Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 32

EXANA320 – EXANA329

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Juin 2012

EXANA320 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int_{-7}^{7} \sqrt{x^2}\, dx$

b) $\int \sin 5x \cos 5x\, e^x dx$

---

a) $\int_{-7}^{7} \sqrt{x^2}\, dx = 2\int_{0}^{7} \sqrt{x^2}\, dx = 2\int_{0}^{7} x\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = \boxed{49}$

b) $I = \int \sin 5x \cos 5x\, e^x dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x\, e^x\, dx$

$$\begin{array}{ll} f' = e^x & f = e^x \\ g = \sin 10x & g' = 10\cos 10x \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\sin 10x\, e^x - 10\underbrace{\int \cos 10x\, e^x\, dx}_{=I'}\right)$$

$I' = \int \cos 10x\, e^x\, dx$

$$\begin{array}{ll} f' = e^x & f = e^x \\ g = \cos 10x & g' = -10\sin 10x \end{array} \Rightarrow I' = \cos 10x\, e^x + 10\underbrace{\int \sin 10x\, e^x\, dx}_{=2I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(\sin 10x\, e^x - 10\left(\cos 10x\, e^x + 20I\right)\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{e^x}{202}(\sin 10x - 10\cos 10x) + C}$$

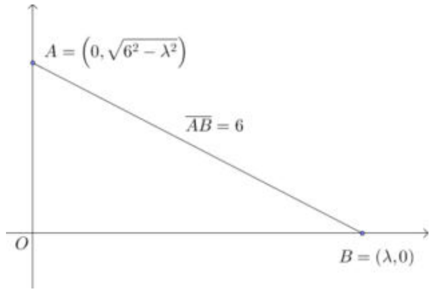
Solution proposée par Dominique Druez

$a)\ \int_{-7}^{7} \sqrt{x^2}dx\ \int_{-7}^{7} \lvert x\rvert dx = 2\int_{0}^{7} xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = 49$	
$b)$	
$I(x) = \int e^x \sin 5x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int e^x \sin 10x\, dx$	$\sin 2a = 2\sin a \cos a$
$I(x) = \frac{1}{2}e^x \sin 10x - 5\int e^x \cos 10x\, dx =$	Intégration par partie deux fois: $f = \sin 10x \to f' = 10\cos 10x$ $g' = e^x \to g = e^x$ $f = \cos 10x \to f' = -10\sin 10x$
$I(x) = \frac{1}{2}e^x \sin 10x - 5e^x \cos 10x - 50\underbrace{\int e^x \sin 10x\, dx}_{2I(x)}$	
$101\, I(x) = \frac{1}{2}e^x \sin 10x - 5e^x \cos 10x + C$	
$I(x) = \frac{1}{202}e^x(\sin 10x - 10\cos 10x) + C$	

22 aout 2012 (Modifié le 10 décembre 2013 Dominique Druez)

EXANA321 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Parmi tous les triangles rectangles dont l'hypoténuse est de longueur 6, quel est celui qui engendre, lorsqu'on le fait tourner autour d'un des côtés de l'angle droit, un cône de volume maximum? Quel est le volume de ce cône?



Equation de la droite : $\dfrac{y}{\sqrt{6^2-\lambda^2}} + \dfrac{x}{\lambda} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{6^2-\lambda^2}\left(1-\dfrac{x}{\lambda}\right)$

Le volume du cône est alors : $V = \pi\left(6^2-\lambda^2\right)\int_0^\lambda \left(1-\dfrac{x}{\lambda}\right)^2 dx = \dfrac{\pi}{3}\lambda\left(6^2-\lambda^2\right)$

Le colume sera maximum si $\dfrac{dV}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{3}\left(6^2-3\lambda^2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\sqrt{3}}$

λ		$2\sqrt{3}$	
$\dfrac{dV}{d\lambda}$	$+$	0	$-$
V	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Le volume vaut alors : $\boxed{V_{\max} = 16\pi\sqrt{3}}$

