Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 33

EXANA330 – EXANA339

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

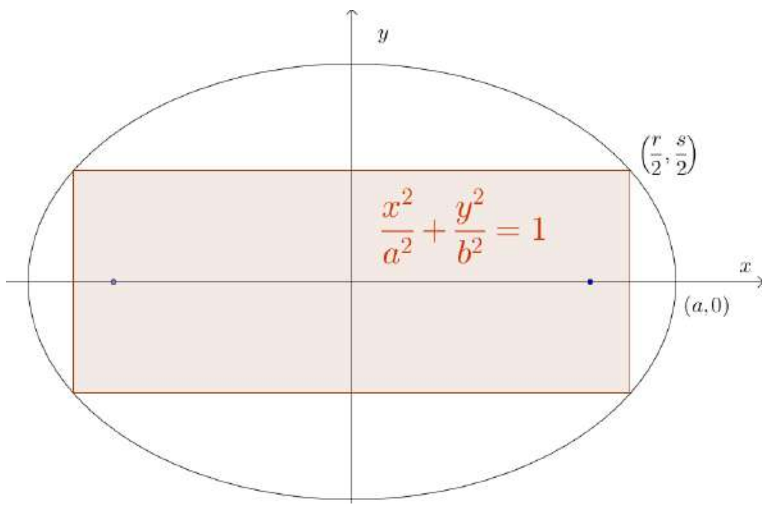
Aout 2012

EXANA330 – – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 2.

On considère une ellipse ε dont la longueur du demi-grand axe vaut a et celle du demi-petit axe vaut b. On considère un rectangle R inscrit dans ε dont les côtés sont de longueurs r et s, $r \geq s$.

1. Trouver r et s, fonctions de a et b, qui maximisent l'aire de R.
2. Trouver r et s, fonctions de a et b, qui maximisent le périmètre de R.
3. Trouver r et s, fonctions de a et b, qui minimisent le périmètre de R.

Solution proposée par Nicole BERCKMANS



Je simplifie la question posée en supposant :

$$\begin{cases} \bullet \text{ que le rectangle inscrit à l'ellipse à ses côtés parallèles aux axes.} \\ \bullet \text{ que } r \text{ désigne la longueur du côté horizontal.} \\ \bullet \text{ que } s \text{ désigne la longueur du côté vertical.} \\ \bullet \text{ je ne tiens pas compte que } s \le r \end{cases}$$

Aire: $A = rs$ où $\dfrac{r^2}{4a^2} + \dfrac{s^2}{4b^2} = 1 \Rightarrow A(r) = \dfrac{b}{a} r\sqrt{4a^2 - r^2}$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{b\left(4a^2 - 2r^2\right)}{a\sqrt{4a^2 - r^2}} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} r & 0 & & \sqrt{2}a & & 2a \\ \hline \dfrac{dA}{dr} & & + & 0 & - & \\ A & 0 & \nearrow & Max = 2ab & \searrow & 0 \end{array}$$

Périmètre : $P = 2r + 2s \Rightarrow P(r) = 2\left(r + \dfrac{b}{a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right)$

$$\frac{dP}{dr} = 2\left(1 - \frac{br}{a\sqrt{4a^2 - r^2}}\right) \text{ s'annule en } r = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} r & 0 & & \dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} & & 2a \\ \hline \dfrac{dP}{dr} & & + & 0 & - & \\ P & \begin{matrix} 4b \\ Min\ local \end{matrix} & \nearrow & Max = 4\sqrt{a^2 + b^2} & \searrow & \begin{matrix} 4a \\ Min\ local \end{matrix} \end{array}$$

Note : Si on travaille avec l'équation paramètrique de l'ellipse $r = 2a\cos\varphi$ et $s = 2b\sin\varphi$

alors $A = rs = 4ab\sin\varphi\cos\varphi = 2ab\sin(2\varphi)$ qui maximum pour $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ et vaut alors $2ab$.

L'équation paramètrique est moins intéressante pour le calcul du périmètre maximum.

21 aout 2012

EXANA331 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

On considère la fonction

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 2\beta(x+1)$$

où β désigne un paramètre réel non nul en fonction duquel les propriétés de f seront discutées.

i. Déterminer le domaine de définition de f.

ii. Calculer les limites de f aux frontières de son domaine de définition et déterminez les éventuelles asymptotes.

iii. Identifiez et caractériser les éventuels extrema locaux de f.

iv. Etudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion.

v. Dressez un tableau récapitulatif des propriétés de f et esquissez son graphe.

vi. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles $f \le 0$ sur $[0,+\infty[$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. On peut écrire $f(x) = 2x^{2/3} - 2\beta x - 2\beta$ et, puisque le terme dominant à l'infini est $-2\beta x$, calculer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2\beta x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \beta > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2\beta x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \beta > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Examinons l'existence éventuelle d'une asymptote oblique en $\pm\infty$ en calculant

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x^{-1/3} - 2\beta - 2\beta x^{-1}\right) = -2\beta$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + 2\beta x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(2x^{2/3} - 2\beta\right) = +\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique.

