

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 3

EXANA030 – EXANA039

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

EXANA030 – Compléments.

Démontrer par dérivée logarithmique que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = e \end{aligned}$$

EXANA031 – Exemple.

Calculer

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 - 3t)^{-\frac{2}{t}}$$

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 3t)^{-\frac{2}{t}} &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{t}\right) \ln(1-3t)} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2 \frac{1}{1-3t} (-3)}{1}} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{6}{1-3t}} = \boxed{e^6} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\text{Soit } -3t = \frac{1}{y} \quad t \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{6y} = \boxed{e^6}$$

EXANA032 – Exemple.

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x+2}$$

Méthode 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{-x+2} &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (-x+2) \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x-2}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{(2-x)^2} (-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2-x)^2}{x^2}} = \boxed{e^{-2}} \end{aligned}$$

Méthode 2:

$$\text{Soit } t = \frac{x}{2} \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2} = \boxed{e^{-2}}$$

EXANA033 – Exemple.

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

Méthode 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x}}} = \boxed{e^{-1}} \end{aligned}$$

Méthode 2:

$$\text{Soit } t = -\frac{1}{x} \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \boxed{e^{-1}}$$

**EXANA034 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types
2000-2001.**

Calculer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}}$$

Soit L la limite

A) $a > 0$ Indétermination de type $\frac{0-0}{0-0}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(a\sqrt{ax} - x^2)(a + \sqrt{ax})}{a^2 - ax} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^2\sqrt{ax} - ax^2 + a^2x - x^2\sqrt{ax}}{a^2 - ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax}(a^2 - x^2) - ax(x-a)}{a(a-x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax}(a+x) + ax}{a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a(2a) + a^2}{a} = 3a \end{aligned}$$

B) $a < 0$ Pas d'indétermination

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-a^2 - a^2}{a + a} = -a$$

Corrigé le 3 avril 2006 (Sabine Bouzette)

**EXANA035 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types
2000-2001.**

Calculer

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

$$\text{On a : } \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}$$

$$\text{Soit } y = -\frac{4}{x+3} \Rightarrow x = -\frac{4}{y} - 3$$

$$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{4}{y}-3+2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}} \right]^{-4} \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-1}$$

$$= \boxed{e^{-4}}$$

EXANA036 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001

Un commerçant désire réaliser un emballage sans couvercle (avec fond) ayant la forme d'un cylindre droit à base elliptique. Les designers lui conseillent d'utiliser une base elliptique décrite par

$$4x^2 + y^2 \leq a^2$$

où $a > 0$ est un paramètre à déterminer. Soit h la hauteur du cylindre droit.

a) Exprimer la surface S de la base elliptique sous forme d'une intégrale et montrer

$$\text{qu'elle vaut : } \frac{1}{2} \pi a^2$$

b) Déterminer les paramètres a et h correspondant à l'emballage de volume

V fixé présentant la surface extérieure (surface latérale + fond) minimale.

Justifier que le minimum obtenu est absolu.

Le périmètre de la base elliptique est donné par

$$P = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \theta} d\theta = 4\alpha \pi^2 a$$

où α est approximativement égal à 0.49

a) La surface cherchée est égale à 4 fois la surface engendrée par $y = \sqrt{a^2 - 4x^2}$

Donc,

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{a^2 - 4x^2} dx = a \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2} dx \quad (1)$$

$$\text{Posons } t = \frac{2x}{a} \Rightarrow x = \frac{at}{2} \Rightarrow dx = \frac{a}{2} dt$$

$$\text{avec } x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = 1 \quad \text{et } x = 0 \Rightarrow t = 0$$

(1) devient:

$$\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt \quad (2)$$

$$\text{Posons } t = \sin \theta \Rightarrow dt = \cos \theta d\theta$$

$$\text{avec } t = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{et } t = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