EXANA322 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|(\ln|x| - 1)$ pour tout réel non nul.

a) f est-elle paire, impaire? Justifier.

b) Déterminer les zéros de f.

c) Que vaut la limite de $f(x)$

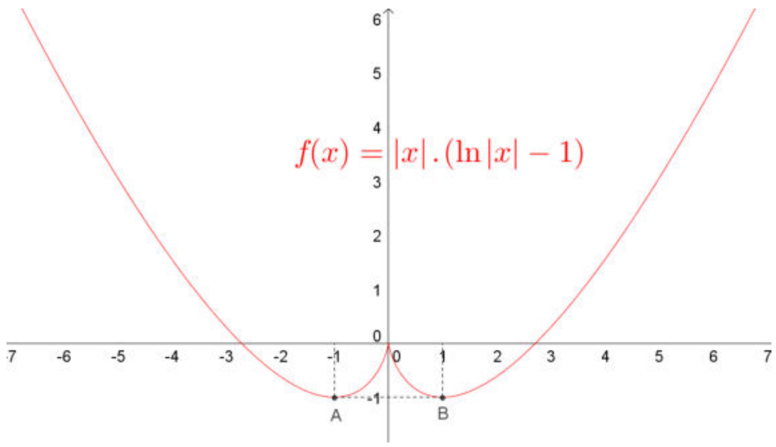
- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0? Justifier.

d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

e) Que vaut la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0? Justifier.

f) Trouver les éventuels maxima, minima et point d'inflexion de f.
Justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Esquissez le graphe de la fonction f.



a) $f(-x)=|-x|(\ln|-x|-1)=|x|(\ln|x|-1)=f(x)\Rightarrow$ Fonction paire.

b) $|x|(\ln|x|-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \ln|x|=1\Rightarrow x=\pm e\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|(\ln|x|-1)=+\infty.+\infty=+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}|x|(\ln|x|-1)=[0\times\infty]=\lim_{x\to0^+}x.(\ln x-1)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x-1}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

d) • $x>0$

$$\Rightarrow f'(x)=(x(\ln x-1))'=\ln x-1+x.\frac{1}{x}=\ln x \qquad \left(\text{donc }\lim_{x\to0^+}f'(x)=-\infty\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x}$$

• $x<0$

$$\Rightarrow f'(x)=(-x(\ln(-x)-1))'=-(\ln(-x)-1)-x.\frac{1}{-x}.(-1)=-\ln(-x)$$

$$\left(\text{donc }\lim_{x\to0^-}f'(x)=+\infty\right)$$

$$\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x}$$

e) $f'(x)$ s'annule en $x=\pm1$,

$f''(x)$ n'a pas de solution (pas de point d'inflexion) et est toujours positive (concavité >0)

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$	
f''		$+$	$+$	$+$	/	$+$	$+$	$+$	
f		$\searrow$	min $(-1,-1)$	$\nearrow$	/	$\searrow$	min $(1,-1)$	$\nearrow$	

24 aout 2012

EXANA323 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Calculer (en justifiant les calculs) :

a) $\int (x-3)^2 \ln x \, dx$

b) $\int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| \, dx$

---

a) $I = \int (x-3)^2 \ln x \, dx$

$$\left.\begin{array}{ll} f = \ln x & f' = \dfrac{1}{x} \\ g' = (x-3)^2 & g = \dfrac{(x-3)^3}{3} \end{array}\right. \Rightarrow I = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \underbrace{\int \frac{(x-3)^3}{3x} dx}_{=I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{(x-3)^3}{3x} dx = \int x^2 - 3x + 9 - \frac{9}{x} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 9\ln x$$

$$\Rightarrow I = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 9x + 9\ln x + C$$

b) La fonction $f(x) = |\sin(5x)|$ est paire et de période $\dfrac{\pi}{5}$.

