

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 29

EXANA290 – EXANA299

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson

Décembre 2010

EXANA290 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

Calculer en détaillant les calculs :

$$a) \int_1^e x^2 \ln x \, dx$$

$$b) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 + \sin^9 x) \, dx$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$a) F = \int x^2 \ln x \, dx \xrightarrow{\text{PARTIE}} \begin{cases} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{cases} \Rightarrow F = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

$$\rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C \Rightarrow \int_1^e x^2 \ln x dx = F(e) - F(1) = \boxed{\frac{1}{9}(2e^3 + 1)}$$

$$b) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (x^2 + \sin^9 x) \, dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^2 \, dx + \underbrace{\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin^9 x \, dx}_0 = 2 \int_0^{\pi/3} x^2 \, dx = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} \right)^3 = \boxed{\frac{2\pi^3}{81}}$$

En effet, l'intégration d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré en zéro donne un résultat nul (un petit dessin suffit à s'en convaincre intuitivement).

De même, pour une fonction paire, on peut doubler l'intégrale sur le demi-intervalle à partir de zéro.

**EXANA291 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2010.
EPL, UCL, LLN, juillet 2012, série 1.**

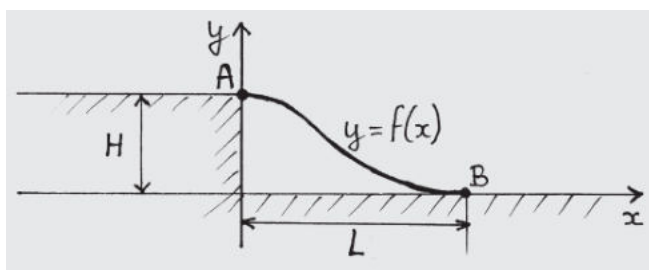
Enoncé EPB

On veut installer une rampe permettant à des chariots de franchir une marche de hauteur H
(Voir figure ci-dessous)

Pour éviter les secousses, on demande que le profil $y = f(x)$ de cette rampe (qui s'étend de A à B) ait une tangente horizontale aux points A et B .

Existe-t-il une fonction de type $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ satisfaisant à ces contraintes?

Si oui calculer les coefficients a, b, c et d en fonction de H et L .



Enoncé EPL

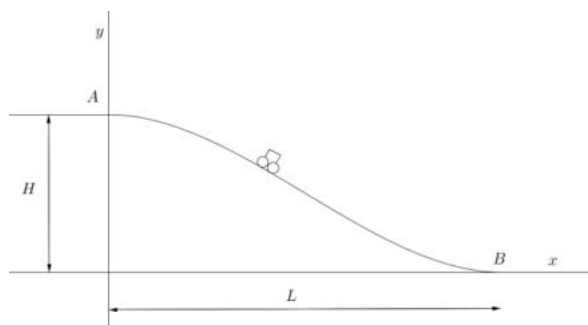
On désire concevoir une rampe qui permet à un chariot de descendre "en douceur" une marche de hauteur H sur une distance L . Pour cela, on veut que la rampe ait une pente horizontale aux points A et B .

1. Dans l'hypothèse où

$$f(x) = \sum_{n=0}^p a_n x^n$$

est un polynôme, quel est le degré minimal p de ce polynôme pour qu'il satisfasse aux différentes contraintes, i.e. qu'il passe par les points A et B et qu'il ait une pente horizontale en A et B .

2. Calculez les coefficients a_n de ce polynôme de degré minimal en fonction de H et L .



Solution proposée par Steve Tumson

Il suffit de réunir les conditions suivantes pour $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

$$\begin{cases} f(L) = 0 \\ f(0) = H \\ f'(0) = 0 \\ f'(L) = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc 4 équations (conditions) et 4 inconnues (a, b, c, d), si le système est soluble, il existera bien une telle fonction f répondant aux conditions.

$$\begin{cases} f(L) = aL^3 + bL^2 + cL + d = 0 \\ f(0) = d = H \\ f'(0) = c = 0 \\ f'(L) = 3aL^2 + 2bL + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aL^3 + bL^2 + H = 0 \\ 3aL^2 + 2bL = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2H}{L^3} \\ b = -\frac{3H}{L^2} \end{cases}$$

La fonction répondant aux critères est donc :

$$f(x) = \frac{2H}{L^3} x^3 - \frac{3H}{L^2} x^2 + H$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. Puisqu'il y a 4 conditions (contraintes) : $f(0) = H$, $f(L) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(L) = 0$ le polynôme est de degré 3.

