Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 27

EXANA270 – EXANA279

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Benoit Baudelet – Steve Tumson

Août 2010

EXANA270 – FACSA - ULG - Liège, juillet 2010.

On appelle "coefficients de Fourier" d'une fonction f, les réels $a_0, a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2 \ldots$ définis par

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad k = 0,1,2,\ldots.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad k = 1,2,\ldots.$$

(lorsque ces intégrales existent).

i. Calculez les coefficients de Fourier de a_0, a_1, et b_1 de $f(x) = x^2$

ii. Généraliser les résultats précédents en calculant a_k et b_k $\left(k \in \mathbb{N}_0\right)$ de $f(x) = x^2$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric JM Delhez et Dr Francine Monjoie). http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Vu que $\cos 0 = 1$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

Le calcul de

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx$$

s'effectue par parties en posant

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos x \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 2x \\ v = \sin x \end{cases}$$

Ainsi,

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left.x^2 \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin x\,dx\right) = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$$

en tenant compte de $\sin(\pm\pi) = 0$.

Une seconde intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin x \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\cos x \end{cases}$$

conduit a

$$a_1 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left.x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi\cos\pi - (-\pi)\cos(-\pi) - \left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = -4$$

Le calcul de $\quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx$

ii. En général, pour $k \in \mathbb{N}_0$, le calcul de $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\,dx$ s'effectue aussi par parties.

On pose : $\begin{cases} u = x^2 \\ v' = \cos(kx) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 2x \\ v = \dfrac{\sin(kx)}{k} \end{cases}$

de là :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2 \sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x\sin(kx)}{k}\right) = -\frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx$$

en tenant compte de $\sin(\pm kx) = 0.$

Une seconde intégration par parties, en posant

$\begin{cases} u = x \\ v' = \sin(kx) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{\cos(kx)}{k} \end{cases}$

conduit à : $a_k = -\frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s\sin(kx)\,dx = \frac{2}{k\pi}\left(\left[\frac{2x\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k}\,dx\right)$

$$= \frac{2}{k^2\pi}\left(\pi\cos(k\pi) - (-\pi)\cos(-k\pi) - \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{4(-1)^k}{k^2}$$

puisque $\cos(\pm k\pi) = (-1)^k$

Chaque coefficient $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(kx)\,dx$ résulte de l'intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine et est donc nul.

En conclusion, $a_k = \dfrac{4(-1)^k}{k^2}$ et $b_k = 0,\quad k \in \mathbb{N}_0$

Remarquonq que, en particulier pour $k = 1,$ on retrouve les résulats précédents :

$a_1 = -4$ et $b_1 = 0$

Aout 09

EXANA271 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

Un designer conçoit une nouvelle carafe. Il s'agit d'un volume de révolution engendré par rotation de la courbe $y = 4 - y + \frac{1}{2}\sin(\pi y)$ autour de son axe vertical.

Représentez la courbe génératrice de cette carafe et calculez le volume ainsi défini pour $y \in [0,2]$.

Solution proposée par Steve Tumson

En calculant quelques points pour $y = 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; 2$ on sait esquisser le graphe présenté ci-dessous.

Le volume engendré par la rotation d'un arc de courbe d'équation $y = f(x),\ x \in [a,b]$ autour de l'axe horizontale Ox est donné par : $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$

Par analogie, on peut écrire que le volume engendré par la rotation d'un arc de courbe d'équation $x = f(y),\ y \in [a,b]$ autour de l'axe vertical Oy est donné par : $V = \pi\int_a^b f^2(y)\,dy.$

Il suffit donc d'effectuer le calcul suivant :

$$V = \pi\int_0^2 \left(4 - y + \frac{1}{2}\sin(\pi y)\right)^2 dy. \Leftrightarrow \frac{V}{\pi} = \underbrace{\int_0^2 (4-y)^2 dy}_{(1)} + \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{4}\sin^2(\pi y) dy}_{(2)} + \underbrace{\int_0^2 (4-y)\sin(\pi y) dy}_{(3)}$$

$$(1)\int_0^2 (4-y)^2 dy = \left[\frac{y^3}{3} - 4y^2 + 16y\right]_0^2 = \frac{56}{3}$$

