Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 26

EXANA260 – EXANA269

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Avril 2010

EXANA260 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1.

a) Calculer $\ln(1,02)$ à 10^{-5} près en utilisant le développement de $\ln(1+x)$.
b) Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\left(2xe^{-x}-\ln(1+2x)\right)}{x\sin\left(2x^2\right)e^{3x}}$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

$$a)\begin{cases} f(x)=\ln(1+x) & \Rightarrow f(0)=0 \\ f'(x)=\dfrac{1}{1+x} & \Rightarrow f'(0)=1 \\ f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2} & \Rightarrow f''(0)=-1 \\ f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3} & \Rightarrow f'''(0)=2 \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$$

Précision de l'ordre 1 : $|R(x)|\le\dfrac{f''(0)}{2!}(0,02)^2=-0,0002=O\left(10^{-4}\right)\to$ insuffisant

Précision de l'ordre 2 : $|R(x)|\le\dfrac{f'''(0)}{3!}(0,02)^3=-2,666..10^{-6}=O\left(10^{-6}\right)\to$ suffisant

$$\Rightarrow \ln(1,02)\approx 0,02-\frac{0,02^2}{2}=0,02-0,0002=\boxed{0,019800}$$

b) Il est d'abord malin de décomposer cette limite en produits car certains termes donnent une réponse simple. En effet, si on remplace x par 0 dans l'expression globale, on obtient 0/0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\left(2xe^{-x}-\ln(1+2x)\right)}{x\sin\left(2x^2\right)e^{3x}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos(2x)}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{3x}}}_{1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\left(2xe^{-x}-\ln(1+2x)\right)}{x\sin\left(2x^2\right)}$$

La limite se simplifie donc et revient à calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x\sin\left(2x^2\right)}$

Nous obtenons toujours une indétermination 0/0 et nous allons donc utiliser un développement de Mac Laurin autour de 0 puisque la limite s'y trouve.

$$\begin{cases} e^{-x}\approx 1-x+\dfrac{x^2}{2} \\ \ln(1+2x)\approx 2x-2x^2+\dfrac{8x^3}{3} \\ \sin\left(2x^2\right)\approx 2x^2 \end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{-x}-\ln(1+2x)}{x\sin\left(2x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)-2x+2x^2-\dfrac{8x^3}{3}}{2x^3}$$

En simplifiant la fraction on a : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\dfrac{8x^3}{3}}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\cancel{x^3}}{6\cancel{x^3}}=\boxed{-\dfrac{5}{6}}$

Aout 09

EXANA261 – FACSA, ULB, Bruxelles – juillet 09.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\sin\left(x^2\right)$

a) Déterminer les zéros de f.

b) f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leur nature. Si non, justifier.

c) f est-elle périodique ? Justifier.

d) Calculer la dérivée de f et l'évaluer en chacun des zéros de f.

e) Déterminer les points communs de la courbe C d'équation $y = f(x)$ avec la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$, ainsi que la valeur de la pente de la tangente à C en chacun de ces points.

f) Combien la fonction f possède-t-elle de points maximum ? Justifier.

g) Esquisser la courbe de C et Γ en indiquant clairement les abscisses des points remarquables.

Ndlr : dans le même style, voir EXANA220 (ULB-2008) et EXANA208 (EPL-2007)

Solution proposée par Steve Tumson

Pour cette étude, il est commode de bien voir $f(x)$ comme le produit de deux fonctions $g(x)=e^{-x}$ et $h(x)=\sin\left(x^2\right)$. Ainsi, $f(x)=g(x)h(x)$.

a) Puisque h ne s'annule jamais, les zéros de f sont les zéros de g.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=k\pi \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{k\pi} \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

b) Il n'y a aucune asymptote. En effet, le domaine de définition de f étant $\mathbb{R}$, on ne peut envisager aucune asymptote verticale. Pour les autres, on calcule :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin\left(x^2\right)=\underbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{-x}}_{0}\,.\,\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\sin\left(x^2\right)}_{\text{Borné !}}=0$$

Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

c) Une fonction périodique de période p l'est si $f(x+p)=f(x)$.
Dans notre cas, nous avons $f(x+p)=g(x+p)h(x+p)=g(x+p)h(x)\neq f(x)$ puisque le sinus est périodique mais pas l'exponentielle. f n'est donc pas périodique.

d) $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dg}{dx}h(x)+\dfrac{dh}{dx}g(x)=-e^{-x}\sin\left(x^2\right)+2xe^{-x}\cos\left(x^2\right)=e^{-x}\left(2x\cos\left(x^2\right)-\sin\left(x^2\right)\right)$

La valeur des dérivées aux zéros sont $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{\text{zéros}}=\begin{cases}\text{pour } x>0: e^{-\sqrt{k\pi}}\left((-1)^k\sqrt{4k\pi}\right)\\ \text{pour } x<0: -e^{\sqrt{k\pi}}\left((-1)^k\sqrt{4k\pi}\right)\end{cases}\quad \forall k\in\mathbb{Z}$

En effet, le terme $\sin\left(x^2\right)$ est nul aux points zéros de f tandis que le terme $\cos\left(x^2\right)$ prend tantôt la valeur 1, tantôt la valeur -1 en ces mêmes points.