2. $f'(x)$ est de degré 2 et possède les racines 0 et L .

$$f'(x) = ax(x-L); f(x) = \frac{ax^3}{3} - \frac{aLx^2}{2} + K$$

$$f(0) = H \Rightarrow K = H$$

$$f(L) = 0 \Rightarrow \frac{aL^3}{3} - \frac{aL^3}{2} + H = 0; \text{ d'où } a = \frac{6H}{L^3}$$

$$\text{Conclusion : } f(x) = 2\frac{H}{L^3}x^3 - 3\frac{H}{L^2}x^2 + H$$

$$a_3 = 2\frac{H}{L^3}, a_2 = -3\frac{H}{L^2}, a_1 = 0, a_0 = H$$

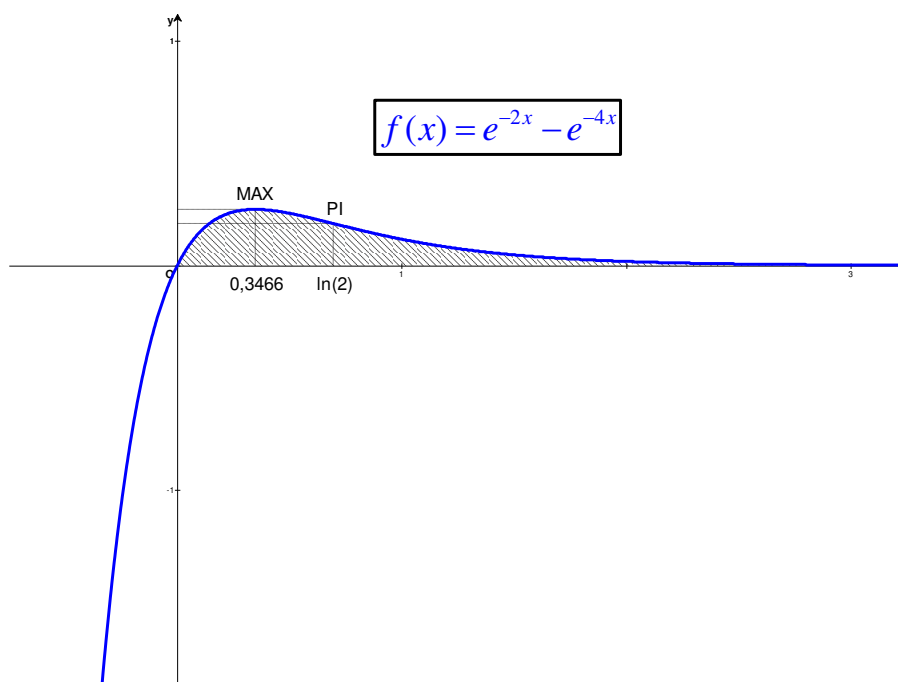
EXANA292 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = e^{-2x} - e^{-4x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ en détaillant les calculs.
- Déterminer les asymptotes éventuelles de f . (justifier)
- Déterminer les zéros éventuels de f .
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
- Déterminer les éventuels extrema de f . pour chacun d'eux, préciser sa nature et justifier.
- Déterminer les éventuels points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$
- En utilisant l'approximation $\ln 2 \approx 0.69$, tracer le graphe de f dans un repère orthonormé, en indiquant les coordonnées exactes des points remarquables rencontrés de b) à f) et les asymptotes éventuelles.
- En prenant comme unité d'aire l'aire du rectangle défini par $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, calculer l'aire $A(k)$ de la région comprise entre le graphe de f et l'axe Ox pour x entre 0 et k , puis calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A(k)$

Solution proposée par Steve Tumson



a) Limites infinies :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \right) = 0(1-0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \right) = -\infty$$

b) Asymptotes :

Le domaine de fonction suggère l'absence d'asymptote verticale.