L'intervalle $[-200\pi, 50\pi]$ correspond à 1250 périodes.

$$I = \int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| \, dx = 1250 \int_0^{\pi/5} \sin 5x \, dx = -1250.\frac{1}{5}.[\cos 5x]_0^{\pi/5} = -250(\cos\pi - \cos 0) = 500$$

Solution proposée par Dominique Druez

a) $I(x) = \int (x-3)^2 \ln x \, dx$

$$I(x) = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \int \frac{(x-3)^3}{3x} dx$$

$$\int \frac{(x-3)^3}{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^2 - 9x + 27 - \frac{27}{x} dx = \frac{x^3}{9} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 9\ln x + C$$

$$I(x) = \frac{(x-3)^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{3}{2}x^2 - 9x + 9\ln x + C$$

b)

$$\int_{-\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{5}} |\sin 5x| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{5}} \sin 5x \, dx$$

$$\int_{-200\pi}^{50\pi} |\sin 5x| dx = 2.625.\left[-\frac{1}{5}\cos 5x\right]_0^{\frac{\pi}{5}} = -250.(-1-1) = 500$$

Intégration par partie

$g' = (x-3)^2 \rightarrow g = \dfrac{(x-3)^3}{3}$

$f = \ln x \rightarrow f' = \dfrac{1}{x}$

$période\ de \sin 5x = \dfrac{2\pi}{5}$

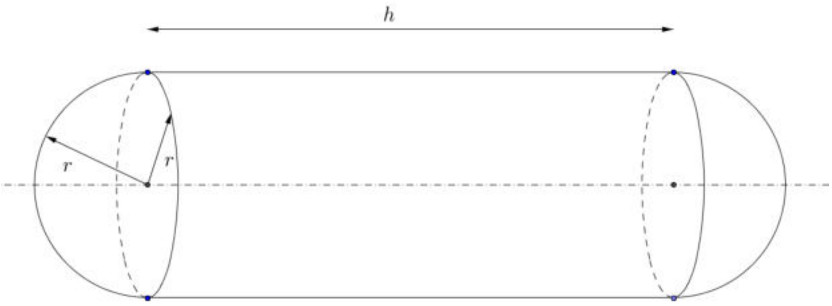
$\rightarrow \dfrac{250\pi}{2\pi/_5} = 625\ périodes$

---

24 aout 2012. Modifié le 10 décembre 2013 (Dominique Druez).

EXANA324 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Une capsule en forme de cylindre circulaire terminé à chaque extrémité par une demi-sphère, a un volume de 10 cm^3.
Que vaut l'aire totale A de cette capsule, exprimée en fonction du rayon r des demi-sphères?
Pour quelle valeur de r cette aire est-elle minimum?



1) Rappel : Sphère de rayon $r : V = \frac{4}{3}\pi r^3;\ A = 4\pi r^2$

2) $V = V_{sphère} + V_{cylindre} = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 10 \Rightarrow h = \frac{30 - 4\pi^2 r^3}{3\pi r^2}$

or $A = A_{sphère} + A_{cylindre} = 4\pi r^2 + 2\pi r h = 4\pi r^2 + 2\pi r \frac{30 - 4\pi^2 r^3}{3\pi r^2}$

$$= 4\pi r^2 + \frac{2}{3}\frac{30 - 4\pi r^3}{\pi r} = \frac{4\pi r^3 + 60}{3r}$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{4}{3}\left(2\pi r^3 - 15\right) \Rightarrow 2\pi r^3 = 15 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}} \Rightarrow A = 12\sqrt{\frac{25\pi}{4}}$$

r		$\sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$	
$\frac{dA}{dr}$	$-$	0	$+$
A	↘	min	↗

Donc A est minimum pour $r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$. Dans ce cas : $h = \frac{30 - 4\pi^2 \frac{15}{2\pi}}{3\pi\sqrt[3]{\left(\frac{15}{2\pi}\right)^2}} = 0$

C'est-à-dire que la capsule est en fait bien une sphère.