$$\begin{cases}\text{Si } k \text{ est paire, } \cos\left(x^2\right)=1\\ \text{Si } k \text{ est impaire, } \cos\left(x^2\right)=-1\end{cases}\rightarrow \cos\left(x^2\right)=(-1)^k \text{ pour les points zéros de } f$$

Ces valeurs de dérivées sont assez intéressantes à interpréter, en effet, le terme $\left((-1)^k\sqrt{4k\pi}\right)$ fait changer le signe de la pente à chaque incrément de k, la fonction monte puis descend donc indéfiniment (prévisible puisque f est composée d'un produit de la fonction sinus).
La grandeur de ces valeurs est déterminée essentiellement par le terme exponentiel (variation beaucoup plus importante que le terme en racine carrée) et on observe que :

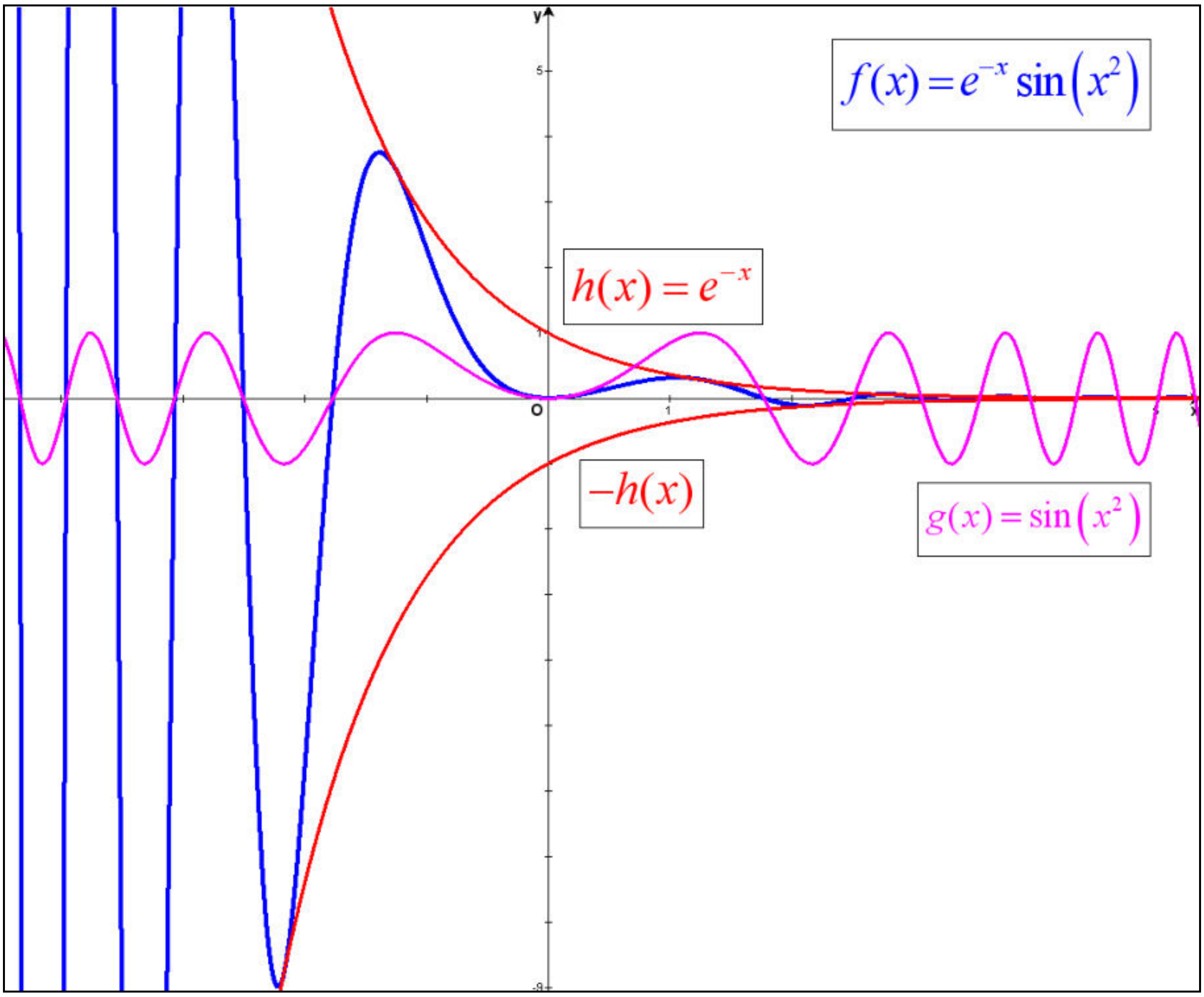
$$\begin{cases}\text{pour } x>0: \text{les valeurs vont décroître très vite pour être rapidement proche de } 0\\ \text{pour } x<0: \text{les valeurs vont croître très vite pour être rapidement proche de } \pm\infty\end{cases}$$

e) $C=\Gamma \Leftrightarrow e^{-x}\sin\left(x^2\right)=e^{-x} \Leftrightarrow \sin\left(x^2\right)=1 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$

$$\text{On trouve ainsi } \left.\frac{df}{dx}\right|_{C=\Gamma}=\begin{cases}\text{pour } x>0 : -e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}} \\ \text{pour } x<0 : -e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\end{cases} \quad \forall k\in\mathbb{Z}$$

f) Au vu des résultats venant d'être obtenus, la fonction à une infitité de points maximum. En effet, nous venons de voir que la dérivée changeait indéfiniment de signe.

g) Voir le graphe ci-dessous. On remarque qu'en effet, le sinus variant en permanence entre -1 et 1, les valeurs de f sont comprises entre $h(x)$ et $-h(x)$.



