Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 30

EXANA300 – EXANA309

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Avril 2011

EXANA300 – ERM, 2006, série 3.

Calculer

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16\cos t}{\left(\cos^2 t+3\right)^2}\,dt$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16\cos t}{\left(\cos^2 t+3\right)^2}\,dt$$

Posons : $y=\sin t \Rightarrow \begin{cases} dy=\cos t\,dt \\ t=0 \to y=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \to y=1 \end{cases} \Rightarrow I=\int_0^1 \frac{16dy}{\left(4-y^2\right)^2}=\int_0^1 \frac{16dy}{(2-y)^2(2+y)^2}$

Décomposons en fractions rationnelles :

$$\frac{16}{(2-y)^2(2+y)^2}=\frac{A}{2-y}+\frac{B}{(2-y)^2}+\frac{C}{2+y}+\frac{D}{(2+y)^2}$$

$$\Rightarrow 16=A(2-y)(2+y)^2+B(2+y)^2+C(2+y)(2-y)^2+D(2-y)^2$$

On détermine les coefficients facilement : $\begin{cases} y=2 \to B=1 \\ y=-2 \to D=1 \\ \left.\begin{array}{l} y=0 \to A+C=1 \\ y=1 \to 3A+C=2 \end{array}\right\} \to A=C=\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{2-y}}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1 \frac{dy}{(2-y)^2}}_{I_2}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{2+y}}_{I_3}+\underbrace{\int_0^1 \frac{dy}{(2+y)^2}}_{I_4}$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{2-y}=-\frac{1}{2}\left[\ln(2-y)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$I_2=\int_0^1 \frac{dy}{(2-y)^2}=\left[\frac{1}{2-y}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dy}{2+y}=\frac{1}{2}\left[\ln(2+y)\right]_0^1=\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)$$

$$I_4=\int_0^1 \frac{dy}{(2+y)^2}=-\left[\frac{1}{2+y}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln 3-\ln 2)+\frac{1}{6}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 3}$$

---

21 avril 2011

EXANA301 – ERM, 2007, série 3.

(1) Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique). Remarque : $e \approx 2.7$.

(2) Déterminer les coordonnées du point P pour lequel la tangente en P au graphique de f passe par l'origine.

---

1) $Dom\ f = \mathbb{R}_0^+$

2) Zéro : $x = e$

3) AV à droite $\equiv x = 0$

AH à droite $\equiv y = 0$

4) $f'(x) = \dfrac{3 - 2\ln x}{x^3}$

TS :

		$e^{3/2} \simeq 4.48$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	Max : $(e^{3/2}, e^{-3}/3) \simeq (4.48;0.025)$	$\searrow$

5) $f''(x) = \dfrac{6\ln x - 11}{x^4}$

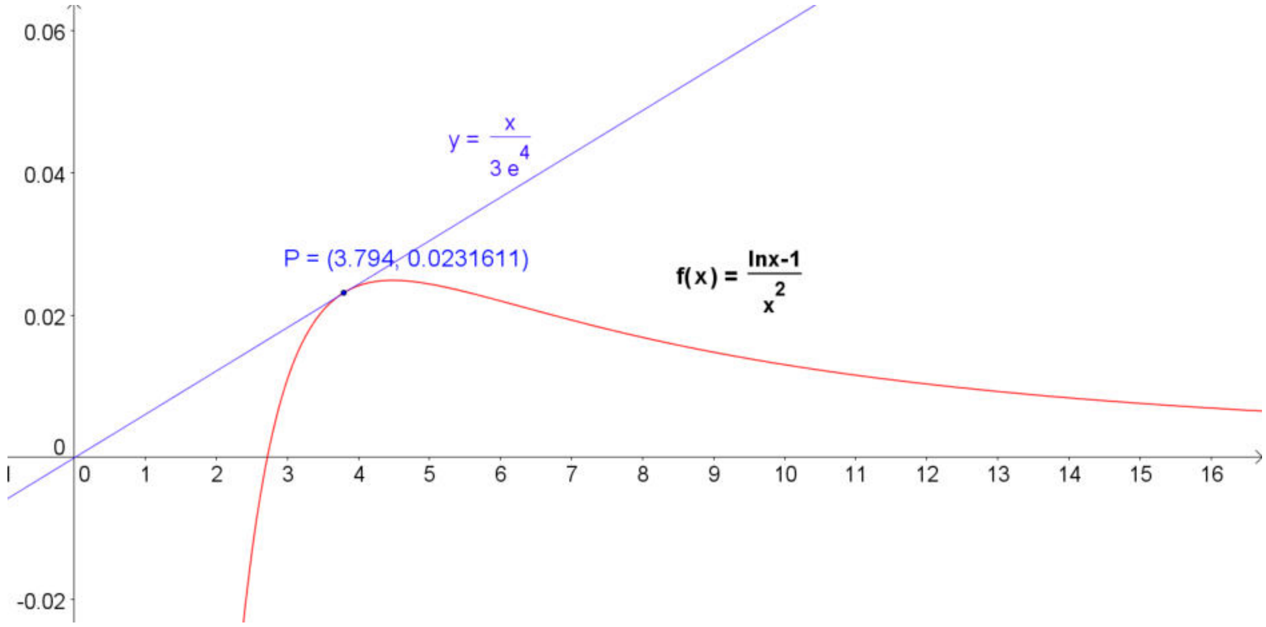
TS :

