

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 31

EXANA310 – EXANA319

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot
Benoit Baudalet, Steve Tumson
Nicole Breckmans, Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard**

Aout 2011

EXANA310 – EPL, UCL, Louvain, série 2, juillet 2011.

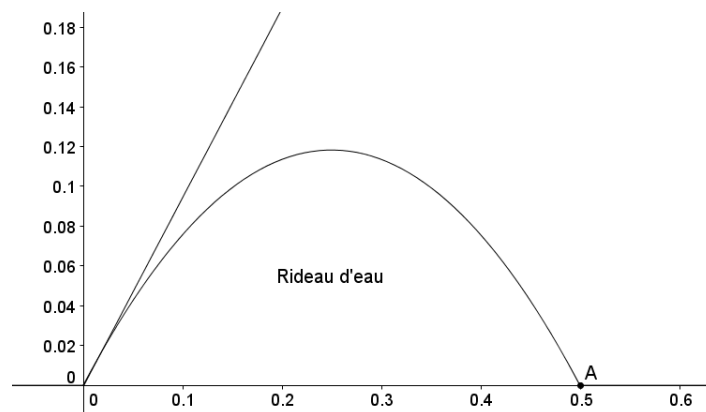
Un irrigateur crée un rideau d'eau plan et perpendiculaire au sol.

Dans ce plan Oxy , représenté ci-dessous, le rideau d'eau émis, à partir de l'origine, est compris entre le sol, d'équation $y = 0$, et la parabole d'équation

$$y = f(x) \quad \text{avec} \quad f(x) = -\frac{x^2}{\cos^2 \theta} + x \tan \theta$$

où θ est un paramètre strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculez la pente de la tangente à la parabole à l'origine.
Que représente le paramètre θ ?
2. Calculez, en fonction de θ , les coordonnées du point d'intersection A entre le sol et la parabole.
3. Calculez, en fonction de θ , la surface du rideau d'eau.
4. Calculez la valeur du paramètre θ pour laquelle la surface du rideau est maximale.



Solution proposée par Nicole BERCKMANS

$$1. f'(x) = -\frac{2x}{\cos \theta} + \tan \theta \quad f'(0) = \tan \theta$$

$$2. \text{ Racines de } f(x) = x \left(-\frac{x}{\cos \theta} + \tan \theta \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & O(0,0) \\ x_A = \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

$$3. S(\theta) = \int_0^{\sin \theta \cos \theta} -\frac{x^2}{\cos^2 \theta} + x \tan \theta \, dx = \left[-\frac{x^3}{3\cos^2 \theta} + \frac{x^2}{2} \tan \theta \right]_0^{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{6} \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$4. \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{6} \sin^4 \theta = \frac{1}{6} \sin^2 \theta (3\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\text{Racines : } \sin \theta = 0 \text{ et } \tan^2 \theta = 3 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{dS}{d\theta}$	/	+	0	-
S	/	\nearrow	Max	\searrow

Rép: $\frac{\pi}{3}$

21 avril 2011

EXANA311 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

1. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

2. Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

3. Soit f la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |x|^3$$

Est-elle dérivable à l'origine? Justifier.

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+x)} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1) \cdot \ln(1+x) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{(x+1) \cdot \ln(1+x)}{x} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \cdot \ln(1+x)}{x} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ \text{car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \cdot \ln(1+x)}{x} &\xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + (x+1) \frac{1}{1+x}}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx \quad (1)$$

$$\text{On pose : } t = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x \cdot dx = -\frac{dt}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{1}{4} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} [\sqrt{t}]_1^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$3. 1) x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = |x|^3 = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$$

$$2) x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = |x|^3 = -x^3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -3x^2 = 0$$

Les limites à gauche et à droite sont égales et donc la fonction est dérivable en $x = 0$

EXANA312 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

sur le domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. Calculez les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
2. Déterminez les éventuelles asymptotes.
3. Calculer f' et f'' puis dressez un tableau des variations de f contenant
 - (a) les racines et le signe de f' , les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f ,
 - (b) les racines et le signe de f'' , les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f .
4. Tracez le graphe de f .
5. Discutez en fonction du paramètre réel u le nombre de solutions de l'équation

$$(x+2)e^{\frac{1}{x}} = u$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (x+2)e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$
$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ : 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 2e^{+\infty} = +\infty \\ x \rightarrow 0^- : 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 2e^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

2) Une AV à droite en $x = 0$

$$AO : m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{=1} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}_{=0} = 1$$

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x}_{L_3} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{=2}$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \rightarrow \infty \Rightarrow t=0]{t=\frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{t} \xrightarrow{H} \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