EXANA262 – FACSA, ULB, Bruxelles – juillet 09.

On veut construire une cuve cylindrique de volume donné V (en m^3). Par m^2 , le prix du revêtement intérieur de la base est trois fois plus élevé que celui de la paroi latérale. Calculer (en fonction de V) le rayon et la hauteur de la cuve minimisant le prix total du revêtement intérieur.

Solution proposée par Steve Tumson

La fonction à minimiser est le prix total du revêtement :

$$P(r,h) = (3\beta)\pi r^2 + (\beta)2\pi rh$$

avec β la constante valant le prix unitaire, exprimé en €/m².

Puisqu'on ne sait pas optimiser une fonction à deux variables avec les outils traditionnels, il suffit de trouver une relation entre ces deux variables, ici via le volume donné :

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} \Rightarrow P(r) = (3\beta)\pi r^2 + (\beta)\frac{2V}{r}$$

Le minimum de $P(r)$ s'obtient en annulant la dérivée première :

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0 \Leftrightarrow 6\beta\pi r - \frac{2\beta V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}}$$

Pour s'assurer que l'on est bien en présence d'un minimum, étudions la concavité de $P(r)$:

$$\frac{d^2P(r)}{dr^2} = 6\beta\pi + \frac{4\beta V}{r^3} > 0$$

La concavité est toujours positive pour $r > 0$, c'est donc bien un minimum.

Mai 10. Modifié le 3 août 2010. (Yassin Oualhadj). Modifié le 2 aout 2017 (Nicolas Dalmazio)

EXANA263 – FACSA, ULB, Bruxelles – juillet 09.

Calculez les intégrales suivantes en justifiant vos calculs :

a) $\int_{-3}^{3}\left(23+x^{23}e^{-x^2}\right)dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x^{2009}}\,dx$

Solution proposée par Steve Tumson

a) $\int_{-3}^{3}\left(23+x^{23}e^{-x^2}\right)dx=\int_{-3}^{3}(23)\,dx+\int_{-3}^{3}\left(x^{23}e^{-x^2}\right)dx=\int_{-3}^{3}(23)\,dx=\boxed{138}$

En effet, l'intégrale sur un intervalle symétrique centré sur zéro d'une fonction impaire est nulle (vu la symétrie centrale du graphe).

Or, $f(x)=x^{23}e^{-x^2}$ est impaire puisque $f(-x)=(-x)^{23}\,e^{-(-x)^2}=-x^{23}e^{-x^2}=-f(x)$

b) $\int \frac{\ln x}{x^{2009}}\,dx$ par partie avec $\begin{cases} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^{2009}} & v=-\dfrac{1}{2008x^{2008}} \end{cases}$

$$\rightarrow \int \frac{\ln x}{x^{2009}}\,dx=-\frac{\ln x}{2008x^{2008}}+\frac{1}{2008}\int \frac{1}{x^{2009}}\,dx=-\frac{\ln x}{2008x^{2008}}-\frac{1}{2008^2\,x^{2008}}+C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^{2009}}\,dx=\boxed{-\frac{1}{2008x^{2008}}\left(\ln x+\frac{1}{2008}\right)+C}$$

Aout 09

EXANA264 – FACSA, ULB, Bruxelles – septembre 09.

Soit $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Déterminer les asymptotes éventuelles de la courbe C d'équation $y = f(x)$ et préciser leur nature

c) Déterminer les zéros de f

d) Calculer la dérivée de f et étudier son signe

e) Déterminer les extremum de f

f) Esquisser le graphe de C de la fonction f

g) C admet-il un centre de symétrie ? Justifier

Solution proposée par Steve Tumson

a) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}>0 \Leftrightarrow domf : x\in \left]-\infty,-1\right[\bigcup\left]1,+\infty\right[$

b) Asymptotes verticales ?

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\ln\left(\frac{-2}{0^-}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\nexists \text{ cfr domaine}\end{cases} \quad\rightarrow\quad A.V\equiv x=-1$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +1^+} f(x)=\ln\left(\frac{0^+}{2}\right)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to +1^-} f(x)=\nexists \text{ cfr domaine}\end{cases} \quad\rightarrow\quad A.V\equiv x=1$$

Asymptote horizontale ou oblique d'équation $y=kx+t$?

$$\begin{cases}k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln(1)}{+\infty}=0 \\ t=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\ln(1)=0\end{cases} \quad\rightarrow\quad A.H\equiv y=0$$

c) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}=1 \Rightarrow$ Pas de zéro