Les calculs précédents indiquent une asymptote horizontale $\equiv y = 0$.

c) Zéro : $e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

d) Calculs des dérivées :

$$\rightarrow \frac{df}{dx} = -2e^{-2x} + 4e^{-4x} = 2e^{-2x}(2e^{-2x} - 1) \quad \rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 4e^{-2x} - 16e^{-4x} = 4e^{-2x}(1 - 4e^{-2x})$$

e) Extrema :

$$\frac{df}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\ln 2}{2}}$$

On étudie la variation de f : $\frac{df}{dx} = \underbrace{2e^{-2x}}_{>0} (2e^{-2x} - 1) \Rightarrow$

f'	+	0	-
f	\nearrow	MAX	\searrow

f) Inflexion :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 2}$$

Le tableau de variation final indique la présence d'un point d'inflexion :

	$\frac{\ln 2}{2}$	$\ln 2$			
f'	+	0	-	-	-
f''	-	-	-	0	+
f	\nearrow	MAX	\searrow	\searrow	\searrow
	\cup	\cap	\cap	PI	\cup

$$h) F(x) = \int f(x) dx = \frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C \Rightarrow A(k) = \int_0^k f(x) dx = F(k) - F(0) = \frac{1}{4}e^{-4k} - \frac{1}{2}e^{-2k} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A(k) = \frac{1}{4} \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-4k}}_0 - \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-2k}}_0 + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{4} \text{ d'unité d'aire}}$$

g) Courbe :

EXANA293 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Calculer en détaillant les calculs :

$$\text{a) } \int_0^{\sqrt{2\pi}} x \sin(x^2) dx$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 x^4 \cdot |x^5| dx$$

$$\text{a) } F(x) = \int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) d(x^2) = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + C$$

$$\rightarrow \int_0^{\sqrt{2\pi}} x \sin(x^2) dx = F(\sqrt{2\pi}) - F(0) = -\frac{1}{2} \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cos(0) = \boxed{0}$$

$$\text{b) } I = \int_{-1}^1 x^4 |x^5| dx = 2 \int_0^1 x^4 |x^5| dx \quad \text{Puisque l'expression } x^4 |x^5| \text{ est paire}$$

$$\rightarrow I = 2 \int_0^1 x^4 x^5 dx \quad |x^5| = x^5 \text{ car nous intégrons maintenant sur } x \geq 0$$

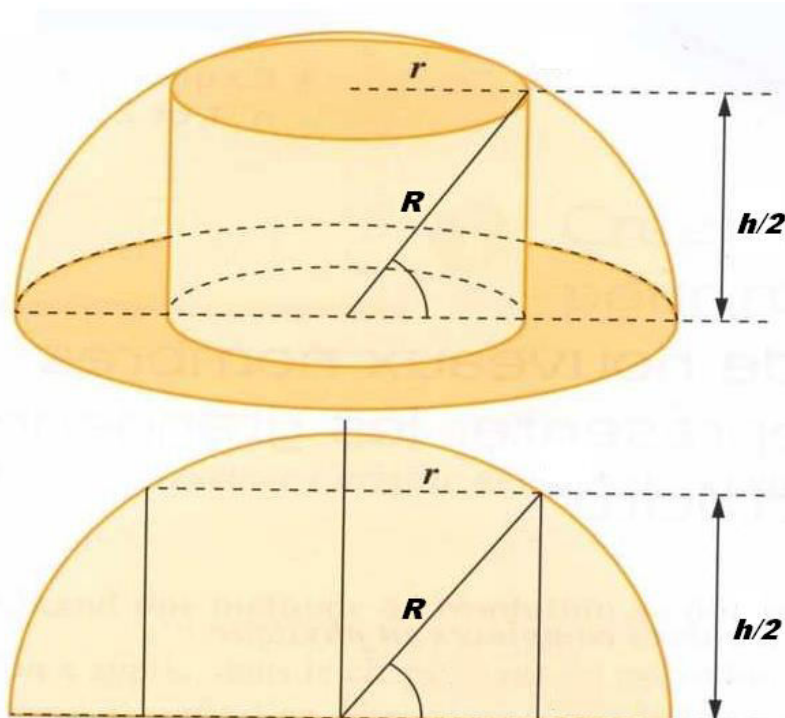
$$\rightarrow I = 2 \int_0^1 x^9 dx = 2 \left[\frac{x^{10}}{10} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Janvier 2011

EXANA294 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Quelle est la hauteur du cylindre de volume maximum inscrit dans une sphère de rayon R donné? Que vaut le rapport entre le volume de la sphère et celui de ce cylindre?