		$e^{11/6} \simeq 6.25$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	I : $(e^{3/2}, e^{-3}/3) \simeq (6.25;0.0213)$	$\cup$

6) Tangente passant par l'origine : $t \equiv y = mx \Rightarrow m = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\ln x - 1}{x^3}$

Or $m = f'(x) \Rightarrow \dfrac{3 - 2\ln x}{x^3} = \dfrac{\ln x - 1}{x^3} \Rightarrow P : \begin{cases} x = e^{4/3} \simeq 3.794 \\ y = \dfrac{1}{3e^{8/3}} \simeq 0.023161 \end{cases}$

Et $t \equiv y = \dfrac{x}{3e^4} \simeq 0.006105\ x$


0.06
0.04
0.02
0
-0.02
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
$y = \frac{x}{3e^4}$
P = (3.794, 0.0231611)
$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$

5 mai 2011

EXANA302 – ERM, 2007, série 3.

Calculer

$$f(x)=\int_1^2 \frac{3}{x^3+1}dx$$

Remarque : $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1$ et $\sqrt{3}\pi \approx 5.4$

$$I=\int_1^2 \frac{3}{x^3+1}dx=\int_1^2 \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$$

On décompose en fractions rationnelles.

$$\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 3=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)\Rightarrow \begin{cases} x=-1\to A=1 \\ x=0\to C=2 \\ x=1\to B=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{x+1}}_{I_1}+\underbrace{\int_1^2 \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx}_{I_2}$$

$$a)\ I_1=\int_1^2 \frac{dx}{x+1}=\left[\ln(x+1)\right]_1^2=\ln 3-\ln 2$$

$$b)\ I_2=\int_1^2 \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=\underbrace{-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx}_{I_{21}}+\underbrace{\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1}dx}_{I_{22}}$$

$$i)\ I_{21}=-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_1^2=-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$ii)\ I_{22}=\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\int_1^2 \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

$$\text{Posons : } y=\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow \begin{cases} dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dy \\ x=1\to y=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ x=2\to y=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{22}=\sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{y^2+1}=\sqrt{3}\left[\arctan y\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I=I_1+I_{21}+I_{22}=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=\boxed{\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}\approx 0.7606}$$

EXANA303 – ERM, 2009, série 1.

Calculer en commençant par une intégration par parties,

$$\text{I}=\int_1^3 \ln\left(x^2-2x+5\right)dx$$

$I=\int_1^3 \ln\left(x^2-2x+5\right)dx$

$$f=\ln\left(x^2-2x+5\right) \quad f'=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}$$

$$g'=1 \quad g=x$$

$$\Rightarrow I=\left[x\ln\left(x^2-2x+5\right)\right]_1^3-2\int_1^3\frac{2x(x-1)dx}{x^2-2x+5}=7\ln 2-2I_1$$

$$I_1=\int_1^3\frac{2x(x-1)dx}{x^2-2x+5}=\int_1^3 dx+\int_1^3\frac{x-5}{x^2-2x+5}dx$$ Par division euclidienne.

$$=2+\frac{1}{2}\int_1^3\frac{2x-2-8}{x^2-2x+5}dx=2+\frac{1}{2}\underbrace{\int_1^3\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx}_{I_2}-4\underbrace{\int_1^3\frac{dx}{x^2-2x+5}}_{I_3}$$

$$I_2=\int_1^3\frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx=\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)\right]_1^3=\ln 2$$

$$I_3=\int_1^3\frac{dx}{x^2-2x+5}=\int_1^3\frac{dx}{(x-1)^2+4}=\frac{1}{4}\int_1^3\frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_1^3=\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow I=7\ln 2-2\left(2+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{6\ln 2-4+\pi\simeq 3.3}$$

---

7 mai 2011

EXANA304 – ERM, 2009, série 1.