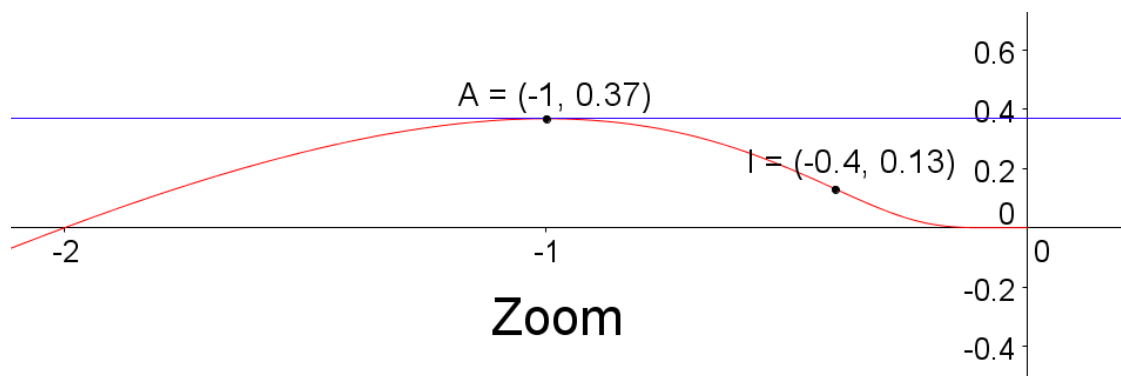
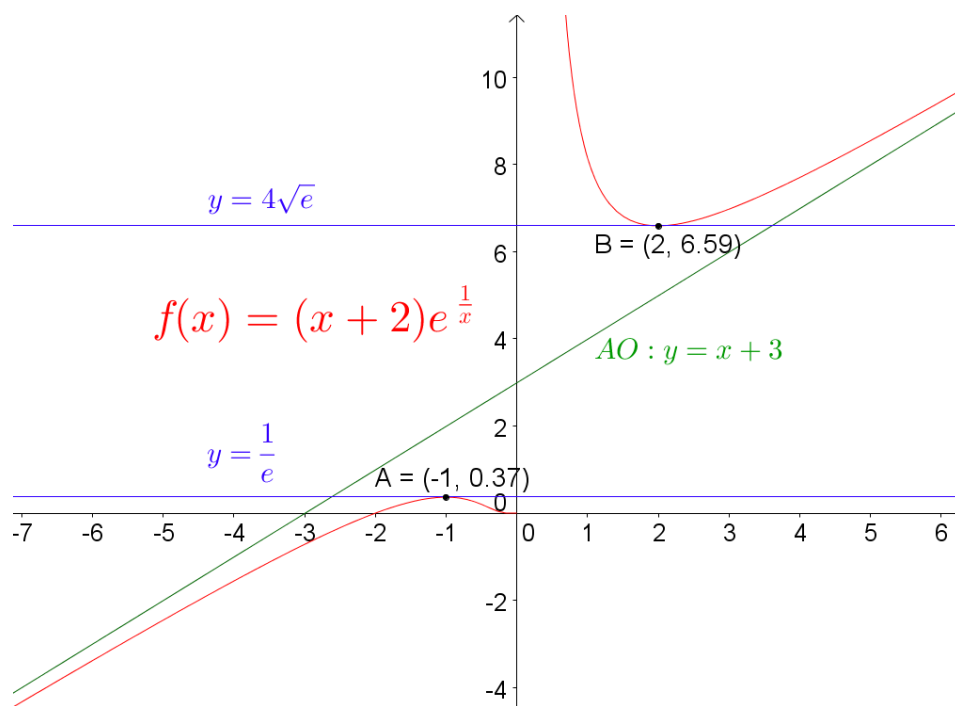
$\Rightarrow p = 1 + 2 = 3$ et donc il y a une AV d'équation : $y = x + 3$

$$3) f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{5x+2}{x^4}$$

Tableau de signes

		-1		$-\frac{2}{5}$		0		2		
$f'(x)$	+	0	-	-	- / -	- / -	0	+	+	
$f''(x)$	-	-	-	0	+ / +	+ / +	+	+	+	
$f(x)$	\nearrow \cup	max : $A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$		\searrow \cup	$I : \left(-\frac{2}{5}, 0.13\right)$		\searrow \cup	min $B(2, 4\sqrt{e})$		\nearrow \cup



5) Le nombre de solutions de l'équation $(x+2)e^{\frac{1}{x}} = u$ s'obtient directement de l'analyse du graphe de $f(x)$