Solution proposée par Steve Tumson



Il suffit d'exprimer r en fonction de h :

$$V_{cyl} = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$$

$$V_{cyl} \text{ max} \Rightarrow \frac{dV_{cyl}}{dh} (h = h_{\max}) = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h_{\max}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{2R}{\sqrt{3}}}$$

Est-ce bien un maximum ? Oui car $\frac{d^2V_{cyl}}{dh^2} (h = h_{\max}) = -\frac{3\pi}{2} h_{\max} < 0$.

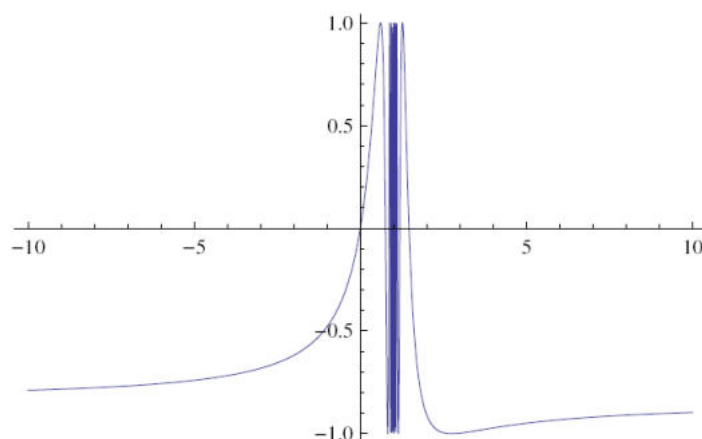
$$V_{cyl} \text{ max} = \frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{V_{sph}}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow V_{cyl} = \frac{V_{sph}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{sph}}{V_{cyl}} = \sqrt{3}}$$

EXANA295 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

On considère la fonction

$$f(x) = \sin \frac{x}{1-x}$$

En utilisant une calculatrice graphique, on obtient la représentation ci-contre



- i Étudiez le graphe de la fonction $g(x) = \frac{x}{1-x}$
 - déterminer le domaine de définition,
 - déterminer les asymptotes éventuelles,
 - étudiez la croissance/décroissance et déterminer les extrema éventuels,
 - esquissez le graphique
- ii Déterminez le domaine de définition de f . Justifier.
- iii Déterminer l'ensemble des valeurs de f . Justifier.
- iv Préciser le comportement de f au voisinage de $x = 1$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?
- v Déterminer les asymptotes éventuelles du graphe de f .
- vi Calculer $f'(x)$
- vii Déterminer tous les extrema locaux en précisant la nature de ceux-ci ainsi que les abscisses et les ordonnées correspondantes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i Etudions la fonction $g(x) = \frac{x}{1-x}$

– La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

– D'une part, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x}{1-x} = \mp \infty$$

Ce qui se traduit par l'existence de l'asymptote verticale $x = 1$

D'autre part, on calcule également

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1$$

et la fonction possède donc l'asymptote horizontale $y = -1$ en $\pm\infty$. Puisque

$$\frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

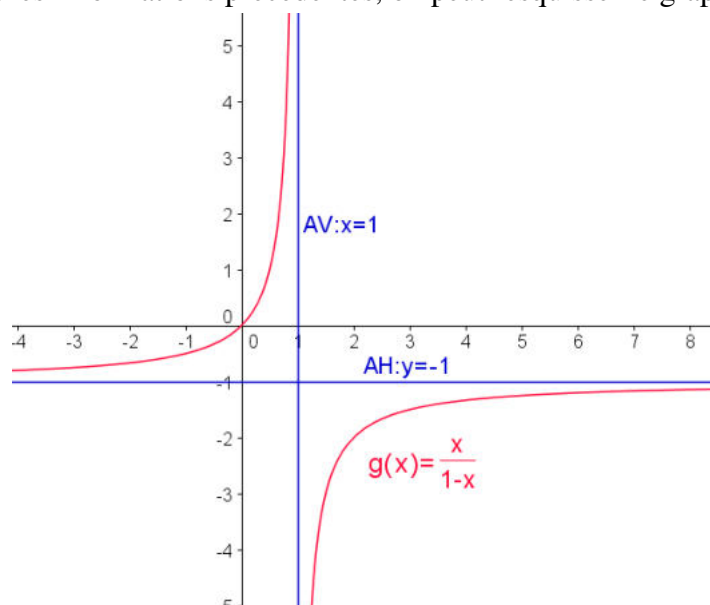
cette asymptote est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$.