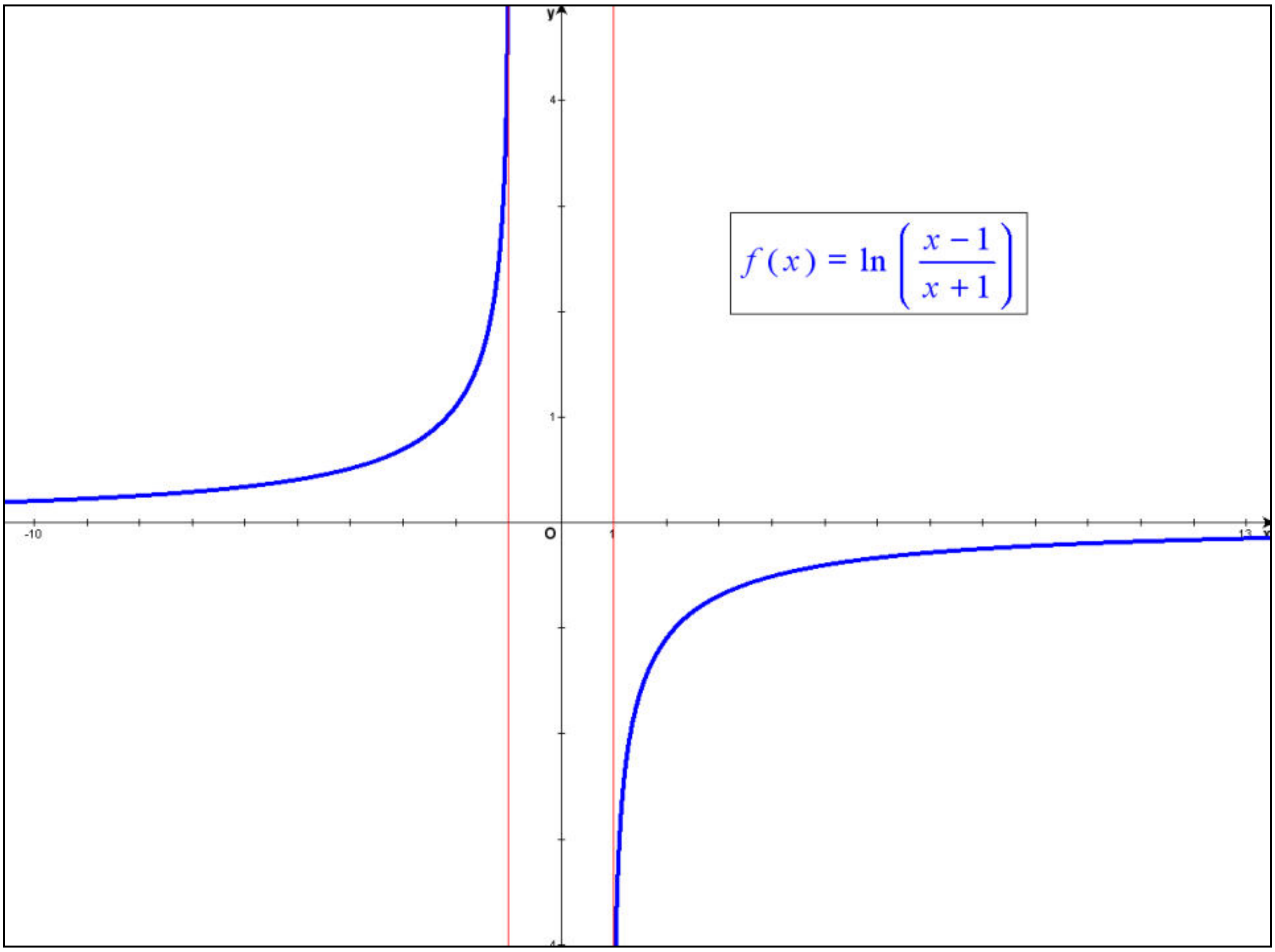
d) $\frac{df(x)}{dx}=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{2}{(x^2-1)}\rightarrow\frac{df(x)}{dx}>0\ \ \forall x\in domf$

e) Aucun maximum ni minimum

g) Oui en $(0,0)$ car f est impaire

$$f(-x)=\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=\ln\left(\frac{-\left(x+1\right)}{-\left(x-1\right)}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}=-f(x)$$

f) Voir graphe ci-dessous



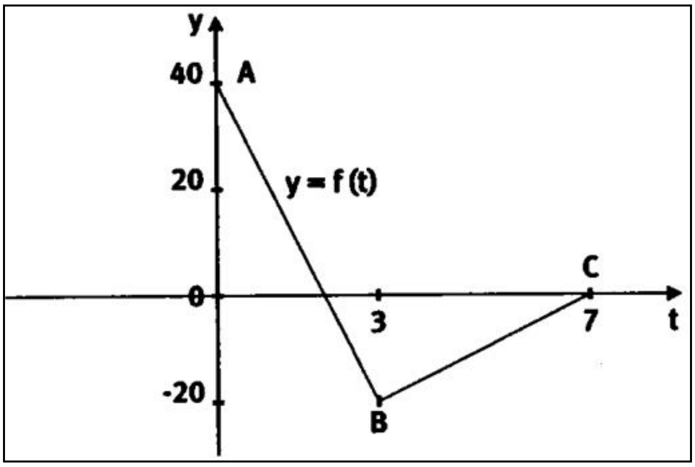
Mai 09

EXANA265 – FACSA, ULB, Bruxelles – septembre 09.