$u < 0$	1 solution
$0 \leq u < \frac{1}{e}$	2 solutions
$u = \frac{1}{e}$	1 solution ($x = -1$)
$\frac{1}{e} < u < 4\sqrt{e}$	Pas de solution
$u = 4\sqrt{e}$	1 solution ($x = 2$)
$u > 4\sqrt{e}$	2 solutions

30 octobre 2011

EXANA313 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

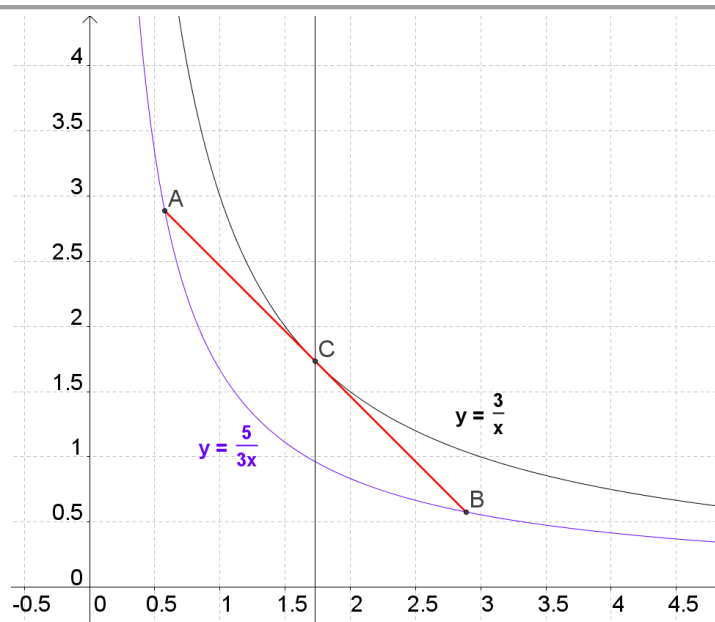
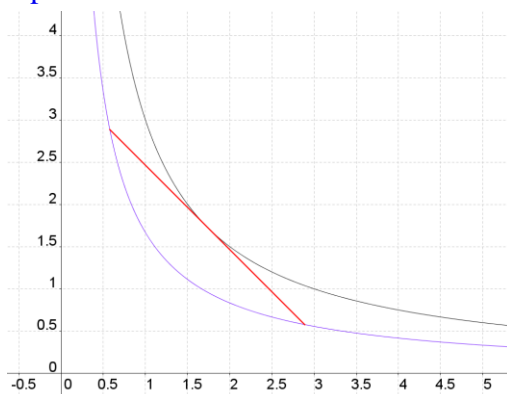
On a représenté ci-dessous, dans le plan Oxy , une rivière dont les rives intérieure (au dessus sur la figure) et extérieure (en dessous) ont pour équations respectives :

$$y = \frac{3}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{3x} \quad (\text{pour } x > 0)$$

On considère un navire assimilé à un segment rectiligne. On cherche à calculer la longueur permettant encore à ce navire de naviguer le long de cette rivière. Pour cela on considère la situation extrême représentée sur la figure : un navire tangent à la rive intérieure et dont les deux extrémités se situent sur la rive extérieure.

Soit a l'abscisse du point de tangence, à déterminer.

1. Calculez l'équation de la tangente à la rive intérieure.
2. Calculez les coordonnées des deux extrémités du navire puis calculez le carré de sa longueur.
3. Calculez la valeur de a conduisant au minimum du carré de la longueur du navire, puis la longueur minimale possible pour le navire.



On a donc $y = \frac{3}{x} \Rightarrow y' = -\frac{3}{x^2}$.

Si l'abscisse du point C est $x = a \Rightarrow f(a) = \frac{3}{a}$ et $f'(a) = -\frac{3}{a^2}$.

L'équation de la tangente est alors : $y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y = \frac{3}{a^2}(2a - x)$

Calculons les points d'intersection :

$$\frac{5}{3x} = \frac{3}{a^2}(2a - x) \Rightarrow 9x^2 - 18ax + 5a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5a}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{a} \\ x = \frac{a}{3} \Rightarrow y = \frac{5}{a} \end{cases}$$

Le carré de la distance est alors :

$$d^2 = \left[\frac{a}{3}(5-1) \right]^2 + \left[\frac{1}{a}(1-5) \right]^2 = \frac{16}{9} \left(a^2 + \frac{9}{a^2} \right)$$

La distance présente un extrémum si :

$$(d^2)' = \frac{32}{9} \left(a - \frac{9}{a^3} \right) = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{a^3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \quad (\text{Donc : } d = \frac{4\sqrt{6}}{3})$$

$$\text{Il s'agit bien d'un minimum car } \begin{cases} a < \sqrt{3} \rightarrow \frac{a^4 - 9}{a^3} < 0 \\ a > \sqrt{3} \rightarrow \frac{a^4 - 9}{a^3} > 0 \end{cases}$$

EXANA314 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

On considère la fonction $f(x) = \ln \frac{x^3}{4-x^2}$

i. Déterminez le domaine de définition de f .

ii. Calculez

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

iii. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes de f .