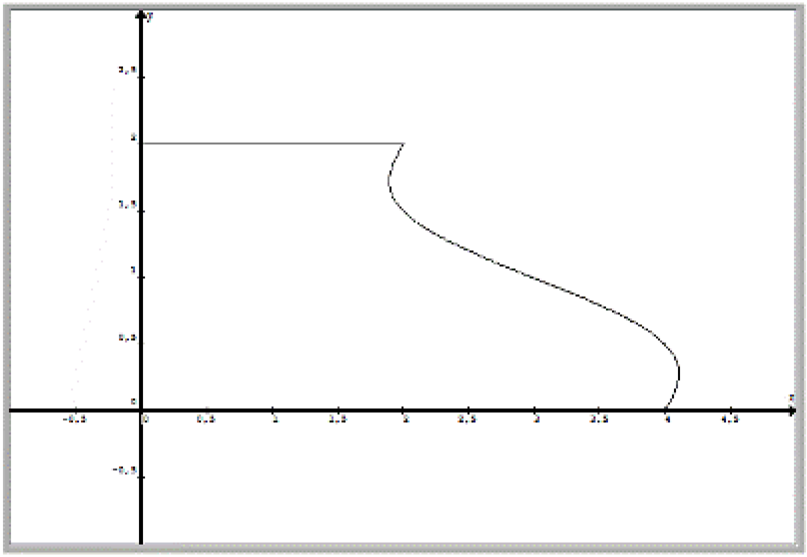
$$(2)\int_0^2 \frac{1}{4}\sin^2(\pi y) dy = \left[\frac{y}{8} - \frac{\sin(2\pi y)}{16\pi}\right]_0^2 = \frac{1}{4}$$

$$(3)\int_0^2 (4-y)\sin(\pi y) dy = \int_0^2 4\sin(\pi y) dy + \underbrace{\int_0 y\sin(\pi y) dy}_{\text{PAR PARTIE}}$$

$$= \left[-\frac{4}{\pi}\cos(\pi y) + \frac{y}{\pi}\cos(\pi y) - \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi y)\right]_0^2 = \frac{2}{\pi}$$

On trouve finalement :

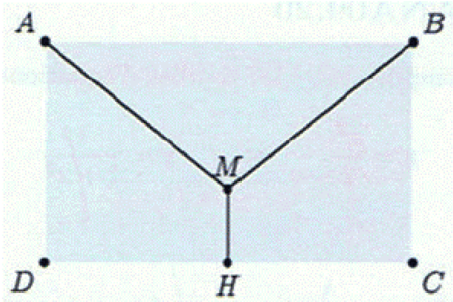
$$\frac{V}{\pi} = \frac{56}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \boxed{V = \frac{73\pi}{4} + 2 \simeq 61,42}$$



Mai 10

EXANA272 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluie pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.
On donne ci-dessous le plan de cette façade (MH est la médiatrice de BC). AB mesure 10m et BC a une longueur de 6m. Il s'agit de trouver, sur cette façade, la position du point M qui minimise la longueur des tuyaux.



Solution proposée par Steve Tumson

La fonction à minimiser est la longueur totale de tuyaux, soit, si on note y_M la hauteur de M :

$$f(y_M) = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{BM}\right\| + \left\|\overrightarrow{MH}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{MH}\right\| \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \sqrt{5^2 + (y_M - 6)^2} \\ \left\|\overrightarrow{MH}\right\| = y_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(y_M) = y_M + 2\sqrt{25 + (y_M - 6)^2}$$

Le minimum se trouve en annulant la dérivée première :

$$\frac{df}{dy_M} = \frac{2(y_M - 6)}{\sqrt{25 + (y_M - 6)^2}} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(6 - y_M) = \sqrt{25 + (y_M - 6)^2}$$

Puisqu'il faut nécessairement $y_M \le 6,$ les deux membres de la dernière équation irrationnelle sont positifs, nous pouvons donc les élever au carré :

$$4(6 - y_M)^2 = 25 + (y_M - 6)^2 \Rightarrow y_M = 6 \pm \frac{5}{\sqrt{3}}$$

La solution avec le signe positif est à rejeter, car il faut $y_M \le 6$

La hauteur de M minimisant la longueur totale de tuyaux est donc :

$$\boxed{y_M = 6 - \frac{5}{\sqrt{3}} \simeq 3{,}1 \text{ m}}$$

Mai 10. Modifié le 3 août 2010. (Yassin Oualhadj)

EXANA273 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

Calculez

$$I = \int \frac{\ln^2 x}{x^4} dx$$

Solution proposée par Steve Tumson

Par partie :

$$\begin{cases} u = \ln^2 x \to du = \dfrac{2\ln x}{x} dx \\ dv = \dfrac{dx}{x^4} \to v = -\dfrac{1}{3x^3} \end{cases} \Rightarrow I = -\frac{\ln^2 x}{3x^3} + \frac{2}{3}\int \frac{\ln x}{x^4} dx$$

L'intégrale du deuxième terme se résout aussi par partie :

$$\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{x^4} \to v = -\dfrac{1}{3x^3} \end{cases} \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x^4} dx = -\frac{\ln x}{3x^3} + \int \frac{1}{3x^4} dx = -\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$$

Finalement, on a :

$$I = -\frac{\ln^2 x}{3x^3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{\ln x}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}\right) + C \Leftrightarrow \boxed{I = -\frac{1}{27x^3}\left(9\ln^2 x + 6\ln x + 2\right) + C}$$

Aout 09

EXANA274 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

Déterminez a et b pour que :

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x} \quad \text{avec } b>0$$

ait un maximum local égale à 2 et un minimum local égal à 6.