Le graphe d'une fonction f est constitué des segments de droite AB et BC comme l'illustre le schéma ci-dessous.

a) Si $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, que vaut $F(4)$?

b) Tracer le graphe de la fonction dérivée de f sur la figure ci-dessous.



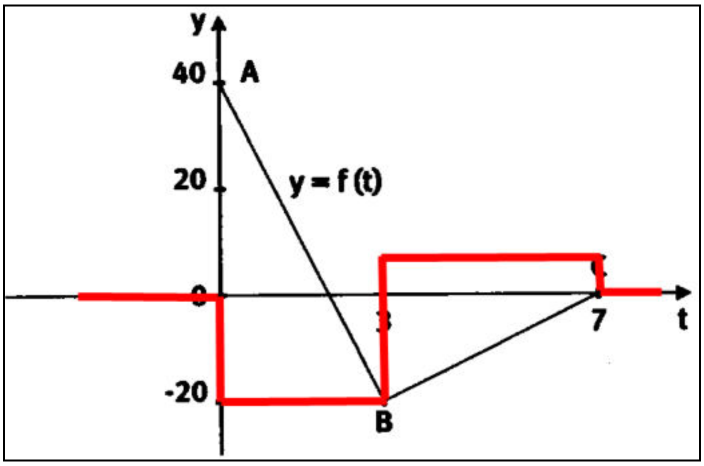
Solution proposée par Steve Tumson

a) On trouve facilement l'équation des droites composant f :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = -20t + 40 & \text{pour } 0 < t \leq 3 \\ f(t) = 5t - 35 & \text{pour } 3 \leq t \leq 7 \\ f(t) = 0 & \text{pour } t \geq 7 \end{cases}$$

$$\rightarrow F(4) = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^3 (-20t + 40)\, dt + \int_3^4 (5t - 35)\, dt = \frac{25}{2}$$

b) Il suffit de dériver les morceaux de $f(t)$: $\begin{cases} f'(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f'(t) = -20 & \text{pour } 0 < t \leq 3 \\ f'(t) = 5 & \text{pour } 3 \leq t \leq 7 \\ f'(t) = 0 & \text{pour } t \geq 7 \end{cases}$



Mai 09

EXANA266 – FACSA, ULB, Bruxelles – septembre 09.

Calculer les intégrales suivantes en justifiant les calculs :

a) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}-5x}{e^{2x}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}\left(3+\sin 5x + x\cos 7x\right)dx$

---

a) $\displaystyle\int \frac{e^{5x}-5x}{e^{2x}}\,dx = \int e^{3x}dx - 5\int xe^{-2x}dx = \frac{e^{3x}}{3} - 5\int xe^{-2x}dx$: par partie $\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{cases}$

$$\to \frac{e^{3x}}{3} - 5\int xe^{-2x}dx = \frac{e^{3x}}{3} - 5\left(-\frac{xe^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2}dx\right) = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{5}{2}xe^{-2x} + \frac{5}{4}e^{-2x} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{5x}-5x}{e^{2x}}\,dx = \boxed{\frac{e^{-2x}}{12}\left(4e^{5x}+30x+15\right)+C}$$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}\left(3+\sin 5x + x\cos 7x\right)dx = 3\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^{314}\sin 5x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} x^{315}\cos 7x\,dx$

L'intervalle d'intégration étant symétrique centré sur 0, on peut dire que :

i) x^{314}est une fonction paire, donc par symétrie orthogonale : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}dx = 2\int_{0}^{\pi} x^{314}dx = \frac{2}{315}\pi^{315}$

ii) les deux autres fonctions sont impaires, donc par symétrie centrale :

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{314}\sin 5x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^{315}\cos 7x\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} x^{314}\left(3+\sin 5x + x\cos 7x\right)dx = \boxed{\frac{2}{105}\pi^{315}}$$

Mai 09

EXANA267 – Faculté des sciences économiques, sociales et de gestion, 1er bac, FUNDP, Namur.

Calculer :

$$a)\ F(x)=\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx \qquad \text{(Janvier 1999)}$$

$$b)\ F(x)=\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}}dx \qquad \text{(Janvier 1999)}$$

$$c)\ I=\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}dx} \qquad \text{(Janvier 1999 et juin 2000)}$$

$$d)\ I=\int_8^{27} \frac{1}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx \qquad \text{(Juin 2000)}$$

$$e)\ F(x)=\int \frac{1}{x^3+5x^2+4x}dx \qquad \text{(Juin 2000)}$$

$$f)\ I=\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}xe^x dx \qquad \text{(Juin 2000)}$$

$$g)\ F(x)=\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx \qquad \text{(Juin 2000)}$$

$$a)\ F(x)=\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx$$

On décompose en fractions simples : : $\dfrac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\dfrac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+1}$

$$4x-2=A(x-2)(x+1)+Bx(x-2)+Cx(x-2)\rightarrow\begin{cases}\text{Si } x=2 \rightarrow B=1\\ \text{Si } x=-1\rightarrow C=-2\\ \text{Si } x=0 \rightarrow A=1\end{cases}$$

$$\rightarrow F(x)=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$b)\ F(x)=\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

