Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 34

EXANA340 – EXANA349

http://www.matheux.c.la

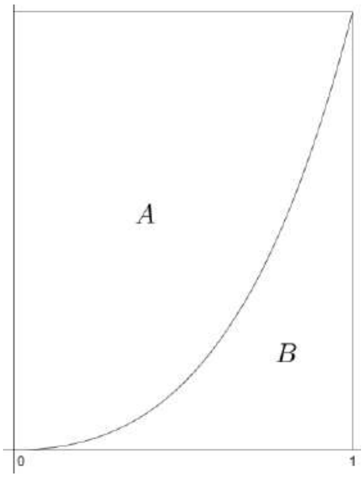
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Décembre 2012

EXANA340 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Un jeu consiste a lancer une fléchette sur une cible rectangulaire ârtagée en deux parties A et B par une courbe d'équation $f(x) = x^2.e^x$ définie sur l'intervalle $[0,1]$. Une étude statistique a montré que la probabilité que la fléchette tombe en dehors de la cible vaut $1/3$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives. (Attention, le dessin nest pas à l'échelle, l'unité sur l'axe horizontale vaut le double de celle sur l'axe vertical).

- Que vaut la probabilité d'atteindre la partie A?
- Que vaut la probabilité d'atteindre la partie B?



Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution L'aire de la cible est celle d'un rectangle dont les côtés mesurent 1 et e. L'aire totale de la cible est donc égale à e.

Pour obtenir l'aire de la partie B, on calcule:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 x e^x \, dx$$

(en intégrant par parties:

$$\begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = x^2 & v' = 2x). \end{array}$$

De même:

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

(en intégrant par parties:

$$\begin{array}{ll} u' = \mathrm{e}^x & u = \mathrm{e}^x \\ v = x & v' = 1). \end{array}$$

L'aire de la partie B vaut donc:

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \left[(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - 2.$$

Puisque l'aire totale de la cible vaut e, l'aire de la partie A vaut $\mathrm{e} - \mathrm{e} + 2 = 2$. La probabilité que la fléchette se plante dans la cible est $\frac{2}{3}$. La probabilité qu'elle tombe

- dans la zone A est: $\dfrac{2}{\mathrm{e}} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3\mathrm{e}}$
- dans la zone B est: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3\mathrm{e}} = \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\mathrm{e}-4}{3\mathrm{e}}$.

  On peut aussi la calculer comme $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\mathrm{e}-4}{3\mathrm{e}}$.

EXANA341 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit la fonction :

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$$

décomposer cette fonction en fractions simples de sorte que

$$f(x)=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}$$

et intégrer la fonction de 1 à 2.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution Cherchons a, b et c :

$$\frac{a(x+1)^2+b(x+1)+c}{(x+1)^2}=\frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$$

En développant et en identifiant les numérateurs, on trouve $a=1, b=-9$ et $c=18$. La décomposition en fractions simples donne donc:

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}=1-\frac{9}{(x+1)}+\frac{18}{(x+1)^2}$$

L'intégrale du premier terme est :

$$\int_1^2 1\ dx=[x]_1^2=1$$

L'intégrale des deuxième et troisième termes est aisément calculée grâce au changement de variable $x+1=t$

$$\int_1^2 \frac{9}{(x+1)}dx=\int_2^3 \frac{9}{t}dt=9\ \ [\ln(t)]_2^3=9\ \ln(3/2)$$

$$\int_1^2 \frac{18}{(x+1)^2}dx=\int_2^3 \frac{18}{t^2}dt=\left[\frac{-18}{t}\right]_2^3=3$$

L'intégrale de $f(x)$ entre 1 et 2 vaut donc $4-9\ \ln(3/2)$.