– Pour identifier d'éventuels extrema, on calcule

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \forall x \neq 1$$

La fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition et il n'existe pas d'extremum.

– En utilisant les informations précédentes, on peut esquisser le graphique de la fonction g



ii La fonction $g(x) = \frac{x}{1-x}$ étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et la fonction sinus étant définie sur \mathbb{R} , la fonction $f(x) = \sin \frac{x}{1-x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

iii Comme le montre le graphique la fonction f prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$. C'est évidemment une conséquence du fait que la fonction sinus prend ses valeurs dans cet intervalle. Cependant, pour que les valeurs de f couvrent tout l'intervalle $[-1, 1]$, il faut aussi que $g(x)$, l'argument de la fonction sinus, varie "suffisamment". C'est le cas puisque, en observant le graphique de g , on constate que cette fonction prend toutes les valeurs réelles sauf en -1 . En particulier, l'ensemble des valeurs de g inclut l'intervalle $[0, 2\pi]$, soit une période complète de la fonction sinus.

L'ensemble des valeurs de la fonction f est donc l'intervalle $[-1, 1]$.

iv Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x}{1-x} = \mp\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \sin \frac{x}{1-x} = \lim_{u \rightarrow \mp\infty} \sin u$

et cette dernière limite n'existe pas, vu la périodicité de la fonction sinus.

Au voisinage de 1, la fonction f oscille donc, comme la fonction sinus, entre les valeurs $+1$ et -1 , ce qui correspond bien au comportement présenté sur le graphe de f .

v Il résulte de ce qui précède que la fonction f ne présente pas d'asymptote verticale en $x = 1$. Au vu du domaine de f , seule la recherche d'asymptote(s) horizontale(s) ou oblique(s) au voisinage de l'infini s'impose encore.

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin \frac{x}{1-x} = \lim_{u \rightarrow -1} \sin u = \sin(-1) = -\sin 1$

Dès lors, le graphe de f possède une asymptote horizontale d'équation $y = -\sin 1$

en $+\infty$ et $-\infty$. Puisque $\frac{x}{1-x} > -1$ au voisinage de $-\infty$ et que la fonction sinus est croissante au voisinage de -1 , on a aussi $f(x) > -1$ et l'asymptote horizontale est approchée par valeurs supérieures au voisinage de $-\infty$. A l'inverse, le graphe de f est situé sous l'asymptote au voisinage de $+\infty$

vi Pour tout $x \neq 1$, il vient

$$f'(x) = \left(\sin \frac{x}{1-x} \right)' = \cos \frac{x}{1-x} \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \cos \frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

vii Les zéros de f' sont ceux de la fonction $\cos \frac{x}{1-x}$, soit les solutions x de l'équation

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cette équation possède une infinité de solutions

$$x_k = \frac{(1+2k)\pi}{2+(1+2k)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La fonction cosinus changeant de signe chaque fois qu'elle s'annule, ces solutions correspondent toutes à des extrema locaux de f , avec une alternance minimum/maximum, comme le confirme le calcul de f en ces points :

$$f(x_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos k\pi = (-1)^k$$

Plus précisément, la fonction f possède une infinité de maxima locaux aux abscisses x_k pour lesquelles k est pair, soit, en posant $k = 2l$, en

$$x_{2l} = \frac{(1+4l)\pi}{2+(1+4l)\pi}, l \in \mathbb{Z} \quad \text{où} \quad f(x_{2l}) = 1$$

De même, la fonction f possède une infinité de minima locaux aux abscisses x_k pour lesquelles k est impair, soit, en posant $k = 2l+1$, en

$$x_{2l+1} = \frac{(3+4l)\pi}{2+(3+4l)\pi}, l \in \mathbb{Z} \quad \text{où} \quad f(x_{2l+1}) = -1$$

EXANA296 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

- i Calculer I_0
- ii Calculer I_1
- iii Etablissez une relation de récurrence du type $I_n = nI_{n-1} - \alpha$ (valable pour tout n entier ≥ 1) où α désigne une constante à déterminer.
- iv Sans calculer explicitement les intégrales, montrez, en effectuant un changement de variable, que l'intégrale

$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

est égale à I_n pour une valeur de β à déterminer.

