**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

# ANA 28

EXANA280 – EXANA289

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 2010

## EXANA280 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

1. Calculer une primitive de

$$\frac{2x-1}{(x-3)^2+4}$$

2. Calculer les deux limites

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{y\to+\infty} e^{-y}y$$

*Indication.* L'une de ces limites se déduit aisément de l'autre.

3. Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si $f$ est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\frac{1}{5}<\ln\left(\frac{5}{4}\right)<\frac{1}{4}$$

---

1. $I=\int\frac{2x-1}{(x-3)^2+4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2x-1}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1}dx$

On pose : $t=\dfrac{x-3}{2}\to dx=2dt$

$$\to I=\frac{1}{4}\int\frac{2(2t+3)-1}{t^2+1}2dt=\frac{1}{2}\int\frac{4t+5}{t^2+1}dt=\int\frac{2t}{t^2+1}dt+5\int\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$=\ln\left(t^2+1\right)+\frac{5}{2}\arctan t=\ln\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$=\ln\left((x-3)^2+4\right)+\ln\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)=\boxed{\ln\left((x-3)^2+4\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+k}$$

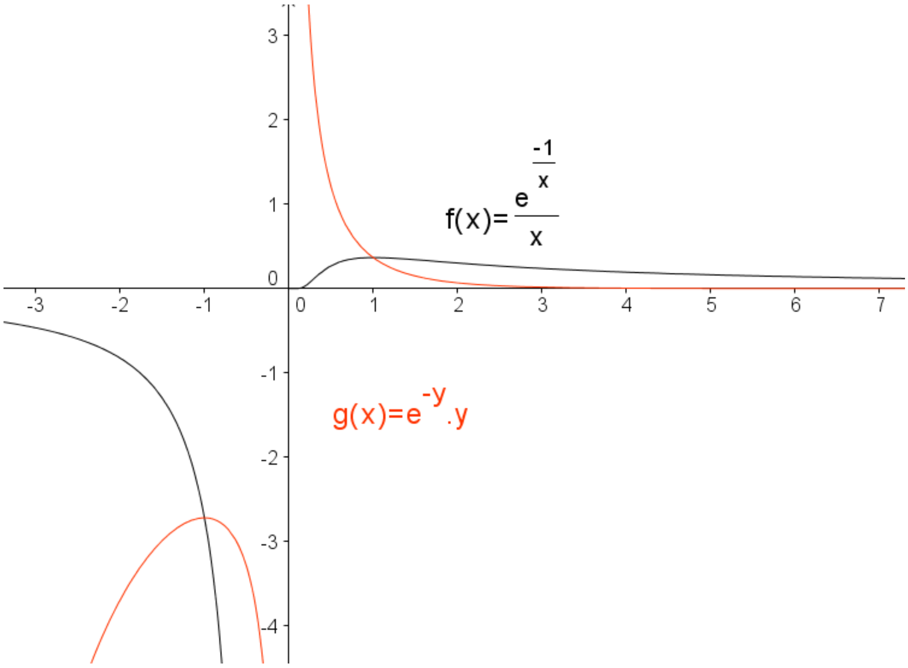
2. Commençons par la deuxième :

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-y}.y = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

La première limite est : $\lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

Posons : $y = \frac{1}{x} \to$ si $x$ tend vers +0, alors $y$ tend vers $+\infty$

$\to \lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y}.y$ qui nous venons de l'établir vaut 0.




3. Les inégalités peuvent s'écrire : $\frac{1}{5} < \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4} < \frac{1}{4}$

Soit la fonction $f(x) = \ln x$ et soit $c \in \left]4,5\right[$

En vertu du théorème, on a : $f'(c) = \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4}$

Or $(\ln x)' = \frac{1}{x} \to \frac{1}{c} = \frac{\ln 5 - \ln 4}{5-4} = \ln 5 - \ln 4.$

Les inégalités s'écrivent alors : $\frac{1}{5} < \frac{1}{c} < \frac{1}{4}$ qui sont vérifiées puique $c \in \left]4,5\right[$

## EXANA281 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

Au cours de cet exercice, on fera appel au résultat suivant, qui indique qu'un inégalité entre deux fonctions est préservée lorsqu'on intégre ses deux membres :

---

Si $u$ et $v$ sont deux fonction continues telles que $u(t) \leq v(t)$ pour tout $\geq 0$, on a

$$\int_0^x u(t)\, dt \leq \int_0^x v(t)\, dt \text{ pour tout } x \geq 0$$

---

1. (a) Prouver que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t}$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

(b) Soit $g$ la fonction définie, sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

Démontrer que, pour tout nombre réel $t \geq 0$,

$$g'(t) \leq 0$$

puis en déduire qu'on a pour tout nombre réel $x \geq 0$

$$g(x) \leq 0.$$

2. On souhaite étudier le fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Démontrer à l'aide du point 1. que $f$ est décroissante sur l'interalle $]0, +\infty[$.

(b) Calculer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

(c) Démontrer que $f$ est dérivable (à droite) en 0 et calculer $f'(x)$. Déterminer si $f$ est continue en 0.