---

24 aout 2012

EXANA325 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Soit une fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (C'est-à-dire dérivable et dont la dérivée première est continue) telle que $\phi(a) = -1$ et $\phi(b) = 1$.

a) Calculer l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{\phi'(t)}{1+\phi^2(t)}\, dt$$

b) En utilisant un raisonnement similaire, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{4+\sin^2(t)}\, dt$$

c) Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin(\sin(2x))\right)^2}{x^2}$$

d) Démontrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$ est bijective.

On note $g = f^{-1}(x)$ la fonction réciproque. Exprimez g' et g'' en fonction de g.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. a) $\begin{cases} x=\phi(t) \\ dx=\phi'(t)\,dt \\ \text{si } t=a,\ x=\phi(a)=-1 \\ \text{si } t=b,\ x=\phi(b)=1 \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan 1-\arctan(-1)=\frac{\pi}{2}$

b) $\begin{cases} x=\sin t \\ dx=\cos t\ dt \\ \text{si } t=\frac{\pi}{2},\ x=1 \\ \text{si } t=0;\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{0}^{1}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin(\sin(2x))\right)^2}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin(\sin(2x))}{\sin 2x}.\frac{\sin 2x}{2x}.2\right]^2=(1\times 1\times 2)^2=4$

ou bien $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin(\sin(2x))\right)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2}=4$

car $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.x=1\times\lim\limits_{x\to 0}x$

3) f est bijective car $f'(x)=3x^2+1>0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc injective. L'image de f est $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

$\left(f^{-1}\right)'=g'=\frac{1}{f'\circ g}=\frac{1}{3g^2+1}$

$g''=-\left(3g^2+1\right)^{-2}.g'.6g=-\frac{6g}{\left(3g^2+1\right)^3}$

15 aout 2012

EXANA326 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

a) Démontrer que f est prolongeable par continuité à l'origine.

b) Démontrez que le graphe de f admet à l'origine des demi-tangentes à gauche et à droites distinctes.

c) Etudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative. On précisera le domaine de définition, les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrémas eventuels. On n'étudiera ni la concavité ni les points d'inflexion.

Solution proposée par Nicole Berckmans

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0_D} = \left[\dfrac{0}{1+\infty}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0_G} = \left[\dfrac{0}{1+0}\right] = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f = 0; \text{ dés lors } f \text{ admet un prolongement continu en } x=0. \\ \text{On pose } f(0)=0.\end{array}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}} \quad \nexists \text{ car } \begin{cases} f'(0)_G = 1 \Rightarrow T_G(0,0) \equiv y = x \\ f'(0)_D = 0 \Rightarrow T_D(0,0) \equiv y = 0 \end{cases}$

c) Pas d'AV par a)

Pas d'AH car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$AO \equiv y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \dfrac{1}{2}x = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{1}{1+e^{1/x}} - \dfrac{1}{2}\right] = [\infty \times 0] \\ = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+e^{1/x}} - \dfrac{1}{2}}{1/x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{-1}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}.e^{1/x}.\cancel{\left(\frac{1}{x}\right)'}}{\cancel{\left(\frac{1}{x}\right)'}} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

f est non dérivable en $x=0$ (voir b)

Pour $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{x + xe^{1/x} + e^{1/x}}{x\left(1+e^{1/x}\right)^2} = \dfrac{1+e^{1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est strictement positif.

Pour $x < 0$, montrons que le numérateur de $f'(x)$ est aussi strictement positif.