(2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{S}{4} &= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \cos^2 \theta d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \left[\int_0^1 \cos 2\theta d\theta + \int_0^1 d\theta \right] = \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{2} \int_0^1 \cos 2\theta d2\theta + \int_0^1 d\theta \right] \\ &= \frac{a^2}{4} \left[\sin 2\theta + \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{8} \Rightarrow \boxed{S = \frac{a^2 \pi}{2}} \end{aligned}$$

b) Surface latérale = $4\alpha\pi^2ah$

$$\text{Surface du fond} = \frac{a^2\pi}{2}$$

$$\text{Surface totale } S_t = 4\alpha\pi^2ah + \frac{a^2\pi}{2}$$

$$\text{Volume: } V = \frac{a^2\pi h}{2} \Rightarrow h = \frac{2V}{a^2\pi}$$

$$\text{Donc, } S_t = \frac{8\alpha\pi V}{a} + \frac{a^2\pi}{2}$$

La surface minimale sera donnée par :

$$\frac{dS_t}{da} = -\frac{8\alpha\pi V}{a^2} + a\pi = 0 \Rightarrow a = 2\sqrt[3]{\alpha V}$$

$$\text{Et finalement: } h = \frac{2V}{\pi 4\sqrt[3]{\alpha^2 V^2}} \Rightarrow h = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{V}{\alpha^2}}$$

Il s'agit bien d'un minimum absolu puisque :

- si $a < 2\sqrt[3]{\alpha V} \Rightarrow \frac{dS_t}{da} = \pi \frac{a^3 - 8\alpha V}{a^2} < 0$
- si $a > 2\sqrt[3]{\alpha V} \Rightarrow \frac{dS_t}{da} = \pi \frac{a^3 - 8\alpha V}{a^2} > 0$

EXANA037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001

Déterminer les limites suivantes en discutant les cas où le paramètre α est négatif, nul, positif :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$a) F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$1) \alpha = 0 \rightarrow F(x) = 0$$

$$2) \alpha > 0$$

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = (+\infty) \cdot \alpha = +\infty$$

$$3) \alpha < 0$$

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x}$$

$$\text{Posons } y = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \alpha \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{\alpha y} = \alpha \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\alpha y + \ln y} = \alpha e^{\lim_{y \rightarrow +\infty} (\alpha y + \ln y)} = \alpha e^{\lim_{y \rightarrow +\infty} \alpha y \left(1 + \frac{\ln y}{\alpha y}\right)} \\ &= \alpha \cdot e^{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$b) F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$1) \alpha = 0 \Rightarrow F(x) = 0$$

$$2) \alpha > 0$$

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x}$$

$$\text{Posons } y = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow 0^- \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

$$F(x) = \alpha \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^{\alpha y} = \alpha \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{\alpha y + \ln y} = \alpha e^{\lim_{y \rightarrow -\infty} (\alpha y + \ln y)} = \alpha e^{\lim_{y \rightarrow -\infty} \alpha y \left(1 + \frac{\ln y}{\alpha y}\right)} \\ = \alpha \cdot e^{-\infty} = 0$$

$$3) \alpha < 0$$

De la limite précédente, on déduit :

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \alpha \cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$$c) F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

On constate que les limites à gauche et à droite pour $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$ sont différentes. Il n'y a donc pas de limites pour $x \rightarrow 0$.

Pour $\alpha = 0$, $F(x) = 0$.

$$d) F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{e^{\ln x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{\alpha}{x} - \ln x^2\right)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \alpha x \\ = e^{0-\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \alpha x = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha < 0$$

Pour $\alpha = 0$, $F(x) = 0$

$$e) F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2}$$

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \sin \alpha x}{e^{\ln x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{\alpha}{x} - \ln x^2\right)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \alpha x \\ = e^{0-\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \alpha x = 0 \quad \text{pour } \alpha > 0 \text{ et } \alpha < 0$$

Pour $\alpha = 0$, $F(x) = 0$

EXANA038 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001

Étudier la fonction :

$$f(x) = \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} \quad a \in \mathbb{R}_0 \ (a \neq 0)$$

en discutant, s'il y a lieu, en fonction des valeurs du paramètre a .