Enfin, puisque la fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Nous concluons qu'il n'existe aucune asymptote, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$.

iii. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{-1/3} - 2\beta = \frac{4-6\beta\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$$

qui s'annule si

$$4-6\beta\sqrt[3]{x} = 0 \qquad \text{soit si} \qquad x = \left(\frac{2}{3\beta}\right)^3 \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \\ < 0 & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

La dérivée change de signe de part et d'autre de l'origine mais n'y est pas définie. On a, $\forall\beta \in \mathbb{R}_0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$

La fonction présente donc un point de rebroussement en $x = 0$.

Si $\beta > 0$, nous avons le tableau de variation suivant

x		0		$\left(\frac{2}{3\beta}\right)^3$	
$4-6\beta\sqrt[3]{x}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

et, si $\beta < 0$, le tableau de variation devient

x		$\left(\frac{2}{3\beta}\right)^3$		0	
$4-6\beta\sqrt[3]{x}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3\sqrt[3]{x}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Nous constatons que, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$, f présente un minimum local en $x = 0$ (puisque f est définie et continue à l'origine, décroissante à gauche et croissante à droite) avec

$$f(0) = -2\beta \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad \beta > 0 \\ > 0 & \text{si} \quad \beta < 0 \end{cases}$$

De même, f présente un maximum local en $x = (2/3\beta)^3$ avec

$$f\left([2/3\beta]^3\right) = \frac{8-54\beta^3}{27\beta^2}\begin{cases} >0 & \text{si} \quad \beta < \sqrt[3]{4}/3 \\ =0 & \text{si} \quad \beta = \sqrt[3]{4}/3 \\ <0 & \text{si} \quad \beta > \sqrt[3]{4}/3 \end{cases}$$

iv. On calcule

$$f''(x) = -\frac{4}{9}x^{-4/3} = \frac{-4}{9\sqrt[3]{x^4}} < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_0$$

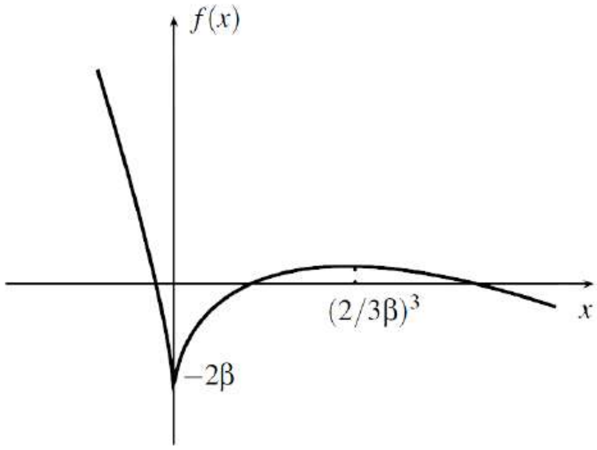
Il n'y a pas de point d'inflexion et la concavité de f est tournée vers le bas quel que soit $\beta \in \mathbb{R}_0$.

v. Dressons les tableaux récapitulatifs et esquissons le graphe de f.

- Si $\beta > 0$,

x	$-\infty$		0		$\left(\frac{2}{3\beta}\right)^3$		$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	0	$-$	$-$
f''	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	$-$
f	$+\infty$	$\searrow$	min -2β <0	$\nearrow$	Max $\frac{8-54\beta^3}{27\beta^2}$ $\begin{cases} >0 & \text{si} \quad \beta < \sqrt[3]{4}/3 \\ =0 & \text{si} \quad \beta = \sqrt[3]{4}/3 \\ <0 & \text{si} \quad \beta > \sqrt[3]{4}/3 \end{cases}$	$\searrow$	$-\infty$

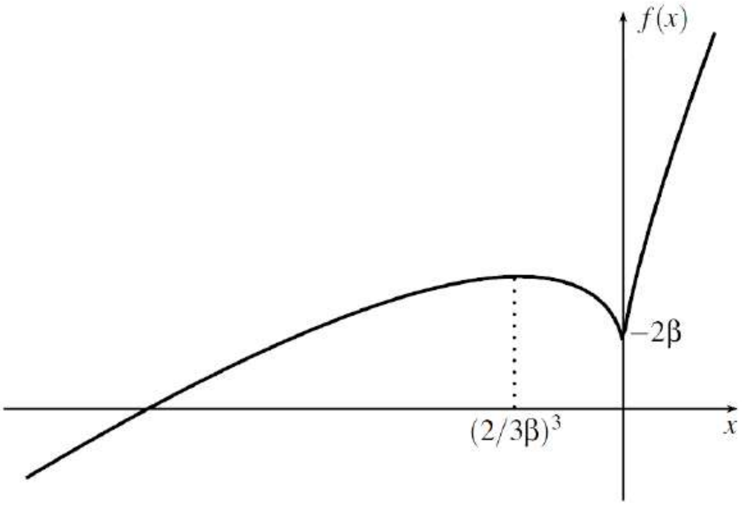
Le graphe a donc l'allure suivante dans le cas où $\beta \in]0, \sqrt[3]{4}/3[$. Les deux autres cas, qui ne diffèrent que par le signe de la fonction au maximum local, ne sont pas représentés ici mais s'en déduisent immédiatement.