(d) Donner l'équation de la tangente $T$ à la courbe **C** représentative de $f$ au point d'abscisse 0 puis, grâce au point 1., préciser la position de **C** par rapport à $T$.

(e) Tracer dans un repère orthonormé la droite $T$ et la courbe **C** représentative de $f$, en utilisant les informations obtenues précédemment ainsi que le fait que la courbe **C** ne possède aucun point d'inflexion).

(Il est possible de répondre à la question 2. sans avoir démontré les inégalité du point 1.)

$1.(a)\, 1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow \dfrac{1}{1+t}-1+t \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1+t^2-1}{1+t} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{t^2}{1+t} \geq 0$

Comme $t \geq 0$, cette dernière expression est toujours vérfiée.

Dès lors : $$\int_0^x (1-t)\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt$$

implique en vertu du théorème donné en préambule :

$$\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x \geq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \Rightarrow x-\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

$(b)\; g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{1}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t}=-\dfrac{t}{(1+t)^2}$

Sur l'intervalle $[0,\infty[, t\ \leq 0$ et donc $g'(t) \leq 0.$

Autrement dit, la fonction $g$ est toujours décroissante sur cet intervalle.

Reprenons sous la forme : $g'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t}.$

On a donc : $\dfrac{1}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \Rightarrow -\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+x)\right]_0^x$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{1+x}+1 \leq \ln(1+x) \Rightarrow \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \Rightarrow g(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x) \leq 0$

$$2)\ (a)\ f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Nous constatons que le numérateur n'est autre que la fonction $g(x)$ étudiée plus haut.

Nous savons que $g(x)\leq 0$ sur $]\,0,\infty\,[$ $\left(\text{note : } g(0)=0\right)$.

Nous en déduisons que $f(x)$ est décroissante sur $]\,0,\infty\,[$.

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2+4x}=-\frac{1}{2}.$$

Par conséquent : $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$

Une fonction est continue en $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Donc calculons : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

Or $f(0)=1$ donc la fonction $f$ est continue en 0.

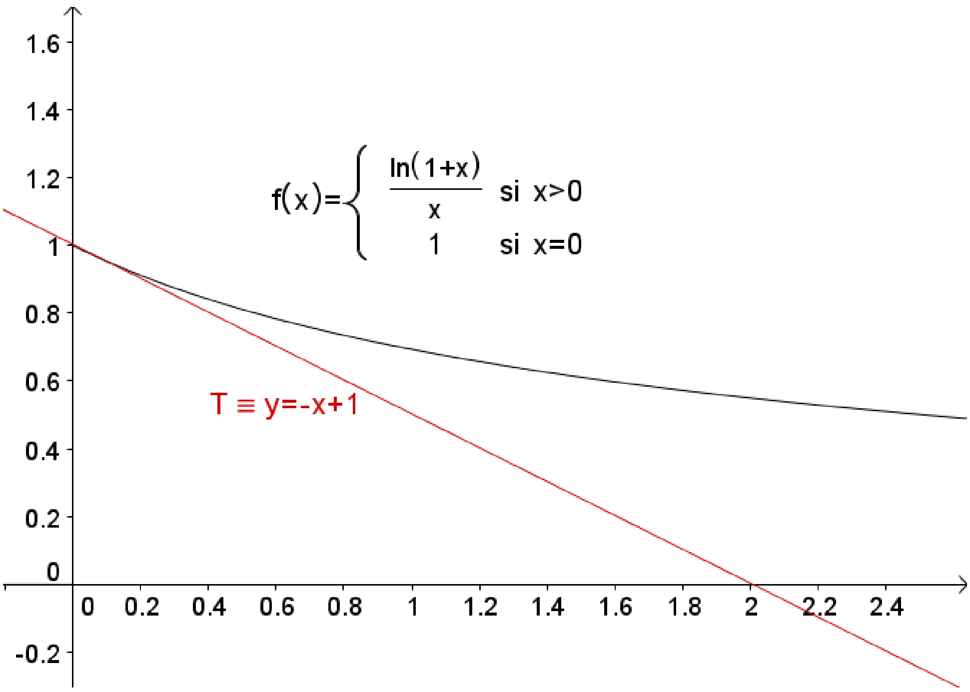
$(d)$ Equation de la tangente : $T\equiv y=-\dfrac{1}{2}x+1.$

Pour déterminer la position de $T$ par rapport à la courbe $C$, calculons la distance

$$d(C,T)=\frac{\ln(1+x)}{x}-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{\ln(1+x)-\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right)}{x}$$

Or nous avons démontré au point $1.(a)$ que $-\dfrac{1}{2}x^2+x\leq\ln(1+x)$

Donc pour $x>0$, $d(C,T)>0$ et la courbe $C$ est donc située au-dessus de $T$.

