$ comme précisé dans l'énoncé.

En effet : $P_0 = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$

Posons : $t = \tan\frac{x}{2} \rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}dx \rightarrow dx = 2\cos^2\frac{x}{2}dt = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\rightarrow P_0 = \int \frac{1+t^2}{2t}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\rightarrow I_0 = \left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$$

---

23 juillet 08.

EXANA237 – FACS – ULB – Bruxelles, juillet 08.

Avec un rectangle de carton de 30 cm de long et de 14 cm de large, on veut fabriquer une boîte sans couvercle en enlevant 4 carrés identiques (un dans chaque coin), puis en repliant le carton restant.
Quelle est la longueur du côté des carrés à enlever pour obtenir une boîte de volume maximum ?

Le volume est donné par : $V=(14-2x)(30-2x)x=4x^3-88x^2+420x$
Il sera maximum quand la dérivée sera nulle :

$$V'=12x^2-176x+420 \rightarrow 6x^2-88x+210=0 \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\dfrac{35}{2} \text{ à rejeter} \end{cases}$$

On vérifie facilement que $x=3$ correspond bien à un maximum

---

30 jan 08.

EXANA238 – FACS – ULBL – Bruxelles, juillet 08.

Calculer

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx \qquad \text{b) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$a)\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{1+1-\cos^2 x} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{\left(\sqrt{2}-\cos x\right)\left(\sqrt{2}+\cos x\right)}$$

Décomposons en fraction rationnelles :

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}-\cos x\right)\left(\sqrt{2}+\cos x\right)} = \frac{A}{\sqrt{2}-\cos x} + \frac{B}{\sqrt{2}+\cos x}$$

$$= \frac{A\left(\sqrt{2}+\cos x\right)+B\left(\sqrt{2}-\cos x\right)}{\left(\sqrt{2}-\cos x\right)\left(\sqrt{2}+\cos x\right)}$$

$$\rightarrow \quad A\left(\sqrt{2}+\cos x\right)+B\left(\sqrt{2}-\cos x\right)=1$$

Par identification : $A-B=0 \rightarrow A=B$ et si $\cos x = 0 \rightarrow A\sqrt{2}+B\sqrt{2}=1 \rightarrow A=B=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$$\text{Donc : } I_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{\sqrt{2}-\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x)}{\sqrt{2}+\cos x}\right]$$

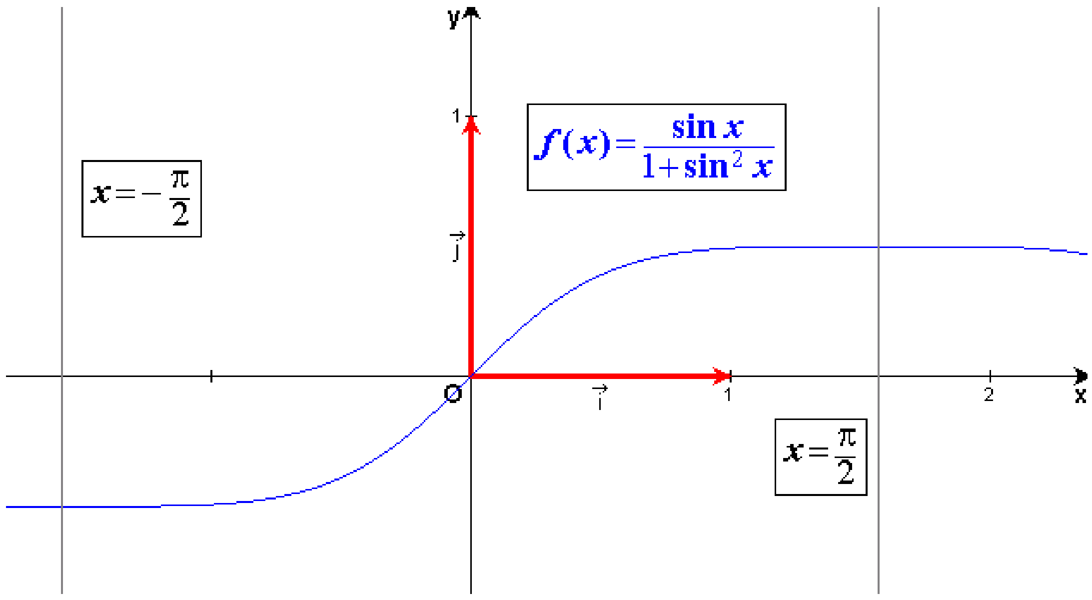
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{2}-\cos x\right)}{\sqrt{2}-\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\sqrt{2}+\cos x\right)}{\sqrt{2}+\cos x}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\ln\left|\sqrt{2}-\cos x\right| - \ln\left|\sqrt{2}+\cos x\right|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \simeq 0.62322$$

$b)\ I_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx = 0$ car $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}$ est une fonction impaire



30 jan 08.