- Si $\beta < 0$,

x	$-\infty$		$\left(\frac{2}{3\beta}\right)^3$		0		$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty \mid +\infty$	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$-$	$-\infty$	$-$	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max $\frac{8-54\beta^3}{27\beta^2}$ >0	$\searrow$	min -2β >0	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe présente l'allure suivante



vi. Dans le cas où $\beta > 0$, on a $f \leq 0$ sur $[0, +\infty[$ si et seulement si le maximum de f sur cet intervalle est négatif ou nul, soit ssi $\beta \geq \sqrt[3]{4}/3$.

EXANA332 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

A partir d'une fonction f_0 continue sur l'intervalle $]0,1[$, on définit la séquence de fonctions $f_1, f_2, ...$ elles-mêmes définies sur $]0,1[$, par la formule de récurrence

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

i. On considère d'abord $f_0(t) = t^2$.

(a) Calculer f_1 et f_2.

(b) Donner l'expression générale de f_n

ii. Calculez f_1 dans le cas où $f_0(t) = t\exp(t)$ (Ce qui peut aussi être noté $f_0(t) = te^t$).

iii. Montrez que, quelle que soit la fonction f_0 choisie pour initier la séquence de fonctions, on a

$$f_n^{'}(x) = \frac{f_{n-1}(x) - f_n(x)}{x} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

iv. Si la fonction f_1 est strictement croissante sur $]0,1[$, situez les graphes des fonctions f_0 et f_1 l'un par rapport à l'autresur cet intervalle.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. (a) On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_0(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^2}{3}$$

et

$$f_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_1(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{3}dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{9}\right]_0^x = \frac{x^2}{9}$$

(b) Chaque nouvelle intégration conservant la même puissance de x mais amenant un facteur $1/3$, il vient

$$f_n(x) = \frac{x^2}{3^n}$$

ii. On a

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_0(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t\,\mathrm{e}^t\,dt$$

où l'intégrale peut être calculée par parties en écrivant

$$\int_0^x fg'\,dt = [fg]_0^x - \int_0^x f'g\,dt$$

avec $f = t$, $g' = \mathrm{e}^t$, $f' = 1$ et $g = \mathrm{e}^t$. On a donc

$$f_1(x) = \frac{1}{x}\left(\left[t\,\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\,dt\right) = \frac{1}{x}\left(x\mathrm{e}^x - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x\right) = \frac{1}{x}(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1)$$

iii. En dérivant le quotient

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x}$$

et en tenant compte de

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\right) = f_{n-1}(x)$$

on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$f_n'(x) = \frac{xf_{n-1}(x) - \displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x^2} = \frac{f_{n-1}(x) - \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt}{x}$$
$$= \frac{f_{n-1}(x) - f_n(x)}{x}$$

iv. Si la fonction f_1 est strictement croissante sur $]0,1[$, alors

$$f_1'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

Or, le résultat obtenu au point iii. nous apprend que

$$f_1'(x) = \frac{f_0(x) - f_1(x)}{x}$$

et donc

$$\frac{f_0(x) - f_1(x)}{x} \geq 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

soit

$$f_0(x) \geq f_1(x) \quad \forall x \in]0,1[$$

Le graphe de la fonction f_0 est donc situé au-dessus du graphe de la fonction f_1 sur $]0,1[$.

EXANA333 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2012.

On considère les courbes

$$x^2 - y^2 = \gamma \qquad \text{et} \qquad xy = \delta$$

où γ et δ désignent des constantes strictement positives.

i. Sur base de l'étude des pentes des tangentes à leur intersections, montrez que ces courbes se coupent à angle droit dans le premier quadrant dans le cas particulier où $\gamma = 1$ et $\delta = \sqrt{2}$

ii. Les courbes se coupent-elles à angle droit dans le premier quadrant quelles que soient les valeurs strictement positives de γ et δ.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Déterminons pour commencer les points d'intersection des deux courbes. Leurs coordonnées (x, y) vérifient le système

$$\begin{cases} xy = \sqrt{2} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

dès lors

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{2}{x^2} \\ y^2 = x^2 - 1 \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation bicarrée

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

dont la seule solution acceptable est $x^2 = 2$ soit $x = \pm\sqrt{2}$.
Le seul point d'intersection situé dans le premier quadrant est donc le point $(\sqrt{2}, 1)$.