---

12 décembre 2012

EXANA342 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit la fonction :

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$$

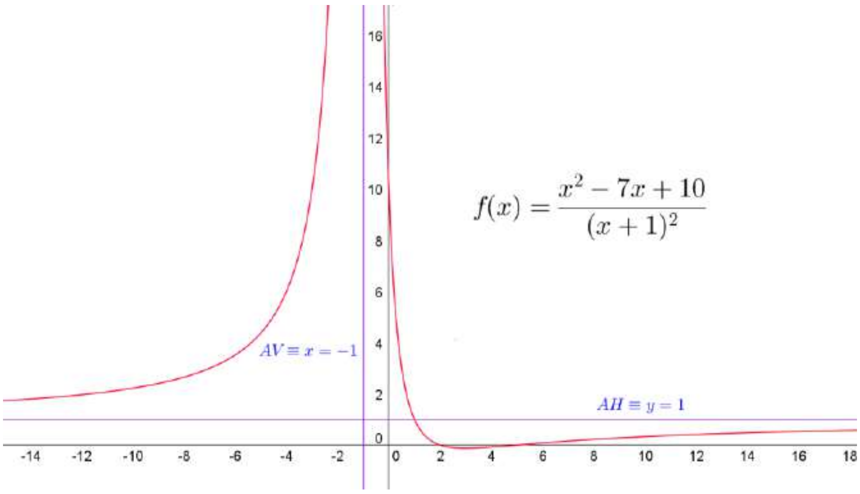
Etudiez la fonction $f(x)$ et tracez le graphe de $f(x)$ le plus précisément possible.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

1. Domaine : $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
2. Zéros : $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=5$.
3. Asymptote verticale :
$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{18}{(x+1)^2}=+\infty$$
$f(x)$ admet une asymptote verticale en $x=-1$.
4. Asymptote horizontale :
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$$
$f(x)$ admet $y=1$ comme asymptote horizontale.
5. Dérivée première :
$$f'(x)=\frac{(2x-7)(x+1)^2-(x^2-7x+10)2(x+1)}{(x+1)^4}=9\,\frac{x-3}{(x+1)^3}$$
Domaine de $f'(x)$: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.
6. Dérivée seconde :
$$f''(x)=9\,\frac{(x+1)^3-(x-3)3(x+1)^2}{(x+1)^6}=18\,\frac{5-x}{(x+1)^4}$$
Domaine de $f''(x)$: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=5$.
7. Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	0^+	$+$	|	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0^+
$f''(x)$	0^+	$+$	|	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0^-
$f(x)$	1	$\nearrow$	AV	$\searrow$	0	$\searrow$	Min	$\nearrow$	0 PI	$\nearrow$	1

Il y a un point d'inflexion à tangente non horizontale en $x=5$.



12 décembre 2012. Modifié le 5 septembre 2014 (Giovanni Turco)

EXANA343 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Calculer la primitive suivante pour $x > 0$

$$I = \int \frac{dx}{x^{2/3} + x^{1/2}}$$

en posant $y = x^{1/6}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution

$$I = \int \frac{dx}{x^{4/6} + x^{3/6}} = \int \frac{dx}{x^{3/6}(x^{1/6} + 1)}$$

$$I = \int \frac{6\ y^5}{y^3(y+1)} dy = \int \frac{6\ y^2}{(y+1)} dy$$

Faire la division de y^2 par $y + 1$: $y^2 = (y-1)(y+1) - 1$

$$I = 6 \int (y - 1 + \frac{1}{y+1}) dy$$

$$I = 6 \left[\frac{y^2}{2} - y + \ln(|y+1|) \right] + C = 6 \left[\frac{x^{1/3}}{2} - x^{1/6} + \ln(|x^{1/6} + 1|) \right] + C$$

On peut enlever les valeurs absolues du fait que $x > 0$ par hypothèse.

---

12 décembre 2012

EXANA344 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit la fonction $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$

2. Calculer l'intégrale définie : $I(a) = \int_0^a \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} dx$

3. Evaluer la limite : $\lim_{a \to 1} I(a)$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution

1. $f'(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}} . \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} . e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

   On peut noter que $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \operatorname{dom} f'$.