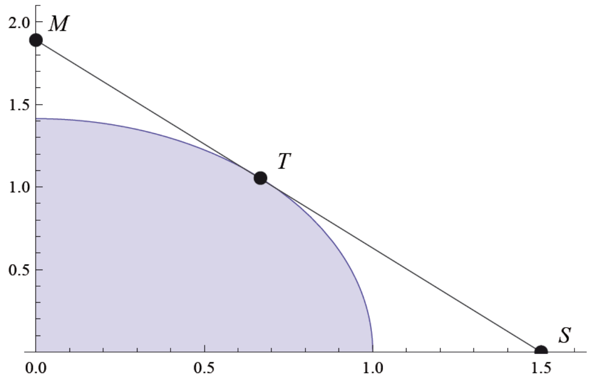



Le 20 septembre 2010

## EXANA282 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010, 2ème série.

Sur la figure ci-dessous, la zone grisée représente un bâtiment en forme de demi-dôme, et correspond à la surface comprise entre l'axe $Ox$, l'axe $Oy$ et le graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{2 - 2x^2}$$




Le segment $MS$ représente une échelle, qui doit nécessairement

1. prendre appui sur le sol (l'axe $Ox$) au point $S$,
2. prendre appui sur le mur vertical (l'axe $Oy$) au point $M$,
3. être tangente au bâtiment en un point $T$.

Quelle est la plus petite longueur possible pour une échelle remplissant les trois conditions ci-dessus ?

1. Soit $a$ l'abscisse inconnue du point de tangence $T$. Calculer l'ordonnnée de $T$ puis donner, en fonction de $a$, l'équation de la tangente au demi-dôme
2. En déduire les coordonnées des points $M$ et $S$ puis calculer, en fonction de $a$, le *carré* de la longueur de l'echelle $MS$.
3. Calculer le minimum du carré de la longueur de l'échelle et en déduire la longueur minimale possible pour l'échelle.

Les coordonnées de $T$ sont $\left(a, \sqrt{2-2a^2}\right)$

Le coefficient angulaire est donnée par : $y' = \dfrac{-4x}{2\sqrt{2-2x^2}} \rightarrow m = \dfrac{-2a}{\sqrt{2-2a^2}}$

L'équation de la tangente est : $t \equiv y - y_a = m\left(x - x_a\right)$

$$\Rightarrow t \equiv y = \frac{-2a}{\sqrt{2-2a^2}}\left(x-a\right) + \sqrt{2-2a^2} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}}\left(-ax+1\right)$$

On obtient alors facilement les coordonnées de $M$ et de $S$.

$$y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{a} \qquad \rightarrow M\left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}} \rightarrow S\left(0, \frac{2}{\sqrt{2-2a^2}}\right)$$

Et donc : $\quad | \, MS \, |^2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{4}{2-2a^2} = \dfrac{1-a^2+2a^2}{a^2\left(1-a^2\right)} = \dfrac{1+a^2}{a^2\left(1-a^2\right)}$

Pour minimiser cette longueur, il suffit d'annuler sa dérivée :

$$\frac{d}{da}| \, MS \, |^2 = \frac{2a^3\left(1-a^2\right) - \left(1+a^2\right)\left(2a-4a^3\right)}{a^4\left(1-a^2\right)^2} = \frac{\cancel{2a^2} - 2a^4 - 2 - \cancel{2a^2} + 4a^2 + 4a^4}{a^3\left(1-a^2\right)^2}$$

$$= \frac{2a^4 + 4a^2 - 2}{a^3\left(1-a^2\right)^2}$$

La dérivée est nulle si : $a^4 + 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = -1-\sqrt{2} & \text{A rejeter} \\ a^2 = -1+\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases}$

Il reste à calculer la longueur de l'échelle :

$$| \, MS \, |^2 = \frac{1+a^2}{a^2\left(1-a^2\right)} = \frac{1-1+\sqrt{2}}{\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(1+1-\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\sqrt{2}+2+2+\sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\sqrt{2}+4\right) = \frac{6}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Finalement : $\boxed{| \, MS \, | = \sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

16 juillet 2010

## EXANA283 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, groupe C.

1. Etudier la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ :

$$f(x)=\frac{x^3-9x}{x^2-1}$$

2. En déduire que l'équation $x^3-9x-m(x^2-1)=0$ où $m$ est un paramètre réel, a 3 solutions réelles quel que soit *m*.

---

**Solution proposée par Fabienne Zoetard**

1. <u>Etude de la fonction</u>

Dom $f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ de plus la fonction est impaire.

Zéros : $x^3-9x=0\to x(x^2-9)=0\to(x=0\cup x=-1\cup x=1)$

AV : $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3+9x}{x^2-1}=\dfrac{-8}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3+9x}{x^2-1}=\dfrac{-8}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}\to AV_2\equiv x=1 \text{ et par symétrie } S_0,\ AV_1\equiv x=-1$$

AH : Pas de AH car le degré du numérateur est plus grand que celui de dénominateur.

$\to\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$

AO : Par division euclidienne : $f(x)=x-\dfrac{8x}{x^2-1}$ (1)

Donc $f(x)$ se comporte comme $x$ en l'infini car $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x}{x^2-1}=0\to AO\equiv y=x$

Ou bien comme : $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9x}{x^3-x}=1$ et comme la fonction admet 0 comme centre de symétrie: $AO\equiv y=x$

Dérivée première :

A partir de $(1)$: $f'(x)=1-\dfrac{8(x^2-1)-8x.2x}{(x^2-1)^2}=1+\dfrac{8(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\geq0$

La dérivée première étant toujours positive la fonction est toujours croissante sur son domaine.