En particulier, déterminer :

- Le domaine de définition de f .
- Le domaine de continuité de f .
- Les asymptotes éventuelles.
- Croissance, décroissance, extrema.
- Concavité, point d'inflexion.

Esquisser le graphe de f .

a) Une fonction est définie en α , si $f(\alpha)$ est un réel.

Le domaine de définition de $f(x)$ est donc $\text{dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$

b) Une fonction est continue en α , si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = \pm\infty$ le domaine de continuité est

$\text{dom}_C f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$

c) AV

Comme $\lim_{x \rightarrow \pm a} f(x) = \pm\infty$, on a deux AV : $y = a$ et $y = -a$

AO

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{ax(x^2 - a^2)} = \frac{1}{a}$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} - \frac{x}{a} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + a^2x}{a(x^2 - a^2)} \right) = 0$$

$$\rightarrow \text{AO} \equiv y = \frac{x}{a}$$

c) Dérivée première :

$$\left(\frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} \right)' = \frac{3x^2 a(x^2 - a^2) - x^3 a 2x}{a^2 (x^2 - a^2)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3a^2)}{a(x^2 - a^2)^2}$$

Dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2(x^2 - 3a^2)}{a(x^2 - a^2)^2} \right)' &= \frac{1}{a} \frac{(2x(x^2 - 3a^2) + x^2 2x)((x^2 - a^2)^2) - x^2(x^2 - 3a^2)2(x^2 - a^2)2x}{(x^2 - a^2)^4} \\ &= \frac{2ax(x^2 + 3a^2)}{(x^2 - a^2)^3} \end{aligned}$$

Ce qui permet de construire les tableaux de variation :

$a > 0$	$-\sqrt{3}a$	$-a$	0	a	$\sqrt{3}a$						
$f'(x)$	+	0	-	\therefore	-	0	-	\therefore	+	0	+
$f''(x)$	-	-	-	\therefore	+	0	-	\therefore	+	+	+
$f(x)$	\nearrow	M	\searrow	\therefore	\searrow	I	\searrow	\therefore	\searrow	m	\nearrow
Concavité		\cap			\cup		\cap			\cup	

$a < 0$	$-\sqrt{3}a$	$-a$	0	a	$\sqrt{3}a$						
$f'(x)$	-	0	+	\therefore	+	0	+	\therefore	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	\therefore	-	0	+	\therefore	-	-	-
$f(x)$	\searrow	m	\nearrow	\therefore	\nearrow	I	\nearrow	\therefore	\nearrow	M	\searrow
Concavité		\cup			\cap		\cup			\cap	

E) Les concavités sont données dans les tableaux de variation.