Déterminons ensuite les pentes des deux courbes en ce point.
La première courbe a pour équation

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$$

On calcule alors

$$y_1'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2}$$

et

$$y_1'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Dans le premier quadrant, la deuxième courbe a pour équation

$$y_2(x) = \sqrt{x^2-1}$$

On calcule alors

$$y_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

et

$$y_2'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

On vérifie que

$$y_1'(\sqrt{2})\ y_2'(\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = -1$$

Les courbes se coupent donc bien à angle droit dans le premier quadrant.

ii. Déterminons pour commencer les points d'intersection des deux courbes. Leurs coordonnées (x,y) vérifient le système

$$\begin{cases} xy = \delta \\ x^2 - y^2 = \gamma \end{cases}$$

dès lors

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{\delta^2}{x^2} \\ y^2 = x^2 - \gamma \end{cases}$$

qui est équivalent à l'équation bicarrée

$$x^4 - \gamma x^2 - \delta^2 = 0$$

dont la seule solution acceptable est

$$x^2 = \frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}$$

soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}}$$

Le seul point d'intersection situé dans le premier quadrant est donc le point

$$(x_*, y_*) = \left(\sqrt{\frac{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}{2}}, \delta\sqrt{\frac{2}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\delta^2}}}\right)$$

La première courbe a pour équation

$$y_1(x) = \frac{\delta}{x}$$

On calcule

$$y_1'(x) = \frac{-\delta}{x^2}$$

Dans le premier quadrant, la deuxième courbe a pour équation

$$y_2(x) = \sqrt{x^2 - \gamma}$$

On calcule

$$y_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - \gamma}}$$

On a alors

$$y_1'(x)y_2'(x) = \frac{-\delta}{x^2}\frac{x}{\sqrt{x^2-\gamma}} = \frac{-\delta}{x\sqrt{x^2-\gamma}}$$

Au point d'intersection, on a $x_*^2-\gamma = y_*^2$ et $\delta/x_* = y_*$ et dès lors

$$y_1'(x_*)y_2'(x_*) = \frac{-y_*}{\sqrt{y_*^2}} = -1$$

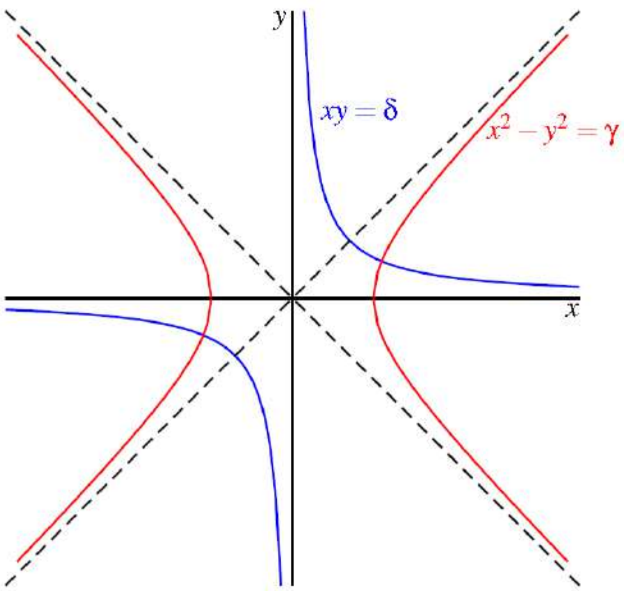
puisque $y_* > 0$.

Les courbes se coupent donc bien à angle droit dans le premier quadrant, quelles que soient les valeurs positives de γ et δ.

On notera, ainsi que le montre le dessin ci-dessous, que les familles de courbes étudiées

$$\begin{cases} xy = \delta \\ x^2-y^2 = \gamma \end{cases}$$

sont des hyperboles dites équilatères dont les asymptotes correspondent respectivement aux bissectrices du plan et aux axes de coordonnées.