Dérivée seconde :

$$f''(x) = 8\frac{2x\left(x^2-1\right)^2 - \left(x^2+1\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2} = 8.2x.\left(x^2-1\right)\frac{x^2-1-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^4}$$

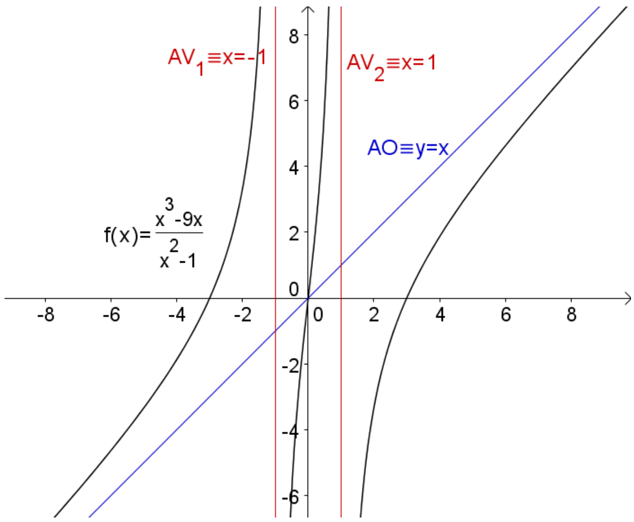
$$= -16x\frac{x^2+3}{\left(x^2-1\right)^3}$$

TS

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-16x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $x^2+3$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\left(x^2-1\right)^3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | / | $-$ | $0$ | $+$ | / | $-$ |

<u>Conclusion</u> :

| $x$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | / | $+$ | $+$ | $+$ | / | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | / | $-$ | $0$ | $+$ | / | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ $\cup$ | / $AV$ | $\nearrow$ $\cap$ | $\nearrow$ $I$ | $\nearrow$ $\cup$ | / $AV$ | $\nearrow$ $\cap$ |




2. Est-ce que $x^3 - 9x - m\left(x^2-1\right) = 0 \quad (2)$ a toujours 3 solutions?

Remarquons que ni $+1$ ni $-1$ ne sont solutions de cette équation donc, on peut écrire :

$$\frac{x^3-9x}{x^2-1} - m = 0 \rightarrow f(x) - m = 0 \rightarrow f(x) = m$$

Or la droite $y = m$ coupera le graphe de $f(x)$ quelque soit la valeur de $m$

## EXANA284 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

1) Calculer la dérivée de l'expression suivante par rapport à la variable $y$, $x$ étant une constante :

$$\sqrt{y\cos 3x}+x\tan\left(y^2\right)$$

2) Calculer la limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{t-\sin t}$$

3) Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$$

4) Le théorème des accroissements finis s'énonce comme suit :

Si $f$ est une fonction continue sur $\left[\, a,b\,\right]$ et dérivable sur $\left]\, a,b\,\right[$, alors il existe $c\in\left]\, a,b\,\right[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Utiliser ce résultat pour démontrer que

$$\left|\,\sin x-\sin y\,\right|\le\left|\,x-y\,\right| \text{ pour tout } x \text{ et } y\in\mathbb{R}$$

---

**Solution proposée par Nicole BERCKMANS**

1) $\frac{d}{dy}\left(\sqrt{y\cos 3x}+x\tan\left(y^2\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{y\cos 3x}}.\cos 3x+\frac{2xy}{\cos^2\left(y^2\right)}$

2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{3\sin t-\sin 3t}{t-\sin t}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{Hospital}\lim\limits_{t\to 0}\frac{3\cos t-3\cos 3t}{1-\cos t}$

$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to 0}\frac{-3\sin t+9\sin 3t}{\sin t}\xrightarrow{Hospital}\lim_{t\to 0}\frac{-3\cos t+27\cos t}{\cos t}=24$$

3) $I=\int_{-2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx$ On pose $x-1=3\sin t$, d'où $\begin{cases} dx=3\cos t\,dt \\ x=-2 \text{ donc } t=-\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{5}{2} \text{ donc } t=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

Ce qui donne $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/6}\frac{3\cos t\,dt}{3\cos t}=\left[\,t\,\right]_{-\pi/2}^{\pi/6}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$

4) Il suffit de considérer que la fonction est $f\left(z\right)=\sin z$

On a alors : $\sin x-\sin y=\left(x-y\right)\cos c$ or $\left|\cos c\right|\le 1$ et donc $\left|\sin x-\sin y\right|\le\left|x-y\right|$

## EXANA285 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x + |x| - 2x - 3$$

1) $a)$ La fonction $f$ est-elle continue en tout point de son domaine.
   Est-elle dérivable en tout point de son domaine? Justifier vos réponses.

   $b)$ Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$.
   Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote $D$, dont on précisera l'équation.

   $c)$ Etudier les variations de la fonction $f$.

   $d)$ Préciser la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à $D$, et construire la courbe $(\mathcal{C})$.

2) Soit $\alpha < 0$ un paramètre réel négatif.

   $a)$ Déterminer l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $D$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$, puis calculer la limite de $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$.