Solution proposée par Steve Tumson

$$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x} \Rightarrow \frac{df}{dx}=\frac{x^2-b}{x^2} \rightarrow \text{Extrema en } x=\pm b$$

En esquissant rapidement un petit tableau de variation, on observe que le maximum se trouve en $x=-b$ et que le minimum est en $x=b$.

Il faut maintenant satisfaire les conditions en ces points :

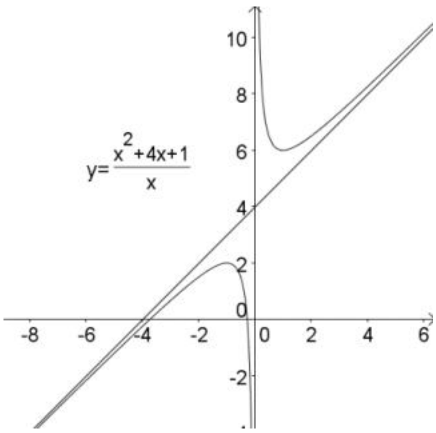
$$\begin{cases} f(-b)=2 \Leftrightarrow \dfrac{-b^2+ab-b}{b}=2 \\ f(b)=6 \Leftrightarrow \dfrac{b^2+ab+b}{b}=6 \end{cases}$$

On additionne les deux équations afin de trouver immédiatement la valeur de a :

$$2a=8 \Leftrightarrow \boxed{a=4}$$

On trouve ensuite facilement b

$$-b^2+4b-b=2b \Leftrightarrow b(1-b)=0 \Leftrightarrow \boxed{b=1} \text{ (puisque } b>0)$$



Mai 09

EXANA275 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

Etudier complètement la fonction

$$f(x)=x^2(\ln x-2)$$

Et donnez en une représentation graphique soignée.

Solution proposée par Steve Tumson

1. Domaine : $x>0$
2. Zéros : $x=0$ et $x=e^2$
3. Asymptotes :

   Au vu du domaine, il n'y a aucune asymptote verticale. Le critère de Cauchy nous indique s'il existe une asymptote horizontale ou oblique d'équation $y=kx+t$:

   $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}x(\ln x-2)=\infty\to \text{Pas d'asymptote.}$$

4. Dérivées première et seconde

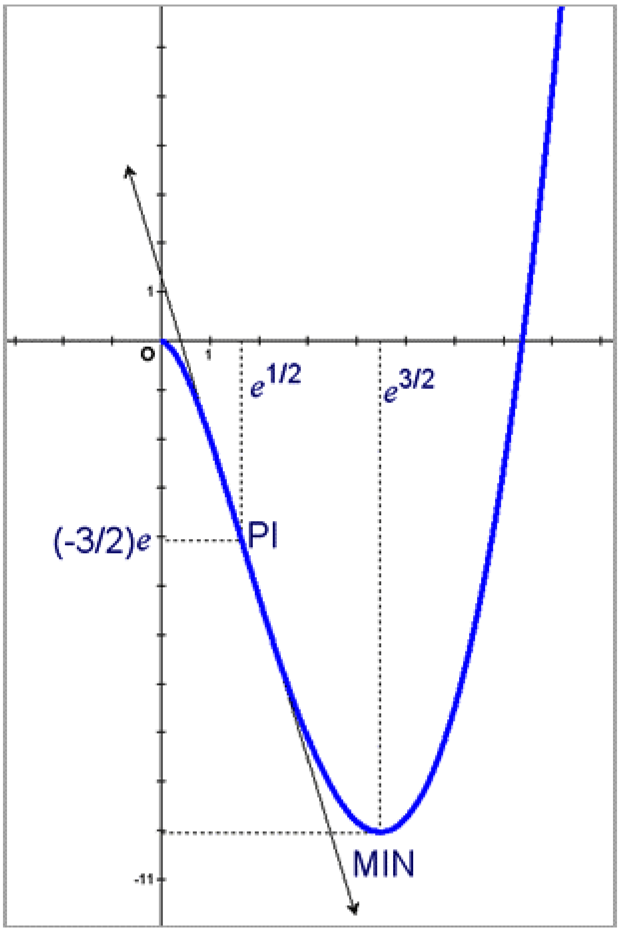
   $$\frac{df}{dx}=x(2\ln x-3) \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dx^2}=2\ln x-1$$

5. Tableau récapitulatif

	0		$e^{1/2}$		$e^{3/2}$	
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\to$	$\searrow$	PI	$\searrow$	MIN	$\nearrow$
	$\cap$	$\cap$	0	$\cup$	$\cup$	$\cup$

Tangente au point d'inflexion $\left(e^{1/2},-\frac{3e}{2}\right)\to t\equiv\left(y+\frac{3e}{2}\right)=\overbrace{-2e^{1/2}}^{f'(e^{1/2})}\left(x-e^{1/2}\right)$

6. Graphique : Voir figure ci-dessous.



Mai 09

EXANA276 – Polytech - Umons - Mons - Questions type 2009.