On pose : $t^2=x+2 \rightarrow \begin{cases} x-2=t^2-4 \\ dx=2tdt \end{cases} \qquad \rightarrow F(x)=2\int \frac{dt}{t^2-4}=2\int \frac{dt}{(t+2)(t-2)}$

On décompose en fractions simples : $\dfrac{1}{(t+2)(t-2)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{t+2}+\dfrac{1}{t-2}\right)$

$$\rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\int \left(\frac{-1}{t+2}+\frac{1}{t-2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\ln|t+2|+\ln|t-2|\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right|+C=-\tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)+C$$

$c)\ I=\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$ Par parties : $\begin{cases} u=\ln x & u'=\dfrac{1}{x} \\ v'=x^{-\frac{1}{2}} & v=2\sqrt{x} \end{cases}$

$$\rightarrow I=\left[2\sqrt{x}.\ln x\right]_0^2-2\int_0^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2\sqrt{x}.\ln x-4\sqrt{x}\right]_0^2$$

$$=\left(2\sqrt{2}\ln 2-4\sqrt{2}\right)-\left(\underbrace{2\sqrt{0}.\ln 0}_{\substack{=0 \\ \text{car } \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x=0}}-0\right)=2\sqrt{2}\left(\ln 2-2\right)$$

$d)\ I=\displaystyle\int_8^{27}\frac{1}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}dx.$ On pose : $t=\sqrt[3]{x}\rightarrow \begin{cases} x=t^3 \rightarrow dx=3t^2dt \\ x=8 \rightarrow t=2 \\ x=27 \rightarrow t=3 \end{cases}$

$$\rightarrow I=3\int_2^3 \frac{dt}{t(1-t)}=3\int_2^3\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=3\left[\ln t-\ln|1-t|\right]_2^3=3\left[(\ln 3-\ln 2)-(\ln 2-\ln 1)\right]$$

$$=3\ln 3-6\ln 2$$

$$e)\ F(x)=\int \frac{dx}{x^3+5x^2+4x}=\int \frac{dx}{x(x+4)(x+1)}$$

On décompose en fractions simples : $\frac{1}{x(x+4)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x+1}$

$$\rightarrow 1=A(x+4)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x+4)\rightarrow\begin{cases}x=-4\rightarrow B=\frac{1}{12}\\ x=-1\rightarrow C=-\frac{1}{3}\\ x=0\quad\rightarrow A=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\rightarrow F(x)=\int \left(\frac{1}{4}.\frac{1}{x}+\frac{1}{12}.\frac{1}{x+4}-\frac{1}{3}.\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{12}\ln|x+4|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C$$

$f)\ I=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}x.e^x dx$ On remarque que : $\left(\frac{u}{1+x}\right)'=\frac{u'(1+x)-u'}{(1+x)^2}=\frac{xu'}{(1+x)^2}$

Donc dans le cas où :$u=e^x\rightarrow\left(\frac{e^x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}x.e^x\quad\rightarrow I=\int_0^1 d\left(\frac{e^x}{1+x}\right)=\left[\frac{e^x}{1+x}\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$

$$g)\ F(x)=\int \frac{x^4-8}{x^3+2x^2}dx=\underbrace{\int (x-2)dx}_{F_1(x)}+\underbrace{\int \frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}dx}_{F_2(x)}$$

$$F_1(x)=\int (x-2)dx=\frac{x^2}{2}-2x$$

$$F_2(x)=\int \frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}dx$$

On décompose en fractions simples : $\frac{4x^2-8}{x^3+2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2}+\frac{D}{x+2}$

$$\begin{cases}x=0\quad\rightarrow C=-4\\ x=-2\rightarrow D=2\\ x=1\quad\rightarrow A+B=2\\ x=-1\rightarrow -A+B=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=0\end{cases}\qquad\rightarrow F_2(x)=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x+2}\right)dx=2\ln|x|+\frac{4}{x}+2\ln|x+2|$$

Et finalement : $F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+2\ln|x|+\frac{4}{x}+2\ln|x+2|+C$

EXANA268 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2010.

i. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^3$$

où a désigne un paramètre réel quelconque. En dsicutant s'il y a lieu en fonction de a,

a) déterminez le domaine de définition de f;

b) calculez les limites de f aux frontières de son domaine de définition et déterminez les éventuelles asymptotes du graphe f;

c) déterminez et caractérisez les éventuels extrema;

d) étudier la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion;

e) dressez un tableau récapitulatif des propriétés de f et esquissez son graphe.

ii. En exploitant les résultats obtenus au point précédent, sans effectuer aucun calcul supplémentaire, esquissez le graphe de

$$f_a(x) = ax\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^3$$

en discutant s'il y a lieu de la valeur du paramètre réel a.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric JM Delhez et Dr Francine Monjoie). http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. (a) La fonction f est définie si $\ln\dfrac{x}{1+a^2}$ est défini, c'est-à-dire si $x > 0$.

Ainsi, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction f est définie sur $\left]0,+\infty\right[$.

(b) Calculons $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\left(\ln\dfrac{x}{1+a^2}\right)^3$

A priori, nous constatons une indétermination du type $0\times(-\infty)$. Cependant, nous savons que au voisinage de 0, toute puissance positive de x l'emporte sur le logarithme. Cette limite est donc nulle.