- v Montrer que $I_n \leq \frac{1}{1+n}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i Pour $n = 0$, il vient :
$$I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

ii Pour $n = 1$, on a
$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

qui peut être évaluée en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x) g'(x) = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

En posant

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Il vient

$$I_1 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 1 - \frac{2}{e}$$

iii La relation de récurrence recherchée peut être obtenue en intégrant par partie l'expression

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

En posant

$$\begin{cases} f(x) = x^n \\ g'(x) = e^{-x} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} f'(x) = nx^{n-1} \\ g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

il vient, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-x^n e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 nx^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

qui est la forme annoncée avec $\alpha = \frac{1}{e}$

iv Dans l'expression $\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

Introduisons le changement de variable : $\ln x = t$ soit $x = e^t$

En tenant compte de $\frac{dx}{x} = t$ ou $dx = e^t dt$

on a $\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \int_0^{\ln \beta} \frac{t^n}{e^{2t}} e^t dt = \int_0^{\ln \beta} t^n e^{-t} dt$

Si $\beta = e$, il vient donc, en remplaçant la variable d'intégration t par x

$$\int_1^\beta \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = I_n$$

EXANA297 – ERM, 2005, série 1

Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes représentation graphique.)

1) $Dom f = \leftarrow, -1[\cup [0, \rightarrow$

2) Zéro : $x = 0$

3) AV $\equiv x = -1$

AO à droite $\equiv y = x$

AO à gauche $\equiv y = -x$

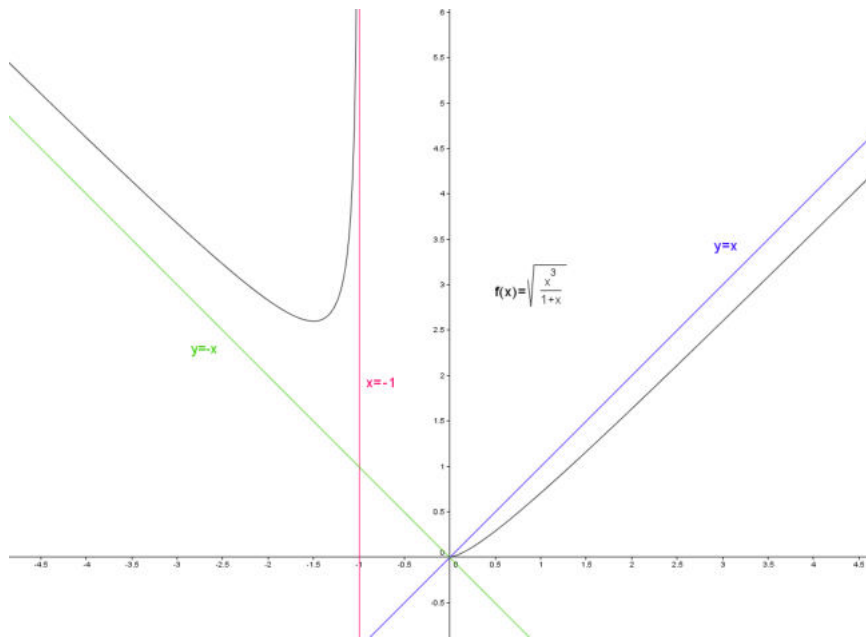
4) $f'(x) = \frac{x + \frac{3}{2}}{x(x+1)} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$

TS :

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
$\sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$	+	+	+	+	\therefore \therefore 0 + +
$x + \frac{3}{2}$	-	-	0	+	+
$x(x+1)$	+	+	+	+	0 \therefore 0 + +
$f'(x)$	-	-	0	+	\therefore \therefore 0 + +
$f(x)$	\searrow	\searrow	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{27}}{2}\right)$	\nearrow	AV \equiv $x = -1$ \nearrow \nearrow \nearrow

5) $f''(x) = \frac{3}{4x^2(x+1)^2} \sqrt{\frac{x^3}{1+x}}$

La dérivée seconde est toujours positive sur le domaine de f . Elle est donc de concavité positive. Il n'y a pas de point d'inflexion.