EXANA334 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

a) On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative. Soit a un nombre réel positif. Démontrez qu'il existe une seule valeur de a pour laquelle la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente au point d'abscisse a et passant par l'origine.

b) Pour tout nombre réel x, la partie entière de x notée $E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}; E(x) \leq x < E(x) + 1$$

On note également $E(x)$ la fonction de

$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z} \ : \ x \mapsto E(x)$$

Démontrez que

$$\lim_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

On utilisera la relation : $x - 1 < E(x) \leq x$

c) On fait tourner autour de l'axe des x la région bornée par les courbes d'équation $x^2 = y - 2$ et $2y - x = 2$ et par les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$. Calculez le volume de révolution ainsi généré.

d) Calculez l'intégrale définie suivante:

$$\int_1^2 x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

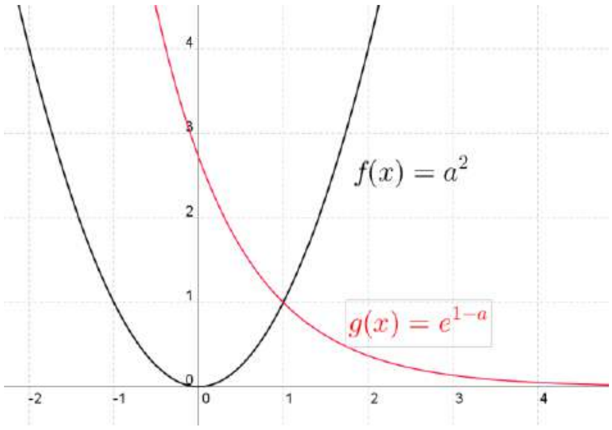
a) T : tangente en $(a, f(a))$; $T \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$O \in T \Leftrightarrow -f(a) = f'(a)(-a)$

$f(a) = ae^{a-1} + 1$; $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$

$$\begin{aligned} f(a) = f'(a).a &\Leftrightarrow ae^{a-1} + 1 = a(a+1)e^{a-1} \\ &\Leftrightarrow 1 = e^{a-1}(a^2 + a - a)\mu \\ &\Leftrightarrow a^2 = e^{1-a} \end{aligned}$$

Une seule racine positive pour cette équation : $\boxed{a = 1}$

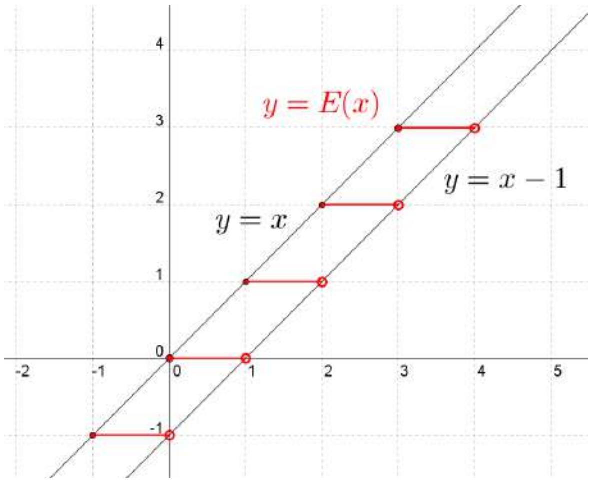


b) $\forall x: \quad x-1 < E(x) \le x$

$\forall x \neq 0: \ \frac{1}{x} - 1 < E(x) \le \frac{1}{x}$

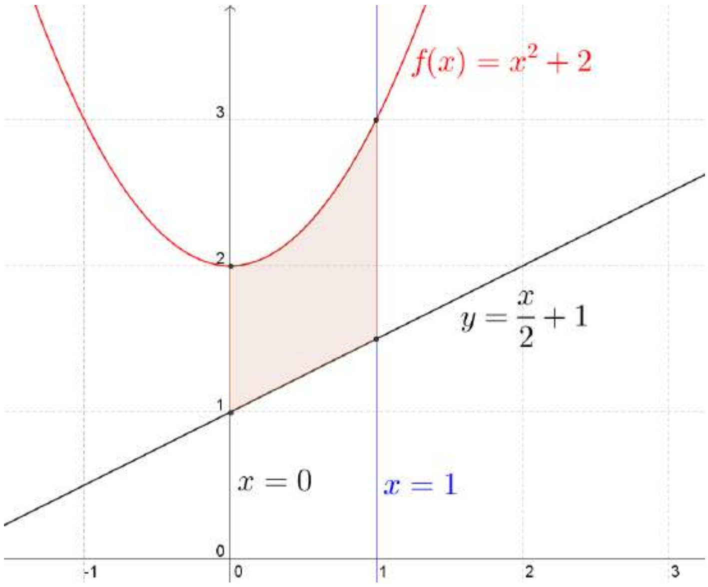
On multiplie par $x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{lll} \forall x > 0: & 1 - x < xE(x) \le 1 & \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 - x = 1 \\ \forall x < 0: & 1 - x > xE(x) \ge 1 & \lim\limits_{x\to 0^-} 1 = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 - x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} xE(x) = 1$$



c) $V = \pi \int_0^1 (x^2+2)^2 - \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2 + 4 - \frac{x^2}{4} - x - 1\right) dx$

$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{237}{60}$



d) $I = \int_1^2 x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ $\qquad u' = x \qquad u = \frac{x^2}{2}$

$v = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad v' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{x(x+1)}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[x - \ln(x+1)\right]_1^2$$

$$= 2\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2 - \ln 3 - 1 + \ln 2) = 2\ln\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 3$$

20 novembre 2012

EXANA335 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

On considère la fonction définie par

$$f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

a) Donnez le domaine de définition de f.

b) Etudiez les variations de f et tracer sa courbe représentative.

On précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de et de décroissance et les extrémas éventuels. On étudiera aussi la concavité de la fonction et ses points d'inflexion.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

a) Il faut $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow]\leftarrow, -1[\cup]1, \rightarrow[$

b) $\lim_{x\to\pm1} f(x) = \pm1 - \infty = -\infty \quad \Rightarrow \quad AV \equiv x = -1, x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = [-\infty + \infty] = +\infty = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = -\infty \times 1 = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{pas de } AH$$

$$\text{car } \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$$

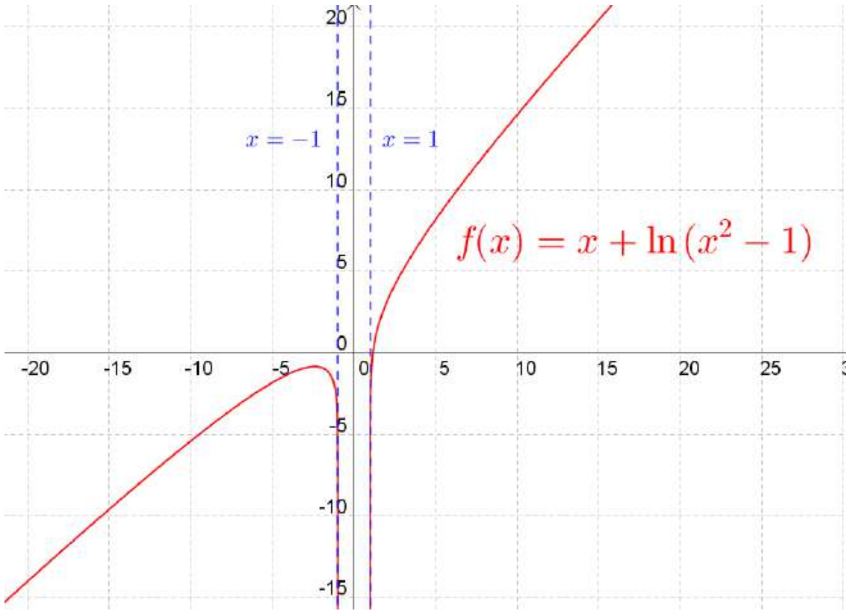
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{\ln(x^2-1)}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{pas de } AO$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1} \qquad x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2},$$

Max en $\left(-1-\sqrt{2}, f\left(-1-\sqrt{2}\right)\right)$

$$f''(x) = \left(1 + \frac{2x}{x^2-1}\right)' = \frac{2x^2 - 2x - 4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} < 0 \Rightarrow \text{concavité vers le bas de } f$$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	/				/	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	/				/	$\nearrow$	$+\infty$



1520 **novembre** 2012

EXANA336 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

On désire concevoir une cuve cylindrique dont le volume est V. Sachant que le revêtement de la paroi latérale est quatre fois plus cher par mètre carré que le revêtement de sa base. Calculez en fonction de V, la hauteur h de la cuve qui minimise son coût.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

On suppose la cuve sans couvercle.

Paroi latérale $= 2\pi Rh$

Base $= \pi R^2$

$V = \pi R^2 h$

Coût par mètre carré $= \left(8\pi Rh + \pi R^2\right)$

$$\text{Coût}(h) = c(h) = 8\pi\sqrt{\frac{V}{\pi h}}h + \frac{\pi V}{\pi h} = 8\sqrt{\pi V}.\sqrt{h} + \frac{V}{h}$$

$$c'(h) = \frac{4\sqrt{\pi V}}{\sqrt{h}} - \frac{V}{h^2} = \frac{4\sqrt{\pi V}.h\sqrt{h} - V}{h^2}$$

$$c' = 0 \Leftrightarrow h_0^{3/2} = \frac{V}{4\sqrt{\pi V}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{V}{\pi}} \Rightarrow \boxed{h_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$$

h	0		h_0	
c'	$-\infty$	$-$	0	$+$
c		$\searrow$	min	$\nearrow$

---

20 novembre 2012

EXANA337 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

On considère la famille de fonctions

$$f(x) = \alpha \frac{x}{x+\beta} \arctan x + \gamma$$

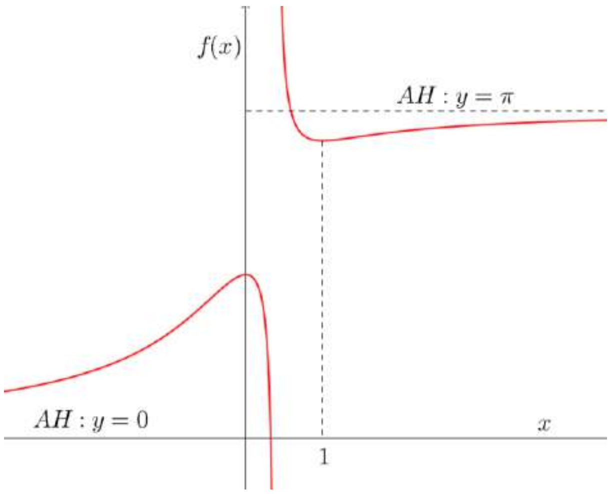
où α, β et γ désignent trois paramètres réels.