Voici, néanmoins, une démonstration explicite :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln\frac{x}{1+a^2}}{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{x}{1+a^2}}{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^3 = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}}\right)^3$$

$$= -3\left(\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

La troisième égalité résultant de l'application du théorème de l'Hospital.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et il n'y a pas d'asymptote verticale en $x = 0$.

Au voisinage de $+\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln\dfrac{x}{1+a^2}\right)^3 = +\infty$

et il n'y a donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Nous concluons qu'il existe aucune asymtopte, tel que soit $a \in \mathbb{R}$

(c) La fonction f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et sa dérivée première est données par

$$f'(x)=\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^3+3x\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^2\left(\ln\frac{x}{1+a^2}+3\right)$$

Elle s'annule si : $\ln\dfrac{x}{1+a^2}=0$ soit si $x=1+a^2$

ou si $\ln\dfrac{x}{1+a^2}=-3$ c'est-à-dire si $x=\left(1+a^2\right)e^{-3}<1+a^2$

Le signe de f' est celui de $\ln\dfrac{x}{1+a^2}+3,$ c'est-à-dire, négatif à gauche de $\left(1+a^2\right)e^{-3}$ et positif à droite.

Nous avons le tableau de variation suivant :

	0		$\left(1+a^2\right)e^{-3}$		$1+a^2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

Nous constatons que f est minimale en $x=\left(1+a^2\right)e^{-3}$. La valeur du minimum est

$$f\left(\left(1+a^2\right)e^{-3}\right)=\left(1+a^2\right)e^{-3}\left[\ln\left(e^{-3}\right)\right]^3=-27\left(1+a^2\right)e^{-3}<0$$

(d) La fonction f' est également dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et

$$f''(x)=3\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)^2\frac{1}{x}+6\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)\frac{1}{x}=\frac{3}{x}\left(\ln\frac{x}{1+a^2}\right)\left(\ln\frac{x}{1+a^2}+2\right)$$

Elle s'annule si $\ln\dfrac{x}{1+a^2}=0$ c'est-à-dire si $x=1+a^2$

ou si $\ln\dfrac{x}{1+a^2}=-2$ soit si $x=\left(1+a^2\right)e^{-2}<1+a^2$

Puisque $x>0,$ le signe de f'' est celui du produit $\left(\ln\dfrac{x}{1+a^2}\right)\left(\ln\dfrac{x}{1+a^2}+2\right)$

Il est donc positif si les deux facteurs ont le même signe, ce qui est le cas en dehors du segment $\left[\left(1+a^2\right)e^{-2},1+a^2\right]$. Il est négatif à l'intérieur de ce segment.

Nous avons le tableau de variation suivant :

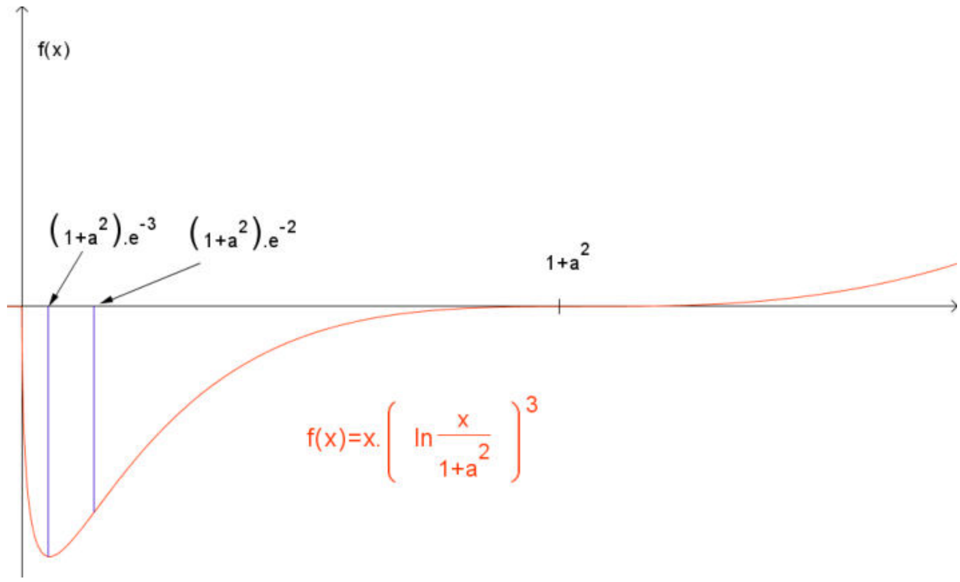
	0		$\left(1+a^2\right)e^{-3}$		$1+a^2$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	

Ainsi le graphe de f possède deux points d'inflexion situés en $\left(1+a^2\right)e^{-2}$ et $1+a^2$

(e) En vue d'esquisser le graphe de f, dressons le tableau récapitulatif :