<u>1ère méthode</u> : Posons $z = \dfrac{1}{x}$, étudions $g(z) = 1 + e^z(1+z)$

$g'(x) = e^z(2+z)$

$g(-2) = 1 - \dfrac{1}{e^2} > 0$

car $e^2 > 1$

x		-2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$

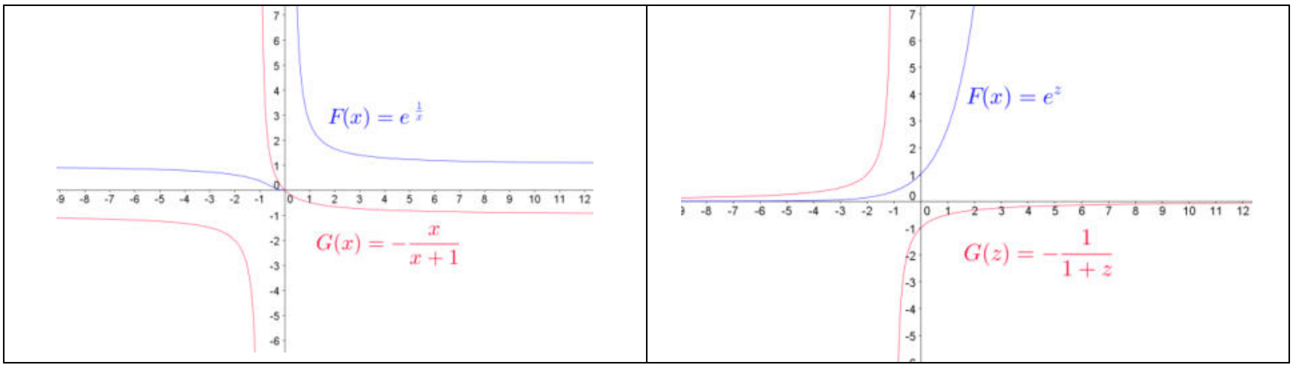
Par conséquent $\forall$z=g$(z) > 0$ et donc $f'(x) > 0$

<u>2ème méthode</u> : Si $f'(x) = 0$ alors $e^{1/x} = -\dfrac{x}{x+1}$. Dans ce cas le graphe de $F(x) = e^{1/x}$ coupe le graphe de $G(x) = -\dfrac{x}{x+1}$. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'on examine leur graphe. (Voir ci-dessous)

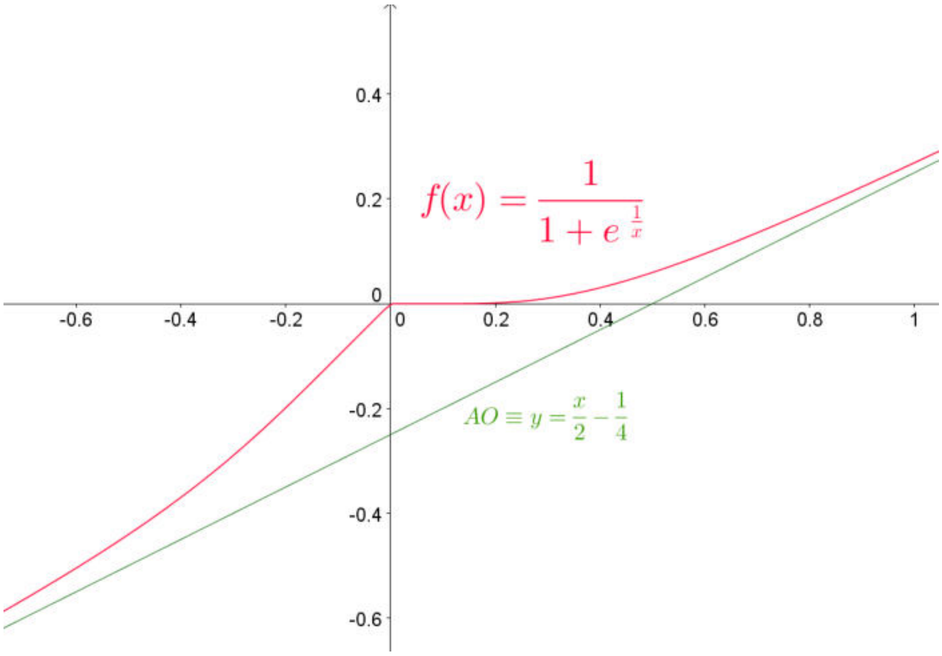
<u>3éme méthode</u> : On aurait pu aussi comparer les graphes de $F(z) = e^z$ et $G(z) = \dfrac{-1}{1+z}$ (Voir ci-dessous)