Le graphique ci-dessous a été obtenu par logiciel en choisissant des valeurs particulières non nulles pour les paramètres.

i. Retrouvez les valeurs particulières de α, β et γ utilisées pour tracer ce graphique sachant que la graphe de f présente
   - une asymptote horizontale $y = \pi$ en $+\infty$;
   - une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$;
   - des extremas locaux en $x = 0$ et $x = 1$.

ii. Pour les valeurs des paramètres identifiées au point précédent, déterminez l'équation de l'asymptote verticale visible sur le graphique.

iii. De façon générale, déterminer pour quelles valeurs des paramètres le graphe présente un maximum local en $x = 0$.



Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. L'existence des asymptotes horizontales données en $+\infty$ et en $-\infty$ se traduit mathématiquement par

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

En évaluant les limites et en tenant compte de

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+\beta} = 1$$

il vient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha\frac{\pi}{2} + \gamma = \pi$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\alpha\frac{\pi}{2} + \gamma = 0$$

On en déduit que

$$\alpha = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, l'existence d'extrema aux points $x = 0$ et $x = 1$ où la fonction est dérivable demande l'annulation de la dérivée en ces points. On calcule d'abord

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha}{(x+\beta)^2}\left[\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right)(x+\beta) - x \operatorname{arctg} x\right] \\ &= \frac{\alpha}{(x+\beta)^2}\left[\beta \operatorname{arctg} x + \frac{x(x+\beta)}{1+x^2}\right] \end{aligned}$$

Quelles que soient les valeurs des paramètres, la dérivée s'annule toujours à l'origine (Rappelons que β est supposé non nul.). Ceci ne permet donc pas de déterminer les valeurs des paramètres. Tenant compte de l'existence d'un extremum en $x = 1$, il vient (en supposant $\beta \neq -1$)

$$f'(1) = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2}\left[\beta\frac{\pi}{4} + \frac{1+\beta}{2}\right] = 0$$

de sorte que

$$\beta = -\frac{2}{2+\pi}$$

Remarquons que l'annulation de la dérivée en $x = 0$ et en $x = 1$ ne garantit pas formellement la présence d'extrema en ces points. Cependant, comme l'annulation de la dérivée constitue une condition nécessaire pour la présence d'extrema et que cette condition n'est rencontrée que pour les seules valeurs des paramètres identifiées plus haut, on en déduit que le graphique a bien été tracé dans le cas particulier où

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -\frac{2}{2+\pi} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

ii. Avec les valeurs des paramètres identifiées plus haut, le graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x - \frac{2}{2+\pi}} \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$$

présente une asymptote verticale

$$x = \frac{2}{2+\pi}$$

puisque

$$\lim_{x \to \left(\frac{2}{2+\pi}\right)^+} f(x) = +\infty, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \left(\frac{2}{2+\pi}\right)^-} f(x) = -\infty$$

iii. Comme indiqué ci-dessus, on a toujours $f'(0) = 0$ quelles que soient les valeurs des paramètres. On peut déduire la nature du point stationnaire à l'origine en examinant la courbure du graphe via l'étude du signe de $f''(0)$. Après quelques calculs, on obtient

$$f''(x) = \frac{-2\alpha}{(x+\beta)^3}\left[\beta \operatorname{arctg} x + \frac{(x^3-\beta)(x+\beta)}{(1+x^2)^2}\right]$$

et

$$f''(0) = \frac{2\alpha}{\beta}$$

Le graphe présente un maximum local à l'origine si sa concavité est dirigée vers le bas, c'est-à-dire si

$$\alpha/\beta < 0$$

c'est-à-dire si α et β sont de signes opposés.

EXANA338 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

i. Déterminez toutes les primitives des deux fonctions ci-dessous et précisez-en les domaines de définition :

- $\dfrac{x^2}{1-x}$
- xe^x

ii. Calculez les deux intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{1-x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x}\,dx$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Calcul des primitives.