Calculer l'aire comprise entre les courbes d'équations

$$y_1 = \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{1}{1+x^2}$$

pour $|x| \leq 2$.

Pour les calculs d'aire entre courbes, il est primordial de bien esquisser les fonctions.

La première est la forme la plus basique d'une parabole.

La seconde s'esquisse rapidement en faisant les observations suivantes :

- Puisque 1 est divisé par $1+x^2 > 0$, y_2 aura son maximum en (0,1).
- Pour les même raisons, y_2 sera borné entre 0 et 1.
- La fonction y_2 est paire et donc symétrique par rapport à l'axe des ordonées.
- Une limite infinie montre immédiatement qu'il existe une asymptote horizontale $y = 0$.

Une fois le graphe esquissé, il faut trouver les intersections entre les courbes :

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

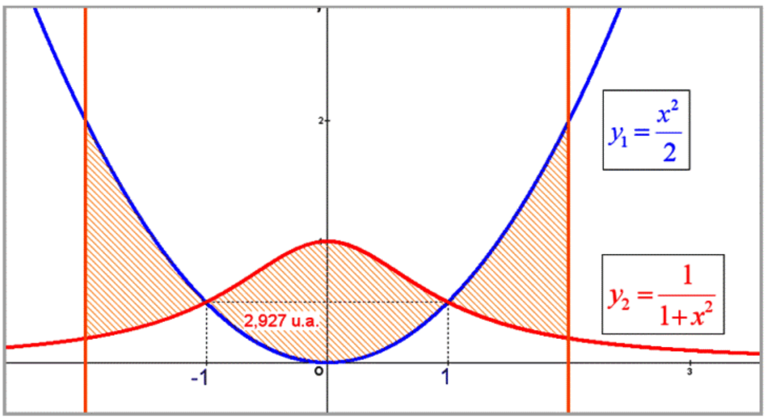
Cette équation bicarée résolue, on trouve que les intersections des courbes sont en $x = \pm 1$.

En resant attentif au graphique esquissé et au fait que les fonctions sont paires, l'aire est :

$$A = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx - 2\int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$= 2\left[Arc\tan(x) - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 - 2\left[Arc\tan(x) - \frac{x^3}{6} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \pi + 2 - 2Arc\tan(2) \simeq 2,9}$$



Mai 09

EXANA277 – EPL - UCL - Louvain - Juillet 2010, série 1.

1) Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}\right)$$

2) On sait que la fraction $\frac{22}{7}$ fournit une bonne approximation rationnelle du nombre π.

(a) Démontrer l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx=\frac{22}{7}-\pi$$

Indication. La division du numérateur par le numérateur conduit à l'égalité

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+r(x)$$

(b) A l'aide de cette égalité, décider si $\pi>\frac{22}{7}$ ou $\pi<\frac{22}{7}$

(Il est possible de répondre à cette question sans avoir démontré l'égalité au point (a))

3) Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

(a) Démontrer que $f(0)=0$

Conseil. Utiliser l'identité $f(x)=\frac{f(x)}{x}.x$

(b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x + x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}.\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}$$

2) (a) Trouvons d'abord la valeur de $r(x)$ qui est a priori de la forme $ax+b$

$$x^4\left(1-x^4\right)=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)\left(x^2+1\right)+ax+b$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{si } x=1 \Rightarrow 0=4+a+b\\ \text{si } x=0 \Rightarrow 0=4+b\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=-4\end{array}\right.\Rightarrow r(x)=-4$$

Nous avons alors :

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx=\int_0^1\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)dx-4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\left[\frac{x^7}{7}-4\frac{x^6}{6}-4\frac{x^5}{5}-4\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^1-4\left[\arctan x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4-4\frac{\pi}{4}=\frac{22}{7}-\pi$$

(b) $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ est toujours positif sur $]\,0,1\,]$. Par conséquent : $\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx>0$

Nous en déduisons que $\frac{22}{7}>\frac{\pi}{4}$.

3) Nous savons que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.x=0 \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x\,f'(x)}^{=0}+f(x)}{1}=0$

$\Rightarrow f(x)=0$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$

$f(x)$ est donc dérivable en $x=0$ et $f'(x)=0$

EXANA278 – EPL - UCL - Louvain - Juillet 2010, série 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{3} - 2\sin x$. On note **C** la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Calculer la dérivée f' de f. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ et construire l'arc de courbe $\mathbf{C}_1$ correspondant (sachez que $\pi\sqrt{3}$ vaut approximativement 5.4).