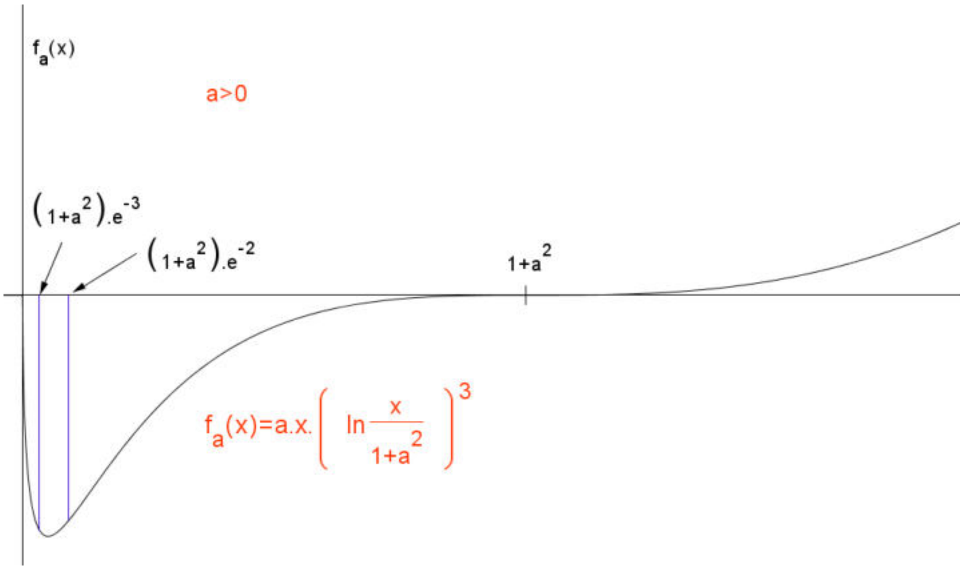
x	0		$\left(1+a^2\right)e^{-3}$		$\left(1+a^2\right)e^{-2}$		$1+a^2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
f''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$ $\cup$	$-27\left(1+a^2\right)e^{-3}$ min	$\nearrow$ $\cup$	PI	$\nearrow$ $\cap$	0 PI	$\nearrow$ $\cup$	$+\infty$

Précisons aussi que le graphe présente un point d'inflexion à tangente horizontale en l'abscisse $1+a^2$ et que la tangente est verticale en 0^+ puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=-\infty$

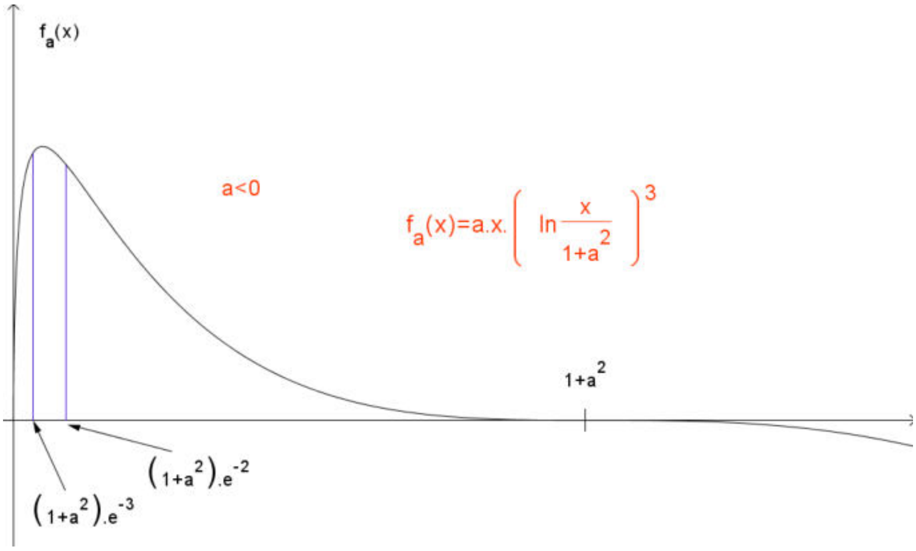


$ii.$ Notons que $f_a\left(x\right)=af\left(x\right)$ c'est-à-dire que les valeurs de la fonction f_a sont obtenus en multipliant celles de la fonction f par a.

- si $a=0$, alors la fonction f_a est identiquement nulle, c'est-à-dire nulle pour toutes les valeurs de x. Son graphe se confond avec l'axe des abscisses.
- si $a>0$, le graphe de f_a a la même allure que celui de f, si ce n'est que la valeur du minimum est multipliée par a.



– si $a<0,$ notons que $f_{-a}\left(x\right)=-f_a\left(x\right)$ c'est-à-dire que les valeurs de f_{-a} sont exactement opposées aux valeurs de f_a. En particulier, le graphe de f_{-a} est symétrique de celui de f_a par rapport à l'axe des abscisses.



EXANA269 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2010.

On considère une fonction g définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction h par

$$h(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

i. Quel est le domaine de définition de h?

ii. Que vaut $h'(x)$?

iii. Que vaut $h''(x)$?

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric JM Delhez et Dr Francine Monjoie). http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. La fonction h est obtenue par composition des fonctions g et $1/x$. Vu que la fonction $1/x$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ de définition de la fonction g, la fonction composée est définie sur $\mathbb{R}_0$. Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}_0$.

ii. Puisque g et $1/x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_0$, on a $h'(x) = g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

iii. Puisque g est deux fois dérivable, nous déduisons

$$\frac{d}{dx} g'\left(\frac{1}{x}\right) = g''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

puis, en tenant compte de la dérivée d'un produit,

$$h''(x) = g''\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + g'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^4} g''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Aout 09