- La première primitive peut être calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1-x}dx &= \int \frac{x^2-1+1}{1-x}dx \\ &= \int \left(-\frac{1-x^2}{1-x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \int\left(-(1+x)+\frac{1}{1-x}\right)dx \\ &= -x-\frac{x^2}{2}-\ln|1-x|+C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.
Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

- Pour calculer la seconde primitive, on utilise la formule d'intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

En posant

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad g(x) = x$$

on a

$$\int \mathrm{e}^x x\,dx = \mathrm{e}^x x - \int \mathrm{e}^x 1\,dx = \mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x + C$$

Cette primitive est définie sur $\mathbb{R}$.

ii. Calcul des intégrales.

- La première intégrale est évaluée directement selon

$$\int_1^2 \frac{x}{1-x^2}dx = \left[\frac{-1}{2}\ln|1-x^2|\right]_2^3 = -\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

- La deuxième intégrale peut être évaluée en effectuant le changement de variable $y = \sin x$

$(dy = \cos x\, dx)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{1-y} dy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y-1+1}{1-y} dy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1-y}\right) dy \\
&= \Big[-y - \ln|1-y|\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

27 novembre 2012

EXANA339 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

On détermine expérimentalement la déformation d d'un absorbeur de chocs en fonction de la vitesse v de l'impact. Les mesures étant réalisées à différentes vitesses non nulles, on dispose d'un ensemble de n points expérimentaux $(v_i, d_i)(i = 1,...,n)$

Suspectant une dépendance quadratique de la déformation en fonction de la vitesse, on souhaite ajuster le paramètre α pour représenter aussi bien que possible les données expérimentales par une loi théorique de la forme

$$d = \alpha v^2$$

Pour ce faire on détermine la valeur α permettant de mimiser l'erreur quadratique

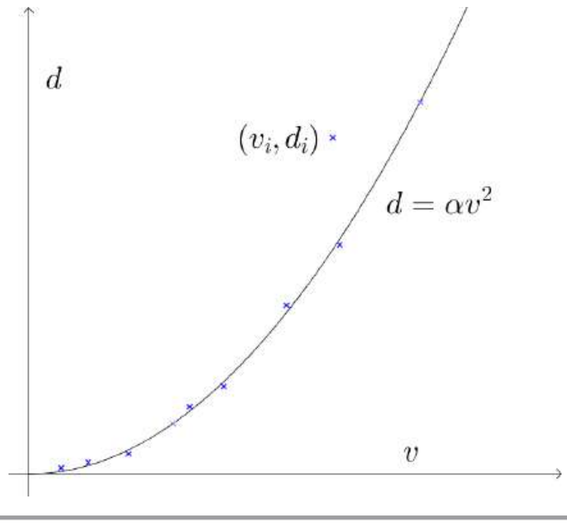
$$e(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[d_i - \alpha v_i^2 \right]^2$$

calculée en sommant les carrés des écarts entre les données expérimentales et les valeurs prédites par le modèle théorique.

i. Dans le cas où on dispose seulement de deux mesures $(n = 2)$, déterminez, en fonction des données expérimentales $(v_1, d_1, v_2$ et $d_2)$, la valeur de α correspondant au minimum de l'erreur quadratique

$$e(\alpha) = \left[d_1 - \alpha v_1^2 \right]^2 + \left[d_2 - \alpha v_2^2 \right]^2$$

ii. Déterminez la valeur optimale de α dans le cas général où on dispose d'un nombre quelconque de points expérimentaux.



Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Dans le cas où $n = 2$, l'erreur quadratique moyenne s'exprime sous la forme

$$e(\alpha) = \left[d_1 - \alpha v_1^2\right]^2 + \left[d_2 - \alpha v_2^2\right]^2$$

En dérivant par rapport à α, il vient

$$\begin{aligned} e'(\alpha) &= 2\left[d_1 - \alpha v_1^2\right](-v_1^2) + 2\left[d_2 - \alpha v_2^2\right](-v_2^2) \\ &= -2(d_1 v_1^2 + d_2 v_2^2) + 2\alpha(v_1^4 + v_2^4) \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule pour

$$\alpha = \alpha^\star = \frac{(d_1 v_1^2 + d_2 v_2^2)}{v_1^4 + v_2^4}$$

(où le dénominateur diffère de zéro puisque les essais sont réalisés à des vitesses non nulles).

Cette valeur correspond bien au minimum de e puisque, e' variant linéairement, on a

α		$\alpha^\star$	
$e'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$e(\alpha)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

ii. En adoptant la même démarche dans le cas général, on a successivement

$$e'(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} 2\left[d_i - \alpha v_i^2\right](-v_i^2) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2\right) + 2\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^4\right)$$

et

$$\alpha = \alpha^\star = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} v_i^4}$$

Cette valeur de α correspond bien au minimum de $e(\alpha)$ puisque l'erreur quadratique e est décroissante pour $\alpha < \alpha^\star$ (la dérivée est négative) et croissante pour $\alpha > \alpha^\star$ (la dérivée est positive).