   (b) Etudier la parité de f. En déduire comment la courbe $\mathbf{C}_2$ représentative de f sur l'intervalle $[-\pi;+\pi]$ se déduit de $\mathbf{C}_1$.

   (c) Pour tout nombre réel x, exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$. En déduire que le graphe complet **C** se déduit de $\mathbf{C}_2$ par des translations successives, que l'on précisera.

2. (a) Démontrer que l'equation $f(x)=0$ admet une et une seule solution appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$.

   (b) Démontrer que cette solution α appartient en fait à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$.

3. Soit g la fonction définie sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

   (a) Démontrer que $g(x) \le x$ pour tout élément x de l'intervalle $\left[\alpha,\frac{\pi}{3}\right]$.

   (b) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $g(x)=x$ appartenant à $\left[\alpha,\frac{\pi}{3}\right]$.

   (c) Dresser le tableau des variations (sans dérivée seconde) de g sur $\left[\alpha,\frac{\pi}{3}\right]$ et montrer que si $\alpha \le x \le \frac{\pi}{3}$, alors $\alpha \le g(x) \le \frac{\pi}{3}$.

   (d) *Bonus.*

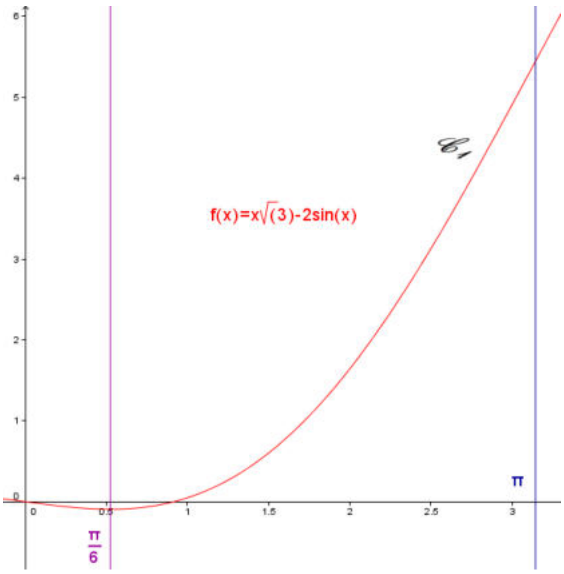
   On définit la suite $\{x_n\}$ par $x_0 = \frac{\pi}{3}$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ pour tout $n \ge 0$. Déduire des points (a), (b) et (c) le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini.

1.(a) La dérivée de $f(x)$ est $f'(x)=\sqrt{3}-2\cos x$.

Cette dérivée est nulle sur l'intervalle $[\,0;\pi\,]$ si $\sqrt{3}-2\cos x=0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$

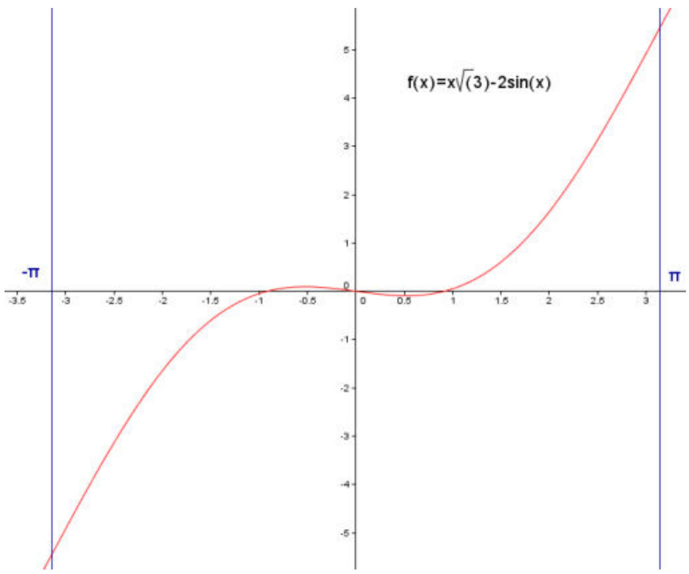
Tableau de variations :