Le tableau de variations de $f(x)$ est donc :

x		0	
$f'(x)$		$1 \mid 0$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$



$F(x) = e^{\frac{1}{x}}$
$G(x) = -\frac{x}{x+1}$
$F(x) = e^{z}$
$G(z) = -\frac{1}{1+z}$



$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
$AO \equiv y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

20 aout 2012

EXANA327 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Intégrer

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{25+16x^2}}$$

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{25+16x^2}}$$

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}\qquad \text{On pose }\frac{4x}{5}=\tan\theta\Rightarrow\begin{cases}dx=\dfrac{5}{4}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}\\[2mm]\theta=\arctan\dfrac{4x}{5}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\frac{5}{4}\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{5}{4}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{5}\int\frac{}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{5}\int\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\text{On pose } u=\tan\frac{\theta}{2}\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{2u}{1+u^2}\\[2mm] d\theta=\dfrac{2du}{1+u^2}\end{cases}\Rightarrow I=\frac{1}{5}\int\frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2du}{1+u^2}=\frac{1}{5}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{5}\ln|u|$$

$$I=\frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|=\frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{\arctan\frac{4x}{5}}{2}\right|\qquad \text{or }\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1-\cos\arctan\frac{4x}{5}}{\sin\arctan\frac{4x}{5}}\right|=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1-\cos\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}}{\sin\arcsin\frac{\frac{4x}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}}\right|=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}}{\frac{\frac{4x}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}}\right|$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\left(\frac{4x}{5}\right)^2}-1}{\frac{4x}{5}}\right|=\boxed{\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{25+16x^2}-5}{4x}\right|+C}\qquad \text{Ouf!}$$

---

30 janvier 2021

EXANA328 – EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 2.

1. Etudiez la dérivabilité à l'origine de la fonction f définie par

$$f(x) = \cos\sqrt{x}$$

2. Calculez les intégrales suivantes.

a) $$\int_{-1}^{1}\left(x^2-\sqrt{|x|}\right)x^2dx$$

b) $$\int_{-2}^{2}\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)x^2dx$$

3. Le théorème de Rolle s'énonce ainsi : si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$. Utilisez ce résultat pour prouver que l'équation

$$\mathrm{x}^3-3x+2012=0$$

ne possède pas deux solutions distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1). $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}=f'(0)$

2) a) f est paire et donc

$$I=\int_{-1}^{1}\left(x^2-\sqrt{|x|}\right)\sqrt[3]{x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\left(x^2-\sqrt{|x|}\right)\sqrt[3]{x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}x^{8/3}-x^{7/6}dx$$

$$=2\left[\frac{x^{11/3}}{11/3}-\frac{x^{13/6}}{13/6}\right]_0^1=2\left[\frac{3}{11}-\frac{6}{13}\right]=-\frac{54}{143}$$

b) f est impaire et donc $\int\left(x^3-\sqrt[3]{x}\right)x^2dx=0$

3) $f(x)=x^3-3x+2012$; $f'(x)=3x^2-3$. Sur $[-1,1]$, f est une fonction strictement décroissante par conséquent f est injective. Si on veut utiliser le théorème de Rolle, on pour pourrait dire que si f admettait 2 racines différentes a et b dans $[-1,1]$ alors il existerait $c\in\left]\,a,b\,\right[$ tel que $f'(c)=0$ ce qui n'est pas le cas dans $\left]-1,1\right[$

---

6 octobre 2010

EXANA329 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\ln x-x^2-1\right)$$

a) Donnez le domaine de définition de f.

b) Démontrez que la dérivée de f s'annule pour une seule valeur a et que cette valeur est comprise entre 1 et 2.

c) Etudiez les variations de f et tracer sa courbe représentative. On précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrémas éventuels. On n'étudiera ni la concavité ni les points d'inflexion.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

a) $dom\ f=\mathbb{R}_0^+$

b) $f'(x)=\dfrac{2-x^2-\ln x}{x^2}$; $f'(1)=1>0$ et $f'(2)=\dfrac{2-\ln 2}{4}<0$ car $\ln 2>\ln 1=0$.

f' est continue sur $[1,2]$ et dès lors en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que f' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]1,2[$.