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i. L'argument du logarithme doit être strictement positif soit

$$\frac{x^3}{4-x^2} > 0$$

On a

	-2	0	2	
x^3	-	-	0	+
$4-x^2$	-	0	+	+
$\frac{x^3}{4-x^2}$	+	∓	-	0

et donc

$$\text{dom} f =]-\infty, -2[\cup]0, 2[$$

ii. Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3}{4-x^2} \right) = \left[\ln(+\infty) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{4-x^2} \right) = \left[\ln 0 \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{4-x^2} \right) = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{4-x^2} \right) = \left[\ln(+\infty) \right] = +\infty$$

iii. • Les limites calculées nous permettent d'identifier des asymptotes verticales $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$.

• Pour examiner l'existence d'une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, calculons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{4-x^2} \right) = \left[\ln(+\infty) \right] = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

- Pour examiner l'existence d'une asymptote oblique d'équation générale $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$, calculons d'une part

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty} \right]$$

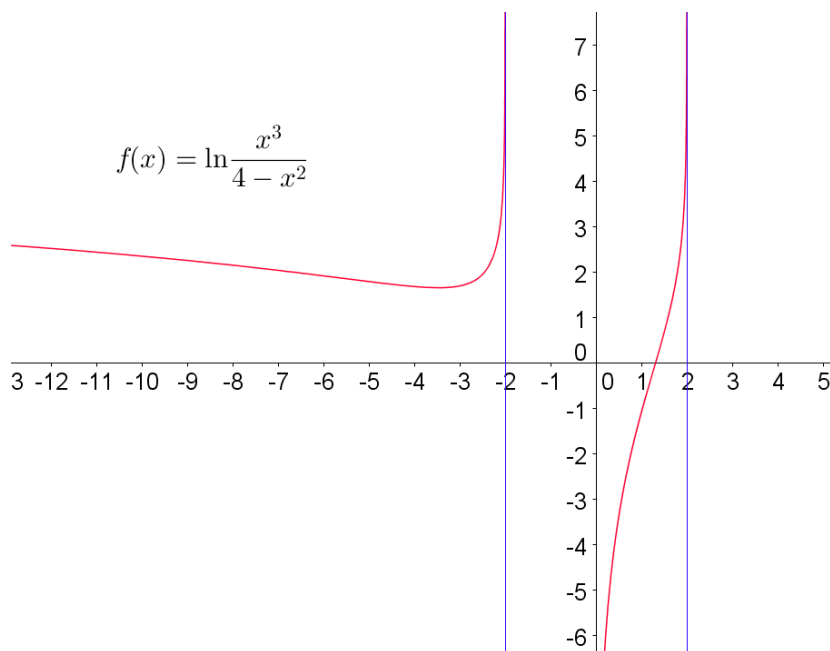
Il s'agit d'une indétermination qui peut être levée par le théorème de l'Hospital. On a

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x^3}{4-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x^3} \frac{3x^2(4-x^2) + x^3(2x)}{(4-x^2)^2}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12x^2 - x^4}{x^3(4-x^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique.



20 juin 2012

EXANA315 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

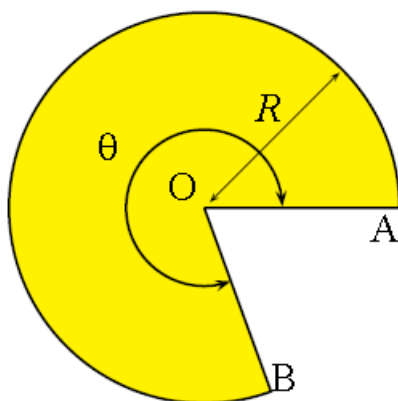
On découpe dans une feuille de papier un secteur circulaire de rayon R et d'ouverture θ comme représenté ci-dessous. En appliquant l'un sur l'autre les points A et B , on forme un cône de sommet O .

i. Montrez que le volume du cône est donné par une expression du type

$$V(\theta) = \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

où α est une constante positive à déterminer et où θ est exprimé en radians.

ii. Le rayon R étant fixé, déterminez le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte. Justifiez.



Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i. Le volume d'un cône se calcule au moyen de la formule

$$V = \frac{1}{3}hB$$

où h est la hauteur et B est l'aire de la base.