	0		$\dfrac{\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\simeq 5.4$



(b) $f(-x)=-x\sqrt{3}-2\sin(-x)=-x\sqrt{3}+2\sin x=-f(x)$

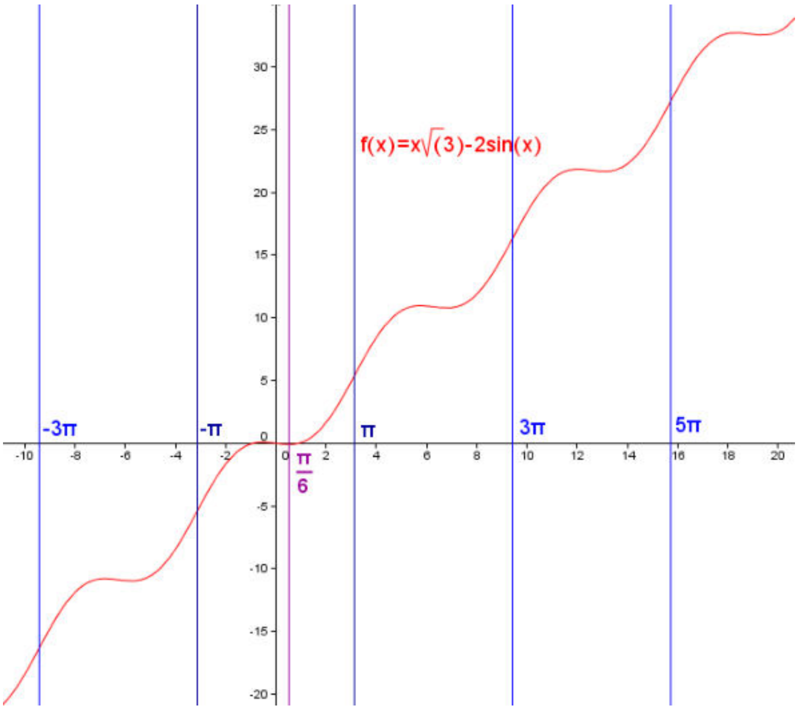
La fonction $f(x)$ est donc une fonction paire. C_2 se contruit donc à partir de C_1 par symétrie centrale de centre O.



(c) $f(x+2\pi)=(x+2\pi)\sqrt{3}-2\cos(x+2\pi)=x\sqrt{3}-2\cos x+2\pi\sqrt{3}=f(x)+2\pi\sqrt{3}$

La fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[\pi,3\pi]$ s'obtient donc par une translation verticale vers le haut de $2\pi\sqrt{3}$ de la fonction $f(x)$ construite sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Et ainsi de suite pour les intervalles de 2π suivants.



2.(a) Le thérème de Bolzano (cas particulier du thérorème des valeurs intermédiaires) dit que si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel c compris a et b tel que $f(c)$.

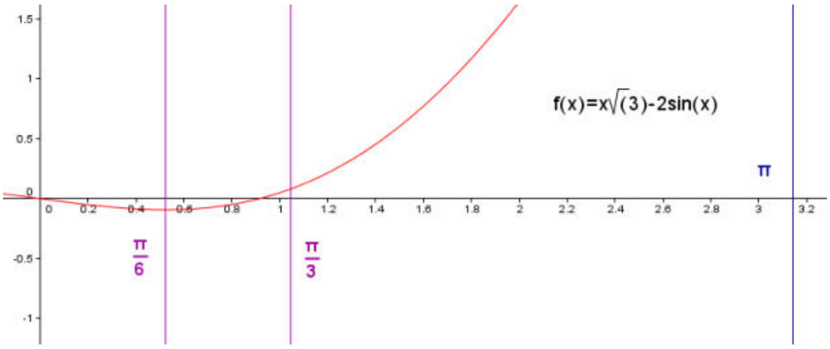
Or ici, $\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-2\simeq\dfrac{5.4}{6}-2<0 \\ f(\pi)=\pi\sqrt{3}>0 \end{array}\right\}$ Donc il existe une solution $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$

tel que $f(\alpha)=0$.

Comme de plus la fonction $f(x)$ est strictement croissante sur $\left]\dfrac{\pi}{6};\pi\right[$, cette solution α est unique.

(b) Appliquons une deuxième fois le théorème de Bolzano :

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<0 \\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2\sqrt{3}}{2}>0 \end{array}\right\} \text{Donc } \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$$



3.(a) $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Or en vertu du résultat obtenu au point 2.(b), $f(x)>0$ si $x\in\left[\alpha;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

De plus, au point 1.(a), nous avons vu que $f'(x)\geq 0$ si $x\in\left[\alpha;\dfrac{\pi}{3}\right]\subset\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$

Autrement dit, $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\geq 0$ si $x\in\left[\alpha;\dfrac{\pi}{3}\right]$ et par conséquent $g(x)\leq x$ sur ce même intervalle.