3) Soit $f_1$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [\,0, +\infty\,[$.

   $a)$ Démontrer que $f_1$ est une bijection de l'intervalle $I$ vers l'intervalle $J$, que l'on précisera.

   $b)$ On considère la fonction réciproque $f_1^{-1}$, définie sur le domaine $J$.
   Construire sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$.

   $c)$ La fonction $f_1^{-1}$ est-elle continue en tout point de son domaine $J$ ?
   Est-elle dérivable en tout point de son domaine $J$.

   $d)$ Démontrer que l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on encadrera par deux entiers consécutifs.

---

**Solution proposée par Nicole BERCKMANS**

1) $a$) La fonction $f$ peut se mettre sous la forme : $\begin{cases} f(x) = e^x - x - 3 \text{ si } 0 \le x \\ f(x) = e^x - 3x - 3 \text{ si } x \le 0 \end{cases}$

La fonction $f$ est continue sur tout son domaine. $(dom\ f = \mathbb{R})$

Elle n'est pas dérivable en $x = 0$ car $\begin{cases} f_D'(0) = 0 \\ f_G'(0) = -2 \end{cases}$

$b$) La fonction $f$ admet un AO à gauche: $AO \equiv y = -3x - 3$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-3x - 3) = 0$

Il n'y a pas d'asymptote en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

$c$) Si $x < 0$ : $f'(x) = e^x - 3 < 0$ et $f''(x) = e^x > 0$

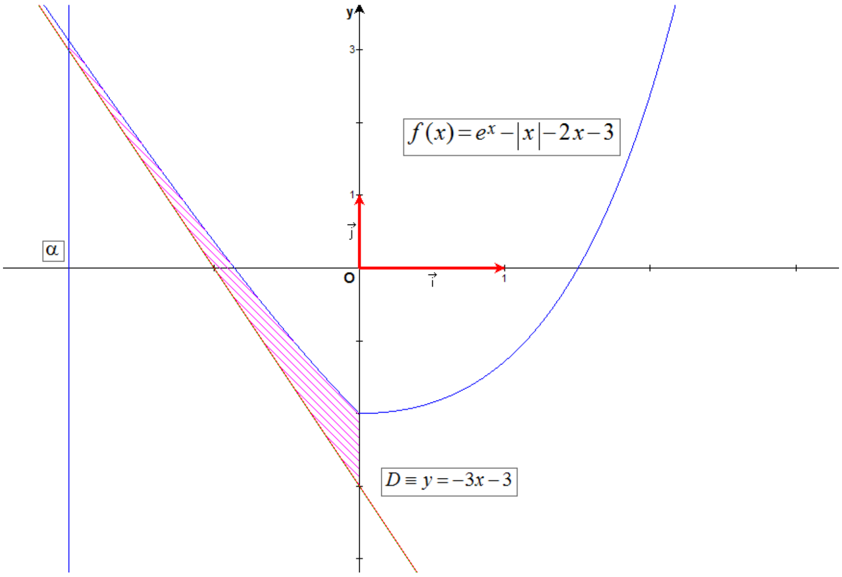
Si $x > 0$ : $f'(x) = e^x - 1 > 0$ et $f''(x) = e^x > 0$

Tableau des variations:

| | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $-2/0$ | $+$ |
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ $\cup$ | Point anguleux $(0, -2)$ | $\nearrow$ $\cup$ |

$d$) Pour $x \le 0$ : $f(x) - (-3x - 3) = e^x > 0$

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ est située au-dessus de l'asymptote $D \equiv y = -3x - 3$



2) $a)$ $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}\left(e^{x}-3x-3\right)-(-3x-3)\,dx=\left[\,e^{x}\,\right]_{\alpha}^{0}=1-e^{\alpha}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{\alpha}\right)=1$

3) $a)$ $f_1 : I=[\,0,\to[$ vers l'intervalle $J=[\,-2,\to[$

$f_1$ est injectif car $f_1^{'}(x)=e^{x}-1\geq 0$ (donc $f_1$ est strictement croissante).

$b)$ Voir graphe ci-dessous

$c)$ $f_1^{-1} : J\to I$ est continue mais non dérivable en $-2$ car $\left(f_1^{-1}\right)'(-2)=\left[\dfrac{1}{f_1^{'}(0)}\right]=\left[\dfrac{1}{0^{+}}\right]=+\infty$

$f_1^{-1}$ est dérivable sur $]\,-2,\to[$

$d)$ $f_1(x)=0$ admet une solution en vertu du théorème des valeurs intermédiaires car

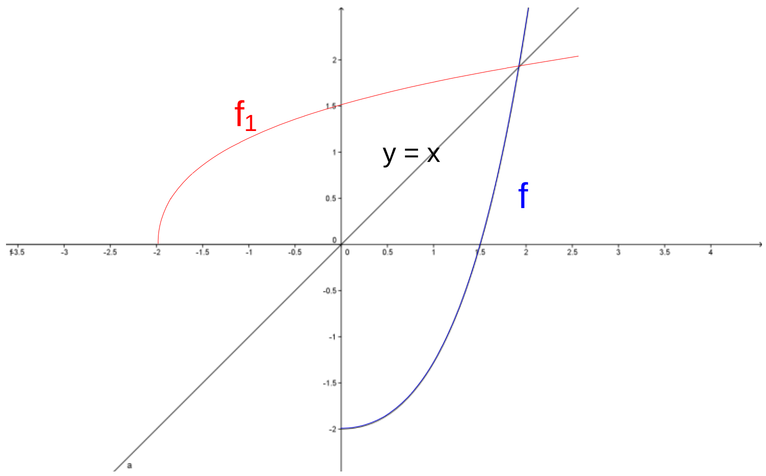
$f_1(0)=-2<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$