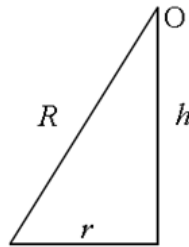
D'une part, le schéma présenté dans l'énoncé nous apprend que le périmètre P de la base du cône est donné par $P = \theta R$. Le rayon r de la base vaut donc

$$r = \frac{P}{2\pi} = \frac{\theta R}{2\pi}$$

et son aire est donnée par

$$B = \pi r^2 = \frac{\theta^2 R^2}{4\pi}$$

D'autre part, dans toute section du cône par un plan vertical, on identifie le triangle rectangle



où

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} hB = \frac{1}{3} \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \left(\frac{\theta^2 R^2}{4\pi} \right) = \frac{1}{24\pi^2} R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \\ &= \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{24\pi^2}$$

ii. Nous cherchons le maximum de la fonction

$$V(\theta) = \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

en fonction de la variable $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons sa dérivée première

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 2\alpha R^3 \theta \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \alpha R^3 \frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \\ &= \frac{\alpha R^3 \theta (8\pi^2 - 3\theta^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \end{aligned}$$

Elle s'annule en $\theta = 0$, ce qui correspond à un volume nul, et en

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \pi$$

qui correspond bien à un maximum puisque la dérivée est positive à gauche de ce point et négative à droite. Pour cette valeur de θ , on obtient

$$\begin{aligned}V\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right) &= \alpha R^3 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2 \sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2} \\ &= \alpha R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}} \pi R^3\end{aligned}$$

qui est le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte.

EXANA316 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

On pose

$$c_n = \int_0^\pi (x+a)^n \cos x \, dx \quad \text{et} \quad s_n = \int_0^\pi (x+a)^n \sin x \, dx$$

où n désigne un entier positif ou nul et a est un réel quelconque.

i. Calculer c_0 et s_0

ii. Calculer c_1 et s_1 .

iii. Montrez que, pour tout n entier non nul, $c_n = -ns_{n-1}$

iv. Montrez que, pour tout n entier strictement supérieur à 1,

$$s_n = (\pi + a)^n + a^n - n(n-1)s_{n-2}$$

v. Montrez que, pour tout n pair supérieur ou égal à 2,

$$\int_0^\pi [(x-\pi)^n - x^n] \sin x \, dx = 0$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i.

$$c_0 = \int_0^\pi \cos x \, dx = [\sin x]_0^\pi = 0$$

$$s_0 = \int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

ii. En intégrant par parties, on obtient

$$c_1 = \int_0^\pi (x+a) \cos x \, dx = [(x+a) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = -s_0 = -2$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^\pi (x+a) \sin x \, dx = [-(x+a) \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx \\ &= \pi + a + a + c_0 = \pi + 2a \end{aligned}$$

iii. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^\pi (x+a)^n \cos x \, dx = [(x+a)^n \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi n(x+a)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= -ns_{n-1} \end{aligned}$$

iv. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} s_n &= \int_0^\pi (x+a)^n \sin x \, dx = [-(x+a)^n \cos x]_0^\pi + n \int_0^\pi (x+a)^{n-1} \cos x \, dx \\ &= (\pi+a)^n + a^n + n c_{n-1} \end{aligned}$$

Ensuite, puisque $c_{n-1} = -(n-1) s_{n-2}$, on a

$$s_n = (\pi+a)^n + a^n - n(n-1) s_{n-2}$$

v. On a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [(x-\pi)^n - x^n] \sin x \, dx &= \int_0^\pi (x-\pi)^n \sin x \, dx - \int_0^\pi x^n \sin x \, dx \\ &= s_{n,-\pi} - s_{n,0} \end{aligned}$$

où, en utilisant la formule du point iv. et le fait que n est pair,

$$s_{n,-\pi} = (-\pi)^n - n(n-1) s_{n-2,-\pi} = \pi^n - n(n-1) s_{n-2,-\pi}$$

et

$$s_{n,0} = \pi^n - n(n-1) s_{n-2,0}$$

Étant donné que s_0 ne dépend pas de a (cf. i.), $s_{n-2,-\pi} = s_{n-2,0}$ et le résultat est nul.

EXANA317 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

L'introduction pour les questions EXANA317 et EXANA318 est la même.

Introduction

L'installation d'une éolienne sur un site particulier est généralement précédé d'une étude de longue durée destinée à recueillir les statistiques décrivant la variation du vent à cet endroit. Ignorant l'information sur la direction du vent puisque les éoliennes peuvent pivoter autour de l'axe central avec celui-ci, la distribution statistique de la vitesse du vent est généralement décrite par une *loi de Weibull* de la forme.

$$f(v) = \alpha v \exp(-v^2 / \lambda^2)$$

où v désigne la vitesse du vent et où α et λ sont des paramètres constants strictement positifs déterminés en fonction des mesures effectuées à l'endroit désiré.