(b) α est bien une solution de $g(x)=x$ puisque :

$$g(\alpha)=\alpha\Rightarrow\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha\Rightarrow\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=0\Rightarrow f(\alpha)=0$$ ce qui est vrai puisque

α est une solution de $f(x)$. (voir point 1)

Soit donc une autre solution β de $g(x)$. Nous avons alors

$$g(\beta)=\beta\Rightarrow\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=\beta\Rightarrow\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}=0\Rightarrow f(\beta)=0$$

Ce qui implique que $\beta=\alpha$ puisque α est l'unique solution de $f(x)$

(c) $\quad g'(x)=\left(x-\dfrac{x\sqrt{3}-2\sin x}{\sqrt{3}-2\cos x}\right)'=1-\dfrac{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2-\left(x\sqrt{3}-2\sin x\right)\left(2\sin x\right)}{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2}$

$$=\frac{\cancel{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2}-\cancel{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2}+2\sin x\left(x\sqrt{3}-2\sin x\right)}{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2}$$

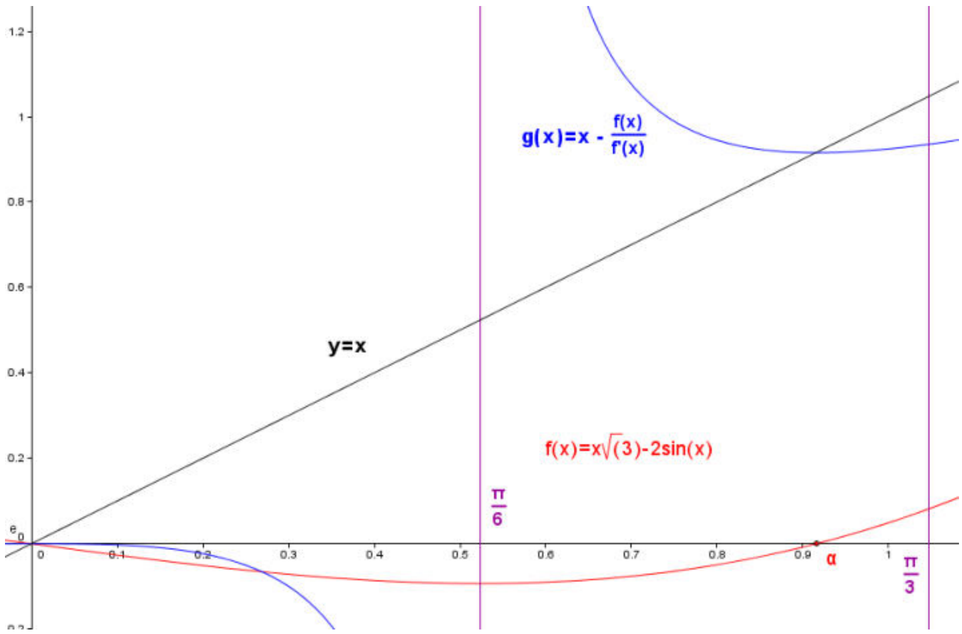
$$=2\sin x\frac{x\sqrt{3}-2\sin x}{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)^2}=2\sin x\frac{f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

Or nous savons que $f(x)\geq 0$ sur $\left[\alpha,\dfrac{\pi}{3}\right]$, de même pour $\sin x$. Donc $g'(x)\geq 0$ et $g(x)$ est croissante sur $\left[\alpha,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

(c) $\quad$ Puisque $g(x)$ est croissante, alors $\alpha\leq x\leq\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow g(\alpha)\leq g(x)\leq g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Or $g(\alpha)=\alpha$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\leq\dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ (En vertu des points $3(b)$ et $3(a)$).

Conclusion : $\alpha\leq g(x)\leq g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\leq\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\alpha\leq g(x)\leq\dfrac{\pi}{3}$



(d) *Bonus.*

Nous avons donc la série : $\begin{cases} x_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

Chaque nouvelle valeur x_{n+1} est inférieure à la précédente en vertu des points $3(a)(b)(c)$.

Dés lors, nous pouvons écrire :

$$\alpha \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq x_n \leq \ldots \leq x_1 \leq x_0 = \frac{\pi}{3}$$

En d'autres termes, la série converge vers α qui est la racine de la fonction $f(x)$.

Nous sommes ici dans le cadre de la méthode de Newton Raphson qui est un algorithme efficace pour trouver des approximations d'un zéro $($ou racine$)$ d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

L'algorithme consiste à linéariser une fonction f en un point et à prendre le point d'annulation de cette linéarisation comme approximation du zéro recherché.

On réitère cette procédure en l'approximation obtenue. Dans les cas favorables, les approximations successives obtenues convergent avec une vitesse quadratique.

De manière informelle, le nombre de décimales correctes double à chaque étape.

Utilisons la méthode :

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = g(x_n)$
0	$\pi/3$	0.08174856	0.73205081	0.935526946
1	0.935526946	0.010556449	0.54526084	0.9161666247
2	0.9161666247	0.000300254	0.51431973	0.9155828362
3	0.9155828362	0.000000270	0.51339373	0.9155823097

Nous vérifions que dans ce cas-ci, l'algoritme converge rapidement vers la racine.