Si $a > 0$, le maximum est donné pour $x = -\sqrt{3}a$

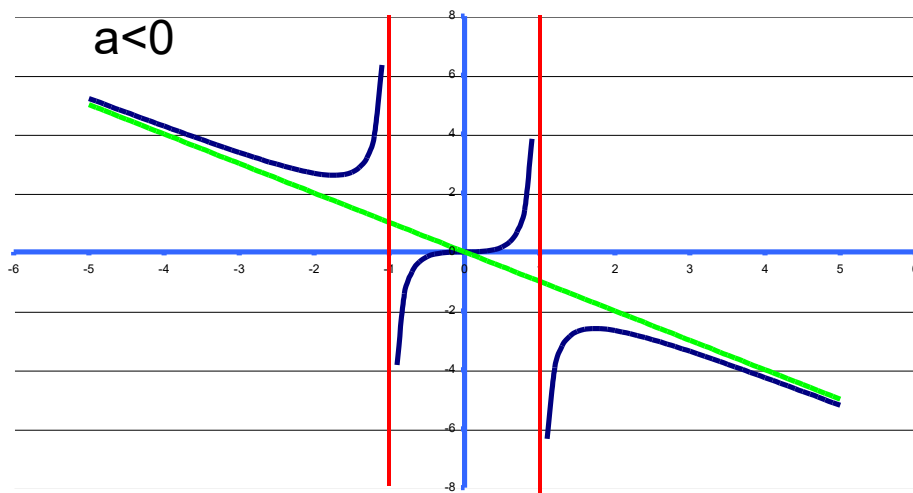
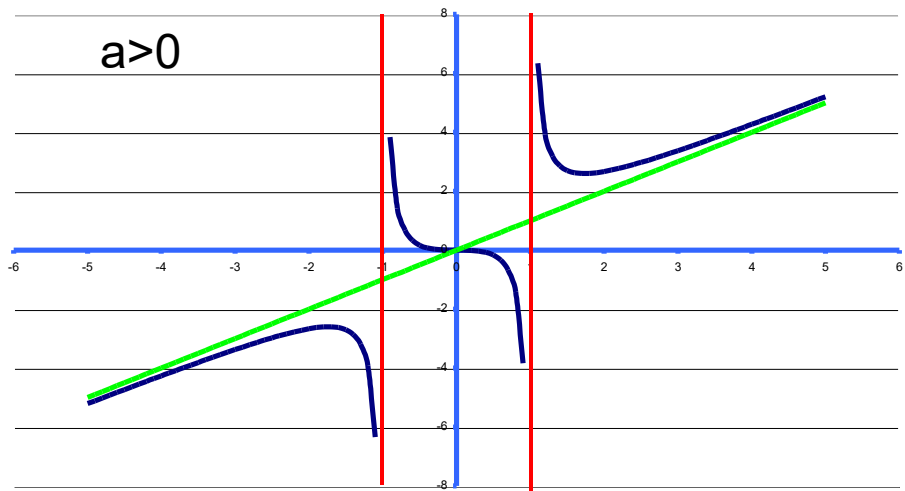
$$\rightarrow y = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (indépendant de } a).$$

$$\text{Donc : } M : \left(-\sqrt{3}a; -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \quad m : \left(\sqrt{3}a; \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\text{Si } a < 0 : M : \left(-\sqrt{3}a; \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \quad m : \left(\sqrt{3}a; -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Le point d'inflexion se trouve à l'origine.

Les graphiques suivants donnent la fonction dans le cas où $a = 1$ et $a = -1$.



Corrigé le 2 avril 2006 (Sabine Bouzette)

EXANA039 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2001

En ajustant la valeur du paramètre a , déterminer une fonction $g(x)$ définie sur $I =]-1; 1[$, possédant des asymptotes verticales en -1 et $+1$, dont la dérivée sur I est donnée par la fonction $f(x)$ et tel que $g(0)=1$

$$f(x) = \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} \quad a \in \mathbb{R}_0 \ (a \neq 0)$$

Intégrons $f(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \frac{x^3}{a(x^2 - a^2)} dx = \frac{1}{a} \left[\int x dx + \int \frac{a^2 x}{(x^2 - a^2)} dx \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[\int x dx + \int \frac{dx}{x-a} + \int \frac{dx}{x+a} \right] \\ &= \frac{1}{a} \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} \ln|x^2 - a^2| + C \end{aligned}$$

Si $g(x)$ a des asymptotes en -1 et 1 , on a $a=1$ ou $a=-1$

C est déterminé sachant que $g(0)=1$

$$a=1 \rightarrow \frac{1}{2} \ln|-1| + C = 1 \rightarrow C = 1$$

$$a=-1 \rightarrow -\frac{1}{2} \ln|-1| + C = 1 \rightarrow C = 1$$

$$\text{Donc } g(x) = \frac{1}{2} (x^2 + \ln|x^2 - 1| + 1) \quad \text{ou} \quad g(x) = -\frac{1}{2} (x^2 + \ln|x^2 - 1| - 1)$$

avec $x \in]-1, 1[$