(a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $e^x - x - 1 \geq 0$

(b) Etudier la fonction (de la variable réelle x)

$$f(x) = x\frac{e^x}{e^x - 1}$$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, asymptotes, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ représentation graphique).

---

a) Soit les fonctions $g(x) = e^x$ et $h(x) = x + 1$

1) si $x = 0 \Rightarrow g(x) = h(x) = 1$

2) si $x > 0 \rightarrow \begin{cases} g'(x) = e^x > 1 \\ h'(x) = 1 \end{cases}$

Donc sur l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$, la fonction $g(x)$ croît plus vite que $h(x)$

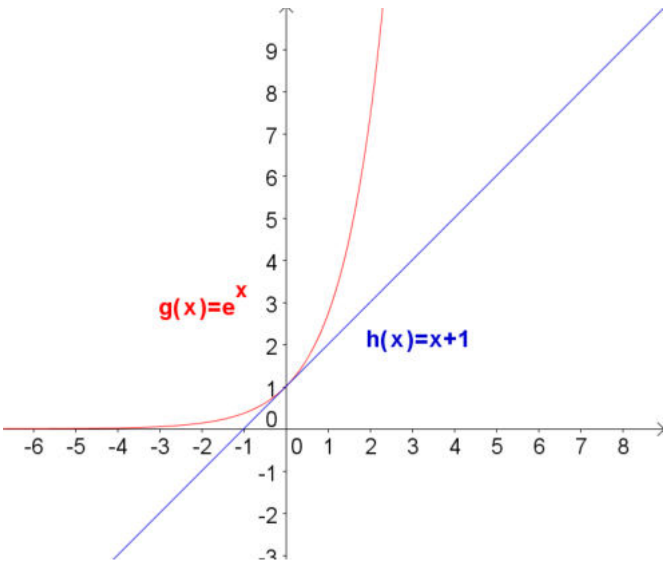
En vertu de 1), on déduit que $g(x) > h(x)$

3) si $x < 0 \rightarrow \begin{cases} g'(x) = e^x \Rightarrow 0 < e^x < 1 \\ h'(x) = 1 \end{cases}$

Donc sur l'intervalle $\left]-\infty, 0\right[$, et en allant vers $-\infty$, $g(x)$ décroît moins vite que $h(x)$.

En vertu de 1), on déduit que $g(x) > h(x)$

Conclusion : sur $\mathbb{R}$, on a $g(x) - h(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$



$b)$ 1) $Dom\ f = \mathbb{R}_0$

2) Pas de zéro

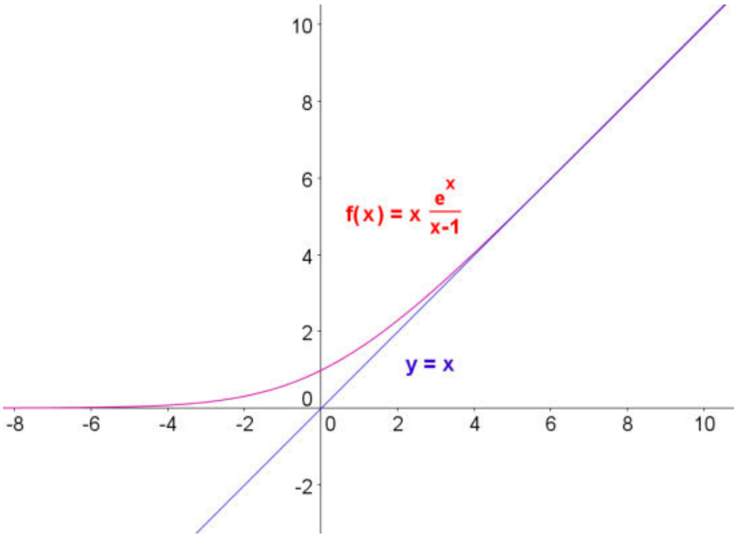
3) i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{e^x - 1} \xrightarrow{Hospital} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + xe^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1 \Rightarrow$ Pas d'AV

ii) $\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x}{x(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{e^x-1} = 1 \\ p = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{xe^x}{e^x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - xe^x + x}{e^x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow AO \equiv y = x$

4) $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x - 1)}{e^x - 1}$

On vertu du point a), $f'(x)$ est toujours positive sur le domaine et donc $f(x)$ est toujours croissante.

5) Pour info : $f''(x) = \dfrac{e^x(x + (x-2)e^x + 2)}{(e^x-1)^3}$, mais il n'est pas demandé d'étudier la concavité.