Méthode de Newton Raphson : voir http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton

22 septembre 2010

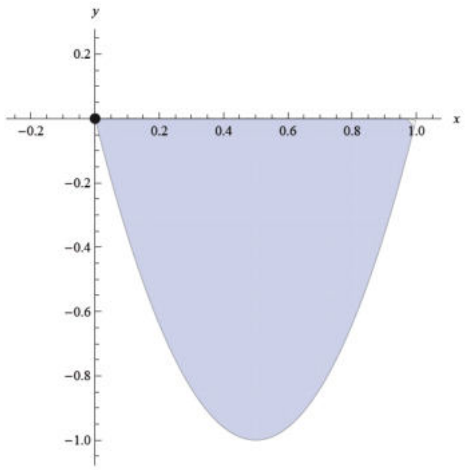
EXANA279 – EPL - UCL - Louvain - Juillet 2010, série 1.

Le verre à moitié vide.

La zone grisée représentée dans la figure ci-dessous correspond à la surface situé entre l'Ox et le graphe de la fonction

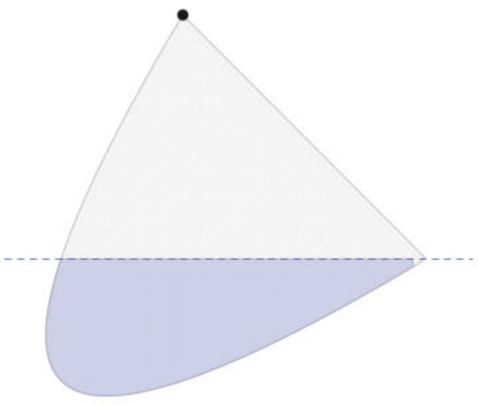
$$f(x) = x^2 - 4x$$

sur l'intervalle $[0,4]$. Cette figure ressemble à la partie supérieure d'un verres (à deux dimensions), sans son pied.

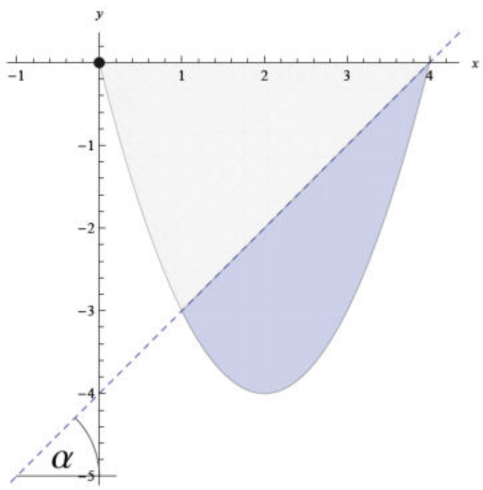


Si on imagine un verre initialement rempli d'eau à ras bord, de quel angle faut-il pencher le verre pour qu'il n'en reste que la moitié?

Note. Pour ce problème, on se place dans un univers (fictif) à deux dimensions, pour lequel on suppose que les quantités d'eau mentionnées sont proportionnelles aux *surfaces* correspondantes. Plutôt que de représenter un verre penché d'un certain angle (ci-dessous, à gauche), on raisonne sur la situation complètement équivalent où le verre reste droit et c'est le niveau de l'eau qui est penché du même angle (ci-dessous, à droite).



$\equiv$



Soit α l'angle cherché, défini sur la figure de droite, et $m = \tan\alpha$ le coefficient angulaire correspondant.

1. Donner, en fonction de m, l'équation de la droite représentant le niveau de l'eau sur la figure de droite, et en déduire les coordonnées de ses deux intersections avec le verre.
2. Calculer en fonction de m la surface de la partie du verre remplie d'eau.
3. Déterminer la valeur du coefficient angulaire m conduisant à un verre à moitié rempli.

Solution proposée par Nicole Berckmans

- La droite $y = m(x-4)$ coupe la parabole aux points $(4,0)$ et $(m, m(x-4))$.
- La surface totale du verre : $\int_0^4 x^2 - 4x\, dx = ... = \dfrac{32}{3}$
- La surface comprise entre la parabole et la droite vaut :

$$\int_m^4 m(x-4) - (x^2-4x)\, dx = \left[\frac{m(x-4)^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_m^4$$

$$= 0 - \frac{64}{3} + 32 - \frac{m(m-4)^2}{2} + \frac{m^3}{3} - 2m^2$$

$$= .... = \frac{-m^3 + 12m^2 - 48m + 64}{6} = -\frac{(m-4)^3}{6}$$

- Cette dernière surface vaut la moitié de l'aire totale, si et seulement si

$$-\frac{(m-4)^3}{6} = \frac{32}{6} \Rightarrow m - 4 = -\sqrt[3]{32} \Rightarrow \boxed{m = 4 - 2\sqrt[3]{4}}$$

---

23 septembre 2010. Modifié le 18 juin 2012 (Nicole Berckmans)