La fonction $f(v)$ est la *densité de probabilité*. Elle permet d'exprimer la probabilité que le vent souffle à une vitesse comprise entre v_a et v_b par

$$P(v_a < v < v_b) = \int_{v_a}^{v_b} f(v) dv$$

Question

Etudiez le graphe de la fonction $f(v)$ sur le domaine utile constitué des valeurs $v \geq 0$.

En particulier,

- i. Déterminez les asymptotes éventuelles.
- ii. Etudiez la croissance/décroissance et déterminez les extrema éventuels.
- iii. Etudiez la concavité et déterminez les points d'inflexion éventuels;
- iv. Déterminez les équations des tangentes au graphe de f en l'abscisse $v = 0$ ainsi qu'aux éventuels extrema et points d'inflexion du graphe de f .

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

<http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i. La fonction

$$f(v) = \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2)$$

est définie sur \mathbb{R} . Nous étudierons cependant ses variations uniquement sur l'intervalle utile $v \in [0, +\infty[$. On peut noter que $f(0) = 0$ et que la fonction est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

ii. La fonction étant définie sur tout l'intervalle utile $[0, +\infty[$, elle n'y présente pas d'asymptote verticale.

Pour identifier une éventuelle asymptote horizontale en $+\infty$, on calcule

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) = [+\infty \cdot 0]$$

Pour lever l'indétermination, on applique le théorème de L'Hospital à la fonction écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow +\infty} \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) &= \alpha \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{v}{\exp(v^2/\lambda^2)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \\ &= \alpha \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{[v]'}{[\exp(v^2/\lambda^2)]'} \\ &= \alpha \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{2v \exp(v^2/\lambda^2)} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. La fonction étant positive, cette asymptote est approchée par valeur supérieure.

iii. Pour identifier d'éventuels extrema et étudier la croissance/décroissance de la fonction, on évalue

$$f'(v) = \alpha \exp(-v^2/\lambda^2) - 2\alpha \frac{v^2}{\lambda^2} \exp(-v^2/\lambda^2) = \alpha \exp(-v^2/\lambda^2) \left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right)$$

Sur $[0, +\infty[$, la dérivée s'annule uniquement en $v_* = \lambda/\sqrt{2}$ et on a

v	0	v_*	$+\infty$
f'	α	+	0
f	0	\nearrow	Max
		\searrow	

La fonction présente donc un maximum local en $v = v_* = \lambda/\sqrt{2}$. En ce point, on a

$$f(v_*) = \frac{\alpha \lambda}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

iv. Par une nouvelle dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} f''(v) &= -2\alpha \frac{v}{\lambda^2} \exp(-v^2/\lambda^2) \left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right) - 4\alpha \frac{v}{\lambda^2} \exp(-v^2/\lambda^2) \\ &= 2\alpha \frac{v}{\lambda^2} \exp(-v^2/\lambda^2) \left(\frac{2v^2}{\lambda^2} - 3\right) \end{aligned}$$

Sur $[0, +\infty[$, cette expression s'annule en 0 et en $v = v_I = \sqrt{3/2} \lambda > v_*$. Pour préciser le comportement de la fonction au voisinage de l'origine, il est utile de considérer aussi les variations du signe de f'' pour des valeurs négatives de v

v	0	v_I	$+\infty$
f''	+	0	-
f	\cup	Pt. inflexion	\cap
		Pt. inflexion	\cup

Puisque la dérivée seconde change de signe de part et d'autre de 0 et de v_I , on en déduit l'existence de points d'inflexion aux abscisses $v = 0$ et $v = v_I = \sqrt{3/2} \lambda$.

v. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse v_0 est donnée par

$$y = f(v_0) + f'(v_0)(v - v_0)$$

À l'origine, *i.e.* pour $v_0 = 0$, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \alpha$. Dès lors, l'équation de la tangente à l'origine est donnée par $y = \alpha v$.