Encadrons la racine :

$f_1(0)=-2<f_1(1)=e-4<0<f_1(2)=e^{2}-5.$

En effet : $e^{2}-5>2.7^{2}-5=7.29-5>0$

La racine est donc située entre 1 et 2 : $1<x<2$



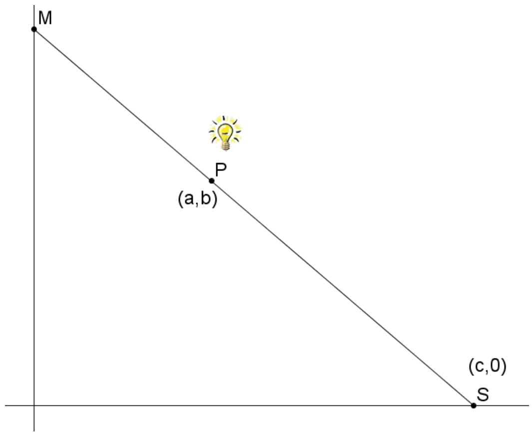
## EXANA286 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Sur la figure ci-dessous, le point $P$, situé un peu sous l'ampoule, a pour coordonnées $(a,b)$, où $a$ et $b$ sont deux paramètres. On souhaite changer l'ampoule et, pour cela, il est nécessaire d'installer une échelle.

$a$) s'appuyant sur le sol (représenté par l'axe $Ox$) au point $S$,

$b$) s'appuyant contre le mur verticale (l'axe $Oy$) au point $M$,

$c$) passant exactement par le point $P$.




Quelle est, en fonction des paramètres $a$ et $b$, la longueur de la plus petite échelle possible remplissant les trois conditions ci-dessus?

1) Soit $c$ l'abscisse inconnue du point de contact $S$ avec le sol. Calculer en fonction de $a, b$ et $c$ l'ordonnée du point de contact $M$ avec le mur, puis le *carré* de la longueur de l'échelle $MS$.

2) Calculer en fonction de $a$ et $b$ le minium du carré de la longueur de l'échelle en déduire la longueur de la plus petite échelle.

---

**Solution proposée par Nicole BERCKMANS**

1) $M\left(0,\dfrac{cb}{c-a}\right)$ et donc $MS^2=c^2+\dfrac{c^2b^2}{(c-a)^2}$

2) $\dfrac{d}{dc}\left(MS^2\right)=2c+\dfrac{2cb^2(c-a)^2-2(c-a)c^2b^2}{(c-a)^4}=2c\left(1+\dfrac{b^2c-b^2a-cb^2}{(c-a)^3}\right)=2c\dfrac{(c-a)^3-ab^2}{(c-a)^3}$

Cette dérivée s'annule en $c=0$ (à exclure) et pour $c_0=a+\sqrt[3]{ab^2}$

On note que le numérateur est négatif pour $c=a$ et positif pour $c\to+\infty$

Tableau des variations :

| | $a$ | | $c_0$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{d}{dc}\left(MS^2\right)$ | / | $-$ | 0 | + |
| $MS^2$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

On a donc bien un minimum pour $c=c_0$ et alors

$$MS^2=\left(a+\sqrt[3]{ab^2}\right)^2\left(1+\frac{b^2}{\left(ab^2\right)^{2/3}}\right)=\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^2.\frac{\sqrt[3]{a^2b}+b}{\sqrt[3]{a^2b}}$$

$$=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^2.\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right).\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}$$

Finalement : $\boxed{MS=\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)^{3/2}}$

8 septembre 2010

## EXANA287 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2010 Groupe D.

Déterminez et représentez graphiquement l'ensemble des points $(x, y)$ du plan, avec $y<0$, qui satisfont l'inéquation :