Janvier 2011

EXANA305 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

1. Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x)=\ln(\ln(\ln x))$$
2. Calculez la limite
$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$$
3. Calculer une primitive de la fonction f définie par
$$f(x)=x^3 e^{-x^2}$$
4. La fonction f définie par
$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$$
est croissante et bijective sur l'intervalle $[\,0,1\,]$

Soit f^{-1} la fonction réciproque de f sur se même intervalle. Calculer l'intégrale définie
$$\int_0^1 f^{-1}(t)\,dt$$
à l'aide du changement de variable : $t=f(x)$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) Conditions : $x>0,\ y=\ln x>0, \ln y>0$ donc $dom_f=\,]\,e,\rightarrow[$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0\times\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\infty}{\infty}\xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{x^2}{2}=0$

3) $t=-x^2;\ dt=-2x dx$
$$I=\frac{1}{2}\int te^t=\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t(t-1)+k=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)+k$$

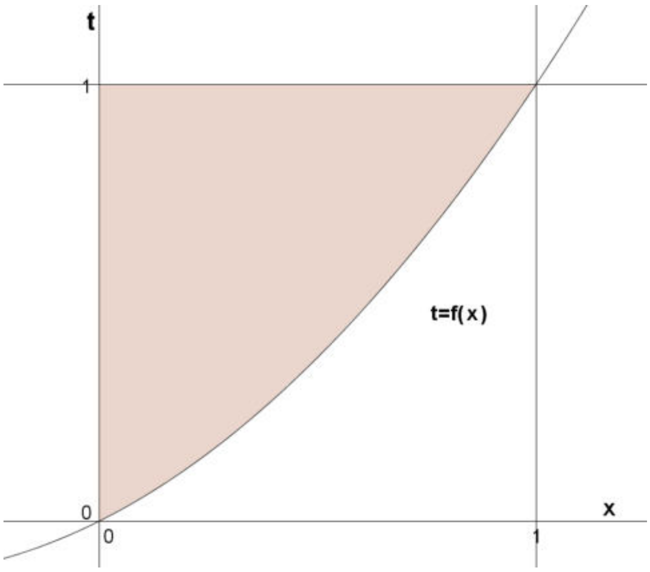
4) $f'(x)=x+\dfrac{1}{2}$ est strictement positive, donc f est croissante et bijective de $[\,0,1\,]$ dans $[\,0,1\,]$

$\int_0^1 f^{-1}(t)\,dt$ = aire de la partie hachurée.

<u>1ère méthode</u> $\quad \int_0^1 f^{-1}(t)\,dt=\text{aire carré }-\int_0^1 f(x)\,dx=1-\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{12}$

<u>2ème méthode</u> $\quad t=f(x);\ dt=f'(x)\,dx=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)dx$
$$\int_0^1 f^{-1}(t)\,dt=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

Remarque : $f^{-1}(f(x))=x$



7 aout 2011

EXANA306 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

(Il est possible de répondre indépendamment à chacune des trois parties de cette question.)

1. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Démontrez que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.
2. Etudiez les variations de f et tracer $\mathcal{C}$ (On précisera le domaine de définition de f, ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les poinst d'inflexion).
3. On cherche à présent à savoir si f admet un point fixe, c'est-à-dire un réel x tel que $f(x) = x$
   (a) Soit G la fonction définie par $G(x) = f(x) - x$. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)$
   (b) Démontrez que, pour tout réel x strictement positif, on a
   $$G(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - 1\right)$$
   et déduisez-en la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$
   (c) Prouvez, à l'aide des points (a) et (b), que f admet un point fixe.

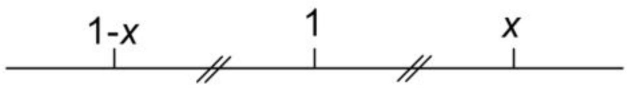
Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1. La droite $x = 1$ est un axe de symétrie car

$\forall x : f(x) = f(2 - x)$

En effet : $x^2 - 2x + 2 = (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 2$

ou encore $f(1 + k) = f(1 - k)\ \forall k$ car $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$



2. Domaine de $f = \mathbb{R}$

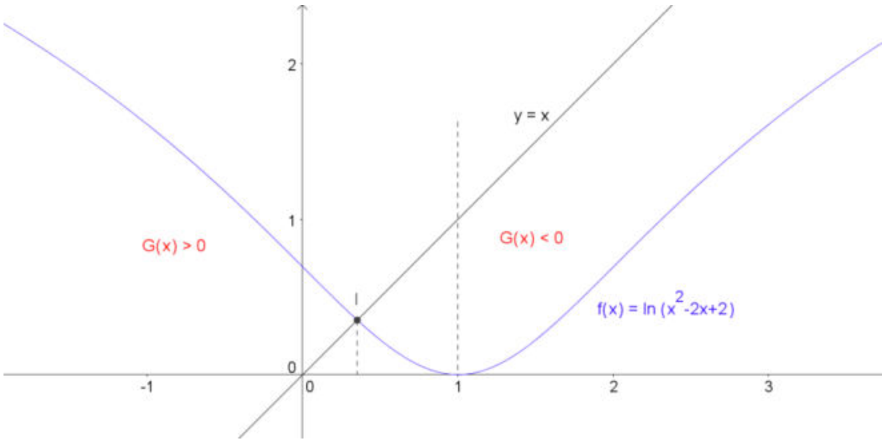
$\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f = +\infty$ (Pas d'AH)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{Hospital} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = 0 \text{ pas d'AO}$$