EXANA239 – FACS – ULBL – Bruxelles, septembre 08.

Soit f la fonction définie par $f(x)=(\ln|x|)\sin x$ pour x réel non nul.

a) Calculer $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$
b) f est-elle périodique? Justifier brièvement.
c) f est-elle paire, impaire? Justifier brièvement.
d) Déterminer les zéros de f.
e) Calculer f'.
f) Esquisser les courbes $C^+ \equiv y=\ln|x|$ et $C^- \equiv y=-\ln|x|$
g) Déterminer les points d'intersection de la courbe $C \equiv y=f(x)$ avec les courbes C^+ et C^-.
h) Esquisser le graphe de f.

---

a) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}(\ln|x|\sin x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}(\ln|x|.x)$ car $\sin x = x$ pour x très petit.

$$\to \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}(\ln|x|.x)=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left(\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}\right)\xrightarrow{Hospital}\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{\frac{1}{|x|}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}(-x)=0$$

b) La fonction n'est pas périodique car $\ln x$ ne l'est pas.
c) La fonction est impaire car :

$$f(-x)=\ln|-x|\sin(-x)=-\ln|x|\sin(x)=-f(x)$$

d) $f(x)=0 \to \begin{cases}\ln|x|=0 \to x=\pm 1\\ \sin x=0 \to x=k\pi\end{cases}$

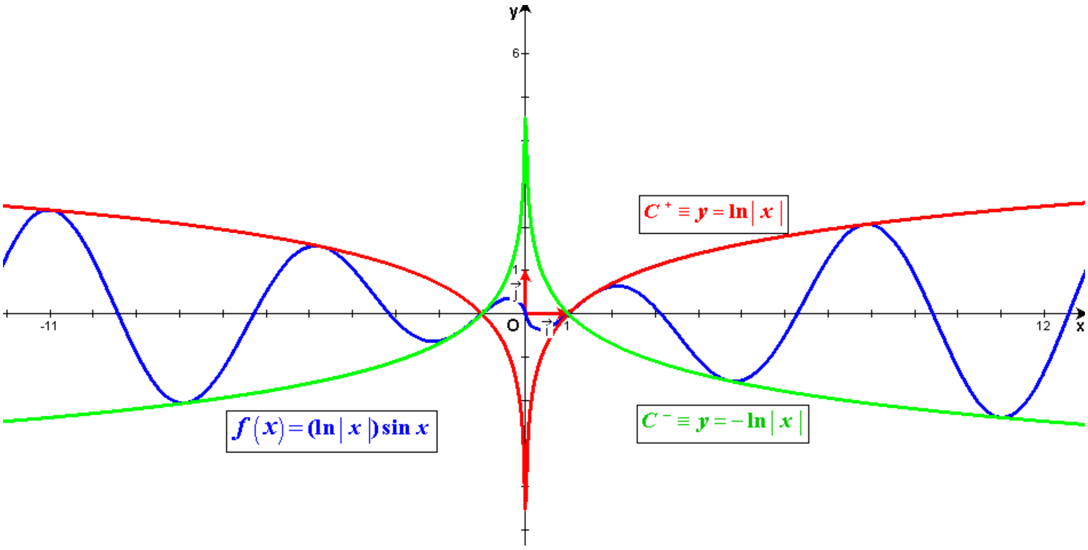
e) $f'(x)=(\ln|x|\sin x)'=\dfrac{\sin x}{|x|}+\ln|x|\cos x$

f) Les courbes $C^+ \equiv y=\ln|x|$ et $C^- \equiv y=-\ln|x|$ sont tracées ci-dessous.

g) 1) Intersection de $f(x)$ et $C^+ \to \ln|x|\sin x=\ln|x| \to \begin{cases}\ln|x|=0 \to x=\pm 1\\ \sin x=1 \to x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

1) Intersection de $f(x)$ et $C^- \to \ln|x|\sin x=-\ln|x| \to \begin{cases}\ln|x|=0 \to x=\pm 1\\ \sin x=-1 \to x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$

h) Le graphe de $f(x)$ est donné ci-dessous.



30 jan 08.