$$\frac{x(y-1)}{y-2}>1$$

---

**Solution proposée par Fabienne Zoetard**

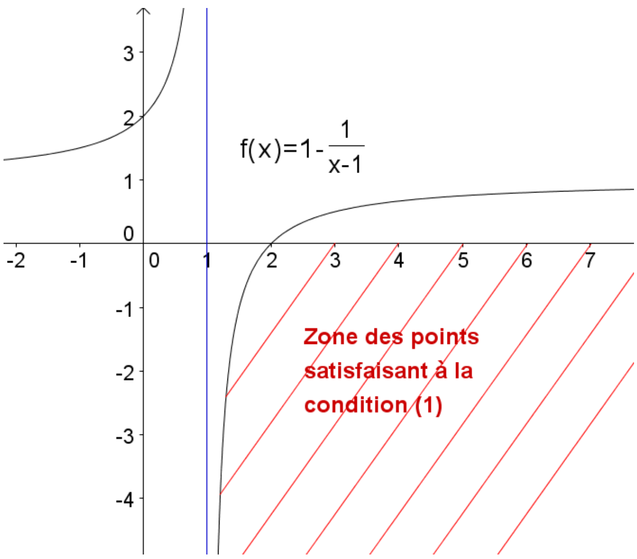
$y-2$ est toujours négatif, donc $\frac{x(y-1)}{y-2}>1 \Rightarrow x(y-1)<y-2 \Rightarrow y(x-1)<x-2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| si | $x=1$ | $y.0<-1$ | impossible |
| si | $x>1$ | $y<\frac{x-2}{x-1}$ | condition $(1)$ |
| si | $x>1$ | $y>\frac{x-2}{x-1}$ | condition $(2)$ |

Regardons le graphe de : $y=\frac{x-2}{x-1}$.

La zone qui satisfait à la condition $(1)$ est indiquée.

Il n'y a pas de zone qui satisfait à la condition $(2)$.




---

6 octobre 2010

# EXANA288 – Polytech, Umons, Mons, Juillet 2010 Groupe D.

On désire dessiner un sentier dans un parc dont le plan est représenté sur la figure ci-dessous.

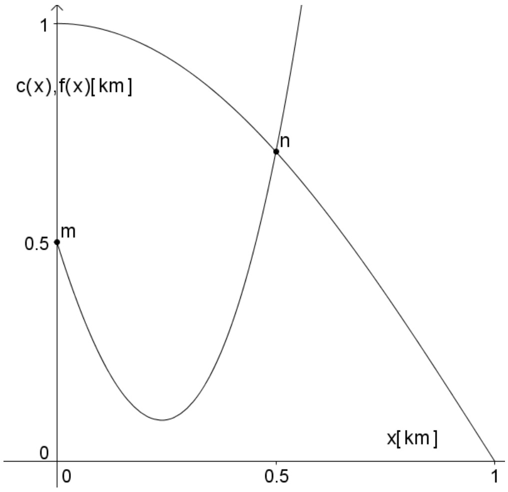
La surface du parc est délimitée par le trait gras. La courbe $c(x)$ est donnée par $\cos\frac{\pi}{2}$.

Souhaitant notamment que le sentier passe par les entrées représentées par les points $m$ et $n$ et qu'il divise la surface du parc en deux parties égales, le jardinier a opté pour la courbe $f(x)$ également dessinée sur la figure.

Sachant que :

$$f(x) = axe^{x} + bx + c$$

déterminez $a, b$ et $c$




**Solution proposée par Fabienne Zoetard**

Soient donc $\begin{cases} y = axe^x + bx + c & (1) \\ y = \cos\dfrac{\pi x}{2} & (2) \end{cases}$

$m \in$ courbe 1 $\quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad (1)$ s'écrit $y = axe^x + bx + \dfrac{1}{2}$

$n \in$ courbe 2 $\quad\Rightarrow\quad$ ordonnée de $n : \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Or $n \in$ aussi à la courbe 1, donc : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\dfrac{1}{2}\sqrt{e} + b\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad a\sqrt{e} + b = \sqrt{2} - 1 \quad (3)$

Exprimons l'égalité demandée entre les aires :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\pi x}{2}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$\frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \cancel{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(axe^x + bx + \frac{1}{2}\right)dx + \frac{\cancel{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

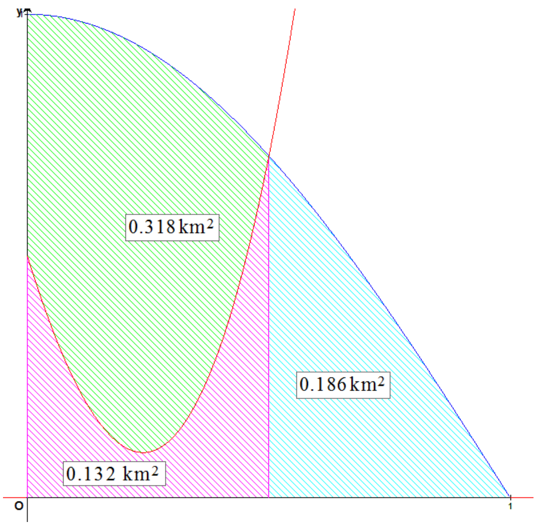
$$\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right) = a\left[xe^x - e^x\right]_0^{\frac{1}{2}} + b\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}[x]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a\left(\frac{1}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} - 0 + 1\right) + b\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) = a\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) + \frac{b}{8} + \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad a\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) + \frac{b}{8} = \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) - \frac{1}{4} \qquad (4)$$

Faisons $(3) - 8(4)$: $\quad a\left(-8 + 4\sqrt{e}\right) = \sqrt{2} - 1 - \dfrac{8}{\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 5.58042664 \\ b = -8.7863545 \end{array}}$

Donc la courbe 1 est : $\boxed{f(x) = 5.580.xe^x - 8,786x + \dfrac{1}{2}}$




6 octobre 2010

## EXANA289 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Soit $f$ la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \left(1 - e^{-x}\right)\left(7 - e^{-x}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer les zéros de $f$