Idem en $-\infty$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$$

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min $= 0$	$\nearrow$



3. L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution. La droite $y = x$ coupe au moins une fois le graphe de f.

(a) $G(x) = f(x) - x$

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = [+\infty + \infty] = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) = +\infty(0-1) = -\infty$$

(b) $G(x) = \ln\left(x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)\right) - x = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) - x$

$$= x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - 1\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = (+\infty)[0+0-1] = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \ln 1 = 0 \text{ et } \dfrac{0}{\infty} = 0 \end{cases}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} G = +\infty$ $\exists\, a \in \mathbb{R}$ tel que $G(a) > 0$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} G = -\infty$ $\exists\, b \in \mathbb{R}, a < b$ tel que $G(b) < 0$

Puisque les fonctions $f(x)$ et $y = x$ sont continues, la fonction G est continue.

En fonction du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc dire qu'$\exists\, c \in \mathbb{R}$ tel que $G(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Si on souhaite démontrer l'unicité de c, on prouve que la fonction $G(x)$ est strictement décroissante : $G'(x) = f'(x) - 1 = \ldots = \dfrac{-(x-2)^2}{(x-1)^2 + 1} \le 0$

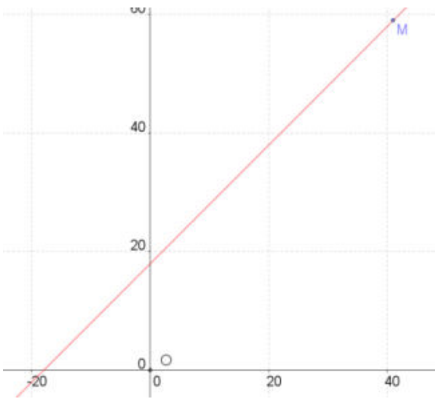
Dès lors le point fixe est unique.

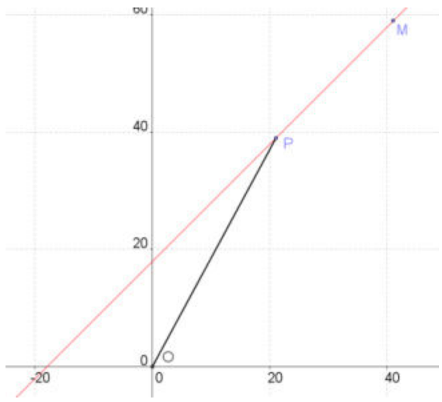
20 aout 2011

EXANA307 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

Dans la plan Oxy, où toutes les coordonnées sont exprimées en kilomètre, vous vous trouvez à l'origine O.
Une route passe à proximité, et son équation est $y = x + \alpha$, où α est un paramètre réel.
Vous souhaitez vous rendre le plus rapidement possible au point M de coordonnées $(40, 40 + \alpha)$, situé sur la route (voir figure tracée pour un certain α).
Votre vitesse de déplacement est égale à 60 km/h partout dans le plan, sauf sur la route, où, vous atteignez 100 km/h.
Pour minimiser votre temps de parcours, vous allez d'abord depuis l'origine vous diriger en ligne droite vers un point P de la route, puis suivre la route jusqu'au point M. (Ce chemin est représenté en gras sur la deuxième figure).
On cherche la position du point P, sur la route qui minimise la durée totale du trajet entre O et M.

1. Soit x l'abscisse du point P à déterminer. Calculez en fonction de l'abscisse x et du paramètre α les distances $|OP|$ et $|PM|$, puis la durée totale du trajet jusque M.
   (Vous pouvez supposer que l'abscisse x est toujours plus petite que 40, l'abscisse de M).
2. Calculez en fonction du paramètre α les coordonnées du point P conduisant à une durée minimale pour le trajet. Justifer soigneusement votre réponse.