Au point $v = v_*$, on a $f'(v_*) = 0$ et la tangente est horizontale. Son équation est

$$y = f(v_*) = \frac{\alpha \lambda}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

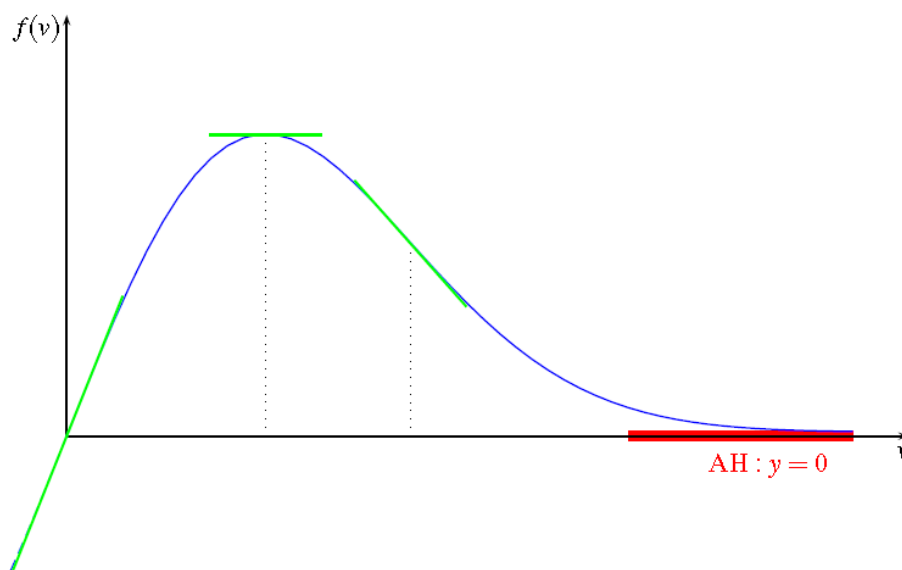
Au point $v = v_I$, on a

$$f(v_I) = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \lambda e^{-3/2}, \quad f'(v_I) = -2\alpha e^{-3/2}$$

et l'équation de la tangente est

$$y = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \lambda e^{-3/2} - 2\alpha e^{-3/2}(v - \sqrt{3/2}\lambda) = 3\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha \lambda e^{-3/2} - 2\alpha e^{-3/2} v$$

vi. Regroupant tous les résultats précédents, on peut esquisser le graphe de f et les tangentes demandées de la façon suivante :



Remarquons que les tangentes coupent bien le graphe de f aux points d'inflexion.

EXANA318 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

L'introduction pour les questions EXANA317 et EXANA318 est la même.

Introduction

L'installation d'une éolienne sur un site particulier est généralement précédé d'une étude de longue durée destinée à recueillir les statistiques décrivant la variation du vent à cet endroit. Ignorant l'information sur la direction du vent puisque les éoliennes peuvent pivoter autour de l'axe central avec celui-ci, la distribution statistique de la vitesse du vent est généralement décrite par une *loi de Weibull* de la forme.

$$f(v) = \alpha v \exp(-x^2 / \lambda^2)$$

où v désigne la vitesse du vent et où α et λ sont des paramètres constants strictement positifs déterminés en fonction des mesures effectuées à l'endroit désiré.

La fonction $f(v)$ est la *densité de probabilité*. Elle permet d'exprimer la probabilité que le vent souffle à une vitesse comprise entre v_a et v_b par

$$P(v_a < v < v_b) = \int_{v_a}^{v_b} f(v) dv$$

Question

i. Sachant que (condition de normalisation)

$$P(0 < v \leq +\infty) = \int_0^{+\infty} f(v) dv = 1$$

montrez que

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

Dans la suite on utilisera cette valeur de α .

ii. Calculez en fonction de u (et de λ) la probabilité $F(u)$ que la vitesse du vent soit inférieure à une valeur $u > 0$ fixée.

iii. Montrez que les moments successifs

$$\mu_n = \int_0^{\infty} v^n f(v) dv \quad (n \geq 0)$$

vérifient une relation de récurrence du type

$$\mu_n = \beta n \mu_{n-2} \quad \text{pour tout } n \geq 2$$

où β est une constante à déterminer.

iv. Sachant que (intégrale de Poisson)

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

calculez la puissance moyenne $\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv$

v. Calculer la puissance moyenne théorique de P

$$P = \eta C_p \mu_3 = \eta C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v) dv$$

(où η et C_p sont des paramètres, $\eta \approx 0.59$ désignant le rendement théorique maximum de l'éolienne et C_p étant le coefficient de puissance) pouvant être produite par une éolienne placée à cet endroit.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

<http://www.facsu.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes>

i. On doit avoir

$$1 = \int_0^{\infty} \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) dv = \left[-\frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2$$

Dès lors,

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

ii. La probabilité recherchée est donnée par

$$F(u) = P(0 \leq v \leq u) = \int_0^u f(v) dv = \left[-\frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \right]_0^u = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 [1 - \exp(-u^2/\lambda^2)]$$

soit, en utilisant le résultat du point i.,

$$F(u) = 1 - \exp(-u^2/\lambda^2)$$

iii. Pour tout n positif, on peut transformer

$$\mu_n = \alpha \int_0^{\infty} v^{n+1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

en exploitant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b g'(v) h(v) dv = [g(v) h(v)]_a^b - \int_a^b g(v) h'(v) dv$$

où

$$\begin{cases} g'(v) = \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h(v) = v^n \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} g(v) = -\frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h'(v) = n v^{n-1} \end{cases}$$