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant les calculs.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

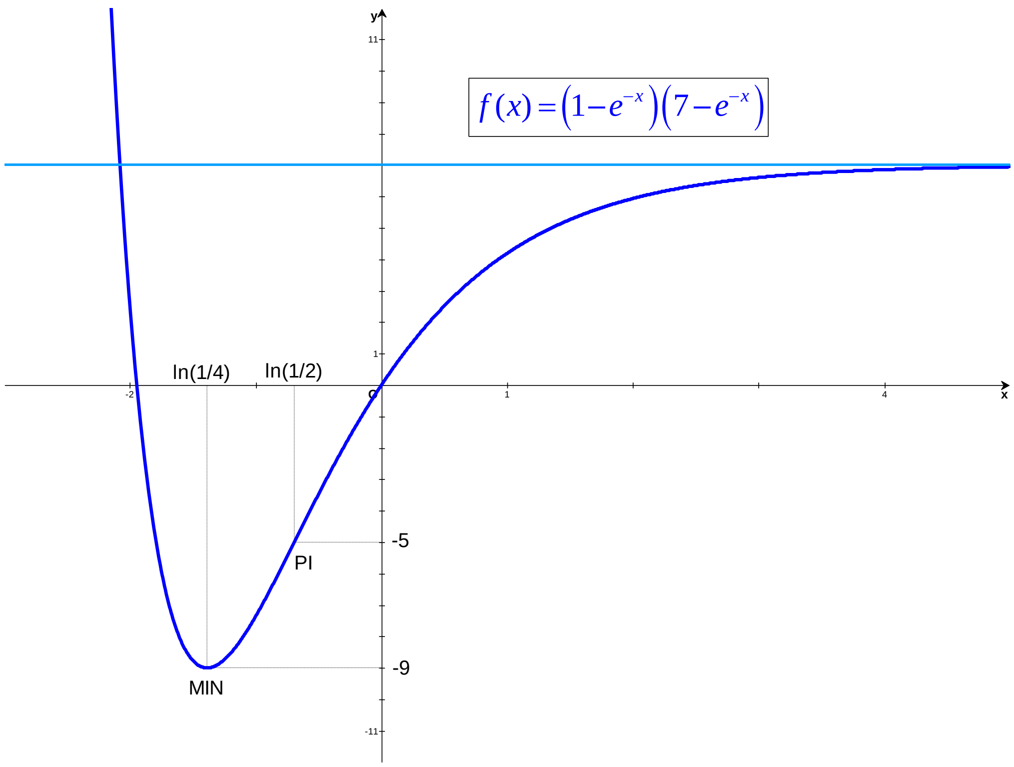
d) Trouver les éventuels extrema de $f$. Pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.

e) Trouver les éventuels points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (justifier).

f) En utilisant les approximations $\ln 2 \approx 0.7$ et $\ln 7 \approx 1.9$, tracer le graphe de $f$ dans un repère orthogonal en indiquant les unités sur les axes, les coordonnées exactes des points remarquables apparaissant dans les réponses a) à c) et les asymptotes éventuelles.

---

### Solution proposée par Steve Tumson



$f(x)=\left(1-e^{-x}\right)\left(7-e^{-x}\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$a)$ Racines : $\bullet\ e^{-x}=1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ $\qquad \bullet\ e^{-x}=7 \Leftrightarrow \boxed{x=-\ln 7}$

$b)$ Limites infinies :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\right)\left(\lim\limits_{x\to+\infty}7-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\right)=(1-0)(7-0)=7 \to$ Asymptote horizontale

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}1-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\right)\left(\lim\limits_{x\to-\infty}7-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}\right)=(1-\infty)(7-\infty)=\infty$

$c)$ Calculs des dérivées :

NB : Puisqu'il est plus facile de dériver une somme qu'un produit, distribuons $f(x)$

$f(x)=\left(1-e^{-x}\right)\left(7-e^{-x}\right)=e^{-2x}-8e^{-x}+7$

$\to \dfrac{df}{dx}=-2e^{-2x}+8e^{-x}=2e^{-x}\left(4-e^{-x}\right) \qquad \to \dfrac{d^2f}{dx^2}=4e^{-2x}-8e^{-x}=4e^{-x}\left(e^{-x}-2\right)$

$d)$ Extrema :

$\dfrac{df}{dx}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=4 \Leftrightarrow x=-\ln 4 \Leftrightarrow \boxed{x=-2\ln 2}$

On étudie la variation de $f$ : $\dfrac{df}{dx}=\underbrace{2e^{-x}}_{>0}\left(4-e^{-x}\right) \Rightarrow$

| | | $-2\ln 2$ | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $MIN$ | $\nearrow$ |

$e)$ Inflexion :

$\dfrac{d^2f}{dx^2}=0 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow \boxed{x=-\ln 2}$

Le tableau de variation final indique la présence d'un point d'inflexion :

| | | $-2\ln 2$ | | $-\ln 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\searrow$ | $MIN$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |
| | $\cup$ | $\cup$ | $\cup$ | $PI$ | $\cap$ |

$d)$ Courbe :