Puisque $f''(x)=\dfrac{2\ln x-5}{x^3}$ est strictement négatif sur $[1,2]$, on peut affirmer que sur cet intervalle f' est scritement décroissante. On en déduit dès lors qu'il existe une seule valeur a dans $[1,2]$ tel que $f'(x)=0$.

Autre raisonnement | Les courbes $y=\ln(x)$ et $y=-x^2+2$ se coupent une seule fois sur $[1,2]$

c) $AV\equiv x=0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\left[\dfrac{-\infty-0-1}{0^+}\right]=-\infty$

$AH\ \nexists$ car $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}-x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)-\infty-0=-\infty$

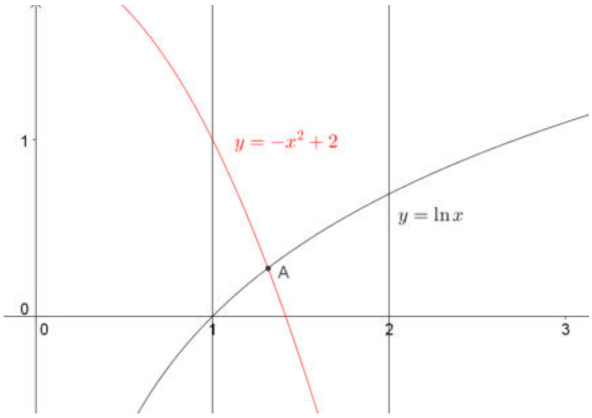
$AO\equiv y=-x$

car $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=-1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{2x}=-1$

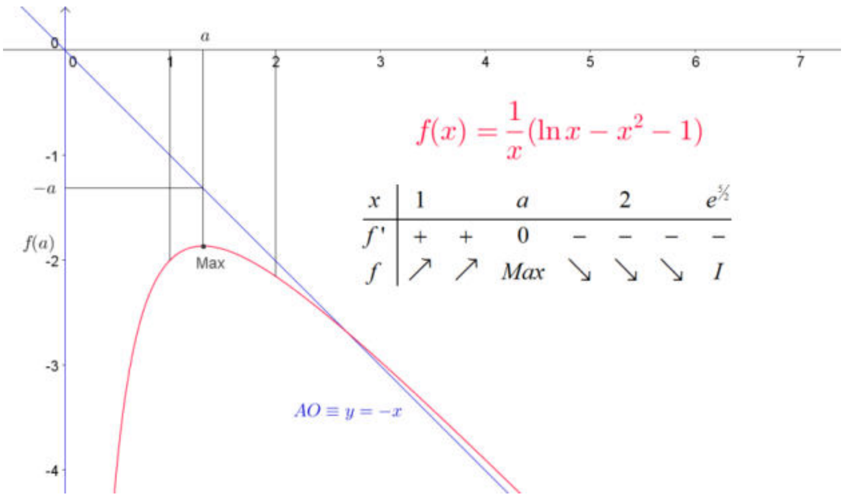
et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x-1}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

<u>rem</u> : $f'(a)=0\Rightarrow \ln x=2-a^2; f(a)=\dfrac{\ln a-a^2-1}{a}=\dfrac{1-2a^2}{a}<0$ car $1<a<2$

Le maximum est situé en dessous de l'AO et la courbe coupe l'AO en un point situé entre le max et le point I



$y = -x^2 + 2$
$y = \ln x$
A



a
$-a$
$f(a)$
Max
$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - x^2 - 1)$
x | 1 | a | 2 | $e^{5/2}$
f' | + + 0 − − − −
f | ↗ ↗ Max ↘ ↘ ↘ I
$AO \equiv y = -x$

Aout 09