Solution proposée par Nicole BERCKMANS

$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + (x+\alpha)^2} = 60T_{OP}$

$\overline{PM} = \sqrt{(40-x)^2 + (40-x)^2} = \sqrt{2}(40-x) = 100T_{PM}$ car $x \le 40$

Temps total : $T(x) = T_{OP} + T_{PM} = \dfrac{1}{60}\sqrt{x^2+(x+\alpha)^2} + \dfrac{1}{100}\sqrt{2}(40-x)$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x+\alpha}{60\sqrt{x^2+(x+\alpha)^2}} - \frac{\sqrt{2}}{100}$$

Résolvons $\dfrac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow 5(2x+\alpha) = 3\sqrt{2}\sqrt{2x^2+2\alpha x+\alpha^2}$

Si $\boxed{2x+\alpha \ge 0}$ élevons les deux membres de l'égalité au carré :

$25(2x+\alpha)^2 = 18(2x^2+2\alpha x+\alpha^2) \Rightarrow 64x^2 + 64\alpha x + 7\alpha^2 = 0$

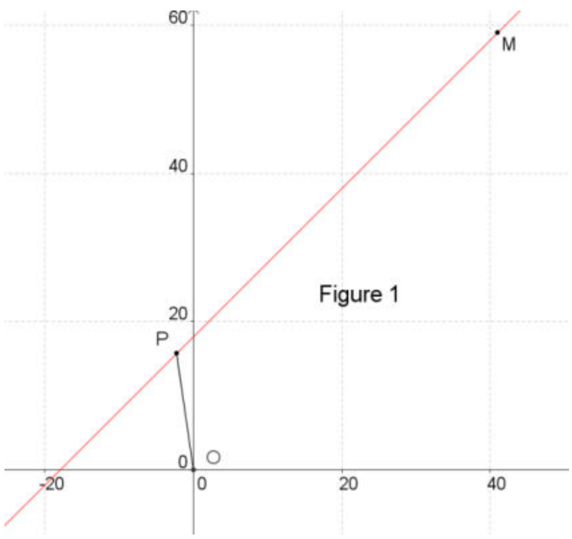
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{8}\alpha \\ 2x_1 + \alpha = \dfrac{6}{8}\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{7}{8}\alpha \\ 2x_2 + \alpha = -\dfrac{6}{8}\alpha \end{cases}$$

<u>1er cas</u> : $\alpha > 0$

Seul x_1 est racine de $\dfrac{dT}{dx}$

x	$-\alpha/2$	$-\alpha/8$	0
dT/dx	$-$	0	$+$
$T(x)$	↘	min	↗

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{\alpha}{8}, \dfrac{7\alpha}{8}\right)$ (Voir figure 1)



2ème cas : $\alpha < 0$

Seul x_2 est racine de $\dfrac{dT}{dx}$

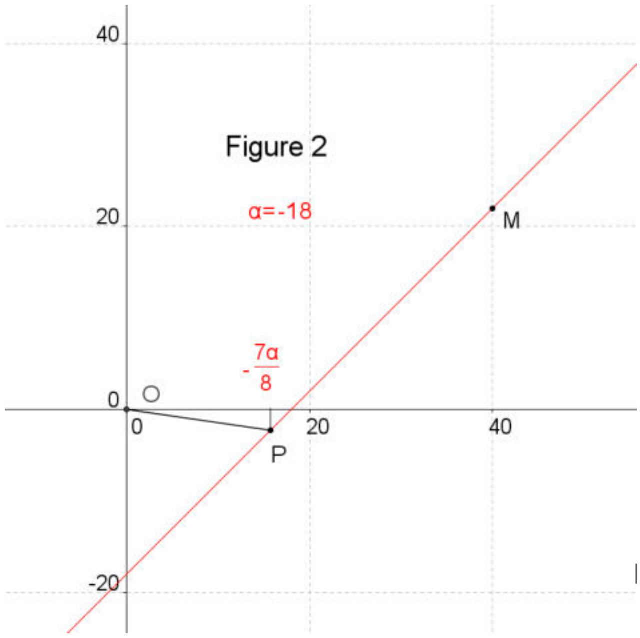
x	0	$-\alpha/2$	$-7\alpha/8$	$-\alpha$
dT/dx		$-$	0	$+$
$T(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{7\alpha}{8}, \dfrac{\alpha}{8}\right)$

- M est à droite de P si $-\dfrac{7\alpha}{8} < 40$ (Voir figure 2)
- $M \equiv P$ si $40 = \dfrac{-7\alpha}{8}$
- M est à gauche de P si $40 < -\dfrac{7\alpha}{8}$

  A exclure car dans l'énoncé, on dit $x < 40$

Conclusion : $x < 40$ ssi $-\dfrac{320}{7} < \alpha$



A titre complémentaire et bien que ce ne soit pas demandé dans l'énoncé, étudions le cas où P est à droite de M. Alors : $\sqrt{(40-x)^2} = |\, 40 - x \,| = x - 40$ car $x < 40$

La mise en équation du problème conduit alors à :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow 5(2x+\alpha) = -3\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2\alpha x + x^2}$$

Si $2x+\alpha > 0,$ il n'y a pas de racine.