6 octobre 2010

EXANA298 – ERM, 2005, série 1.

Calculer :

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\sin x + 4\cos x + 5} dx$$

$$\text{b) } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x}$$

Remarque : on admet que $\ln 3 = 1.1$ et que $\ln 5 = 1.6$

$$\text{(a) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5\sin x + 4\cos x + 5}$$

$$\text{On pose : } x = 2 \arctan t \Rightarrow \begin{cases} t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{5 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2 + 10t + 9} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+9)(t+1)}$$

On décompose en fractions rationnelles :

$$\frac{1}{(t+9)(t+1)} = \frac{A}{t+9} + \frac{B}{t+1} \Rightarrow 1 = A(t+1) + B(t+9) \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \rightarrow B = \frac{1}{4} \\ t = -9 \rightarrow A = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \left[-\int_0^1 \frac{1}{t+9} + \frac{1}{t+1} dx \right] = \frac{1}{4} \left[-\ln(t+9) + \ln(t+1) \right]_0^1 = \frac{1}{4} (-\ln 10 + \ln 9 + \ln 2) = \boxed{\frac{1}{4} \ln \frac{9}{5}}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - 2x}{e^x + e^{-x} - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{=1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \ln(1+x) - x - 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - 1 - 4x}{e^x - e^{-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - 4x}{e^x - e^{-x}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 4}{e^x + e^x} = \boxed{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

22 avril 2011

EXANA299 – ERM, 2006, Série 3.

Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{\ln(2x)}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, représentation graphique). Remarque : $e \approx 2.7$.

1) $Dom f = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2) Zéro : Pas de zéro

3) $AV \equiv x = \frac{1}{2}$

$AH \equiv y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln 2x} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}} = 1$$

4) $f'(x) = \frac{\ln 2}{x \cdot \ln^2(2x)}$

La dérivée première est toujours positive. Donc f est toujours croissante sur le domaine.

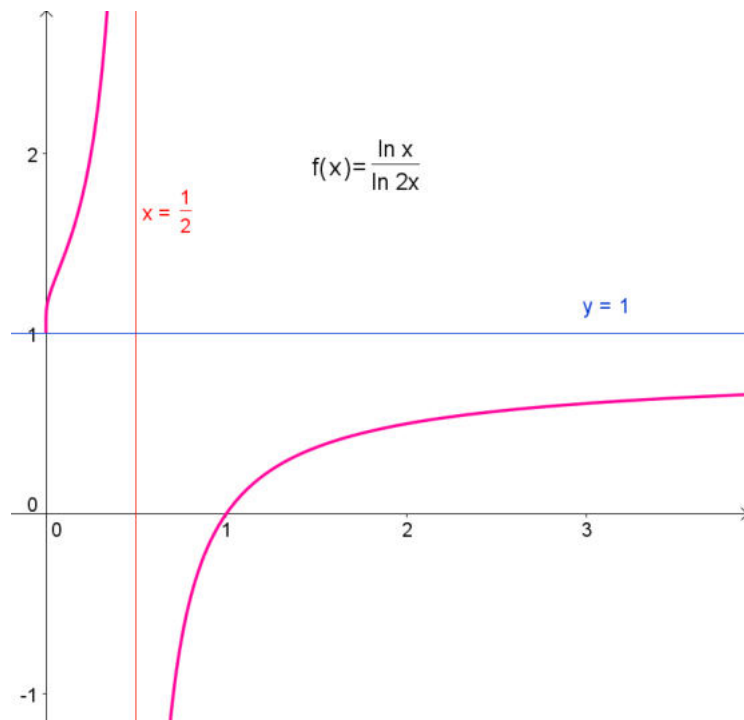
Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$, la tangente à f est verticale en $x = 0$

5) $f''(x) = -\frac{\ln 2}{x^2} \cdot \frac{\ln 2x + 2}{\ln^3(2x)}$

TS :

	0	$1/2e^2$	$1/2$	$+\infty$
$-(\ln 2x + 2)$	$\therefore +$	0	-	-2
$\ln^2(2x)$	$\therefore -$	-	-	0
$f''(x)$	-	0	+	$\therefore -$
$f(x)$	\cap	I	\cup	\cap

Il a un point d'inflexion. $I : \left(\frac{1}{2}, \frac{2 + \ln 2}{2} \right)$



Aout 09