Il vient,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left[-\frac{1}{2} \alpha n \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \alpha n \lambda^2 \int_0^{\infty} v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \\ &= 0 + \frac{1}{2} \alpha n \lambda^2 \int_0^{\infty} v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n \geq 2$, il vient donc

$$\mu_n = \frac{1}{2} n \lambda^2 \mu_{n-2}$$

qui est de la forme annoncée dans l'énoncé pour $\beta = \lambda^2/2$.

iv. La valeur moyenne de la vitesse du vent est donnée par

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

En appliquant pour $n = 1$ la procédure d'intégration par parties introduite au point précédent, on obtient

$$\mu_1 = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp(-v^2/\lambda^2) dv = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \int_0^{+\infty} \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

L'intégrale apparaissant dans le membre de droite est une intégrale de Poisson du type

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exploitant ce résultat et la valeur de α obtenue au point i, il vient dès lors

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \alpha \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1/\lambda^2}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha \lambda^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda$$

v. La puissance moyenne théorique est donnée par

$$\mathcal{P} = \eta C_p \mu_3 = \eta C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v) dv$$

En utilisant la formule de récurrence obtenue au point iii., il vient

$$\mathcal{P} = \eta C_p \mu_3 = \frac{3}{2} \eta C_p \lambda^2 \mu_1$$

La valeur de μ_1 a été déterminée au point précédent de sorte que

$$\mathcal{P} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \eta C_p \lambda^3$$

EXANA319 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{\ln|x|}}{x}$ pour tout réel x non nul.

- a) f est-elle paire, impaire? Justifier.
- b) Déterminer les zéros de f .
- c) Que vaut la limite de $f(x)$
 - Lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
 - Lorsque x tend vers 0 par valeurs >0 ? Justifier.
- d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.
- f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs coordonnées. Justifier.
- g) Esquissez le graphe de la fonction f .

Solution proposée par Dominique Druetz

a) La fonction est impaire :

$$f(-x) = \frac{e \cdot \ln|-x|}{-x} = -\frac{e \cdot \ln|x|}{x} = -f(x)$$

b) $f(x)$ s'annule en $x=1$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \cdot 1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$$

$$\lim_{x > 0} \frac{e \cdot \ln x}{x} = \lim_{x > 0} \frac{e \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x > 0} \frac{e}{x} = \infty$$

d)

$$f'(x) = \left(\frac{e \cdot \ln x}{x} \right)' = e \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

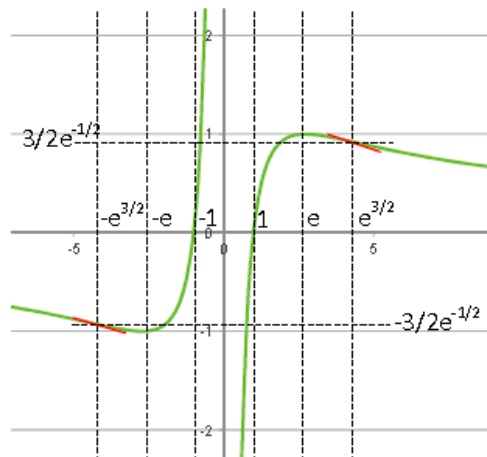
$$f''(x) = \left(e \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)' = e \frac{-\frac{x^2}{x} - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = e \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

e) Le graphe comporte un maximum en $x=e$, $f(x)=1$ (et par conséquent un minimum en $x=-e$, $f(x)=-1$ car la fonction est impaire).

$x \geq 0$	0		1		e		$e^{3/2}$	
f	-	-	0	+	+	+	+	+
f'	+	+	+	+	0	-	-	-
f''	-	-	-	-	-	-	0	+
Pente	↑	↑	↑	↑	Max	↓	↓	↓
Concavité	∩	∩	∩	∩	∩	∩	~	∪

f) Le graphe comporte 2 points d'inflexions $x = \pm e^{3/2}$, $f(x) = \pm \frac{3}{2} e^{-1/2}$

g)



On peut étudier la fonction à droite de 0 en omettant la valeur absolue.

Hospital

Asymptote horizontale
 $y = 0$

Hospital

Asymptote verticale
 $x = 0$

Zéro en $\ln x = 1$
 $\rightarrow x = e$

Zéro en $\ln x = \frac{3}{2}$
 $\rightarrow x = e^{3/2}$