Si $2x+\alpha < 0,$ il y a deux racines, x_1 et x_2

Soit donc : $40 < x$ et $2x + \alpha < 0 \Rightarrow 40 < x < -\dfrac{\alpha}{2}$

On a : $x = x_1 = -\dfrac{\alpha}{8} \Rightarrow 40 < -\dfrac{\alpha}{8} < -\dfrac{\alpha}{2}$ c'est-à-dire la condition $\alpha < -320$

($x_2 = -\dfrac{7\alpha}{8}$ doit être rejetée)

Par exemple, si $\alpha = -400 \Rightarrow \begin{cases} P = (50, -350) \\ M = (40, -360) \end{cases}$ et $T_{OP} + T_{PM} \simeq 6.033$

Enfin, si $-320 < \alpha < -\dfrac{320}{7}$ alors $P \equiv M$

---

20 aout 2011

EXANA308 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 2.

1. Donnez le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x)=\sqrt{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}$$

2. Calculez une primitive de la fonction f définie par

$$f(x)=\tan(\sin x).\cos x$$

3. Calculez la limite

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^6+x^3}-x^3$$

4. Démontrez, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $x^2=e^x$ admet au moins une solution réelle.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1.

x	0		$1/e$		e	
$\ln x-1$	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln x+1$	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$

$$\Rightarrow dom_f=\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup[\,e,\to[$$

2. $t=\sin x \qquad u=\cos t$

$dt=\cos x dx \qquad du=-\sin t dt$

$$\int f(x)\,dx=\int \tan t dt=-\int\frac{du}{u}=-\ln(\cos(\sin x))+k$$

3. $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^6+x^3}-x^3=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+x^3-x^6}{\sqrt{x^6+x^3}+x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3+x^3}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^6+x^3}-x^3=+\infty+\infty=+\infty$$

Donc la limite pour $x\to\infty$ n'existe pas.

4. $f(x)=x^2-e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

$f(0)=-1<0$

$$f(-1)=1-e^{-1}=\frac{e-1}{e}>0$$

On utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur $[\,-1,0\,]$

$\exists\, c\in\,]-1,0[\; t.q\; f(c)=0$ c'est-à-dire $c^2=e^c$

---

20 aout 2011

EXANA309 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}$$

1. Etudiez les variations de g et tracer sa courbe représentative (on précisera le domaine de définition de g, ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les points d'inflexion).
2. Déduisez du point précédent qu'il existe un et un seul réel a strictement positif tel que $g(a) = 0$, puis démontrez que a appartienr à l'intervalle ouvert $\left]\frac{\ln 2}{2}, 1\right[$
3. Etudiez le signe de g.

On considère à présent la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

4. Démontrez l'égalité : $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}\, g\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. Déterminez à l'aide des points précédents le domaine de définition et de croissance de f.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1. $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$. $Dom_f : \mathbb{R}$, $g(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = [1 + \infty - 0] = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{1}{\infty} - 1 - \frac{0}{\infty}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) + x = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-2x} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad AO \equiv y = -x + 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = [\infty - \infty] = 1 - \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{e^{-2x}}{x}\right) = 1 - (-\infty)(1 - \infty) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] \xrightarrow{Hospital} \lim_{x\to-\infty} = \frac{-2e^{-2x}}{1} = -\infty$$

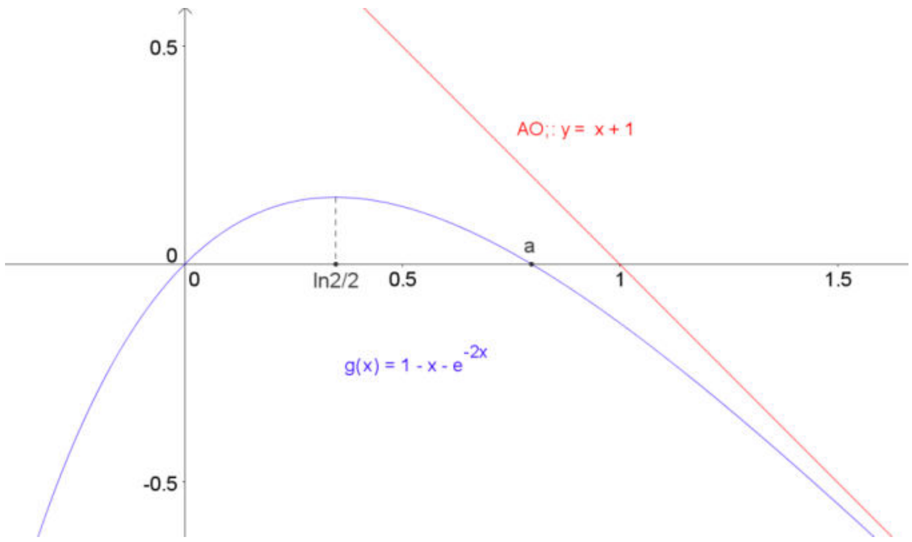
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{Hospital} \lim_{x\to-\infty} g'(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-1 + 2e^{-2x}\right) = +\infty$$

En $-\infty$, il n'y a ni AH, ni AO.

$g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$ s'annule en : $e^{-2x} = 2$ c'est-à-dire en $x = \dfrac{\ln 2}{2}$

x		0		$\frac{\ln 2}{2}$		a		1	
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$g(x)$	↗	0	↗	max	↘	0	↘	$-e^{-2} \simeq -0.14$	↘

$$\begin{cases} g'(0) = -1 + 2 = 1 > 0 \\ g'(1) = -1 + \dfrac{2}{e} < 0 \end{cases}$$



2. $g\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=1-\frac{\ln 2}{2}-e^{-\ln 2}=-\frac{\ln}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-\ln 2}{2}>0$

$g(1)=-\frac{1}{e^2}<0$

$g(x)$ étant continue, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur $\left]\frac{\ln 2}{2},1\right[$ pour démontrer l'existence du point a tel que $g(a)=0$

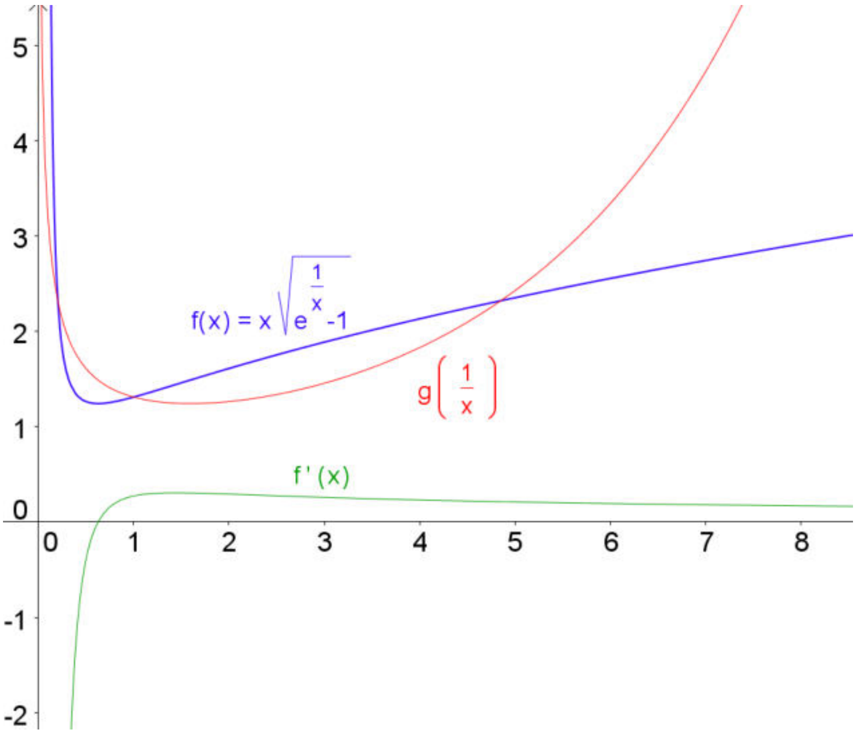
3. g est négatif sur $]\leftarrow,0\,]\cup[\,a,\rightarrow[$ et positif sur $[\,0,a,]$

4. $f'(x)=\left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}\right)'=\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}+\frac{x}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}.\left(-\frac{2}{x^2}\right).e^{\frac{2}{x}}=\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-1\right]$

$\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1x}}g(x)=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}\left(1-\frac{1}{x}-e^{-\frac{2}{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}}-1}}\left[e^{\frac{2}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-1\right]$

5.

x	0		1		$1/a$		$2/\ln 2$	
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	/	$-$	$-e^{-2}$	$-$	0	$+$	$1+\frac{\ln 2}{2}$	$+$
$f'(x)$	/	$-$	$-\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	/	$\searrow$	$\sqrt{e^2-1}$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



20 aout 2011