2. Une primitive de $\frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$ est donc $-\frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$. Ainsi,

$$I(a) = -\frac{1}{2} . \left(e^{\frac{a+1}{a-1}} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} e^{\frac{a+1}{a-1}}$$

3. Puisque $\lim_{a \to 1^-} e^{\frac{a+1}{a-1}} = e^{\lim_{a \to 1^-} \frac{a+1}{a-1}} = e^{-\infty} = 0$, on a que

$$\lim_{a \to 1^-} I(a) = \frac{1}{2e}.$$

---

12 décembre 2012

EXANA345 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Soit la fonction $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=\frac{e^{1-x}+x^2}{x+1}$$

Etudiez-là et représentez-la graphiquement, sans en calculer la dérivée seconde.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

- $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- la fonction ne possède aucun zéro
- Asymptotes
  - aucune asymptote horizontale, car

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} -e^{1-x}+2x \qquad \text{Règle de l'Hospital}\\ &= \pm\infty\end{aligned}$$

  - une asymptote verticale en $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$$

  - une asymptote oblique $y=x-1$ en $x=+\infty$, car

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-x}+x^2}{x^2+x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-x}+x^2-x^2-x}{x+1}=-1$$

  - pas d'asymptote oblique en $x=-\infty$, car

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-x}+x^2}{x^2+x}=+\infty$$

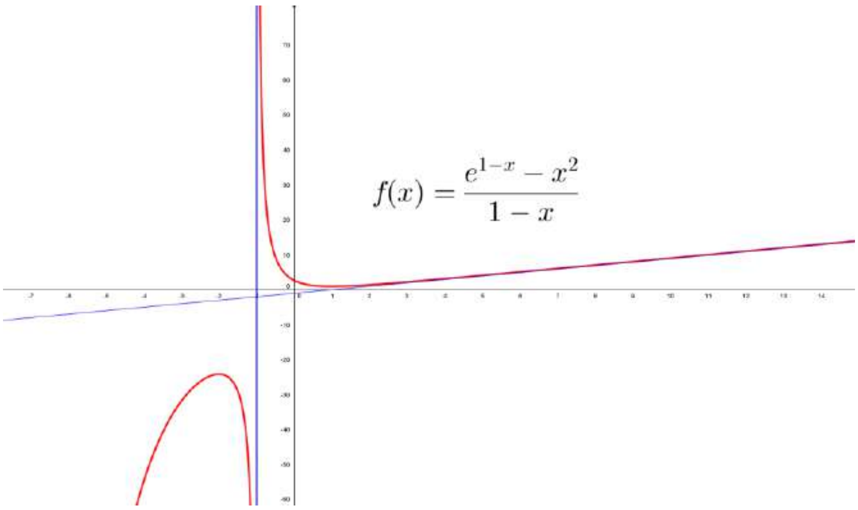
- Dérivée première et croissance de la fonction

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-e^{1-x}+2x)(x+1)-(e^{1-x}+x^2)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-e^{1-x}(x+2)+x^2+2x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{-e^{1-x}(x+2)+x(x+2)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(x+2)(x-e^{1-x})}{(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

$f'(x)$ s'annule donc en $x=-2$ et en $x=1$.

- Tableau récapitulatif

	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$x-e^{1-x}$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$



EXANA346 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Une réaction chimique transforme le composé A en le composé B.

$$A \rightleftharpoons B$$

Les vitesses de transformation de A vers B et de B vers A valent respectivement k_1 et k_2

Toutes deux sont constantes et strictement positives.

A l'instant initial, la concentration du composé A vaut C_0 et celle du composé B est nulle.

On note T le temps nécessaire pour atteindre la concentration C du composé A.

Ce temps T se calcule par l'intégrale suivante :

$$T = \int_{C_0}^{C} \frac{dx}{k_1 x - k_2 (C_0 - x)}$$

où le dénominateur reste contamment positif pour x variant entre C_0 et C.

Trouvez l'expression de C en fonction de T.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution

$$\begin{aligned} T &= -\int_{C_0}^{C} \frac{dx}{k_1 x - k_2(C_0 - x)} \\ &= -\int_{C_0}^{C} \frac{dx}{(k_1 + k_2)x - k_2 C_0} \\ &= -\frac{1}{k_1 + k_2} \int_{C_0}^{C} \frac{dx}{x - \frac{k_2}{k_1+k_2} C_0} \qquad \left(\text{ avec } x - \frac{k_2}{k_1 + k_2} C_0 > 0\right) \\ &= -\frac{1}{k_1 + k_2} \left[\ln \left| x - \frac{k_2}{k_1 + k_2} C_0 \right| \right]_{C_0}^{C} \\ &= -\frac{1}{k_1 + k_2} \ln \left(\frac{(k_1 + k_2)C - k_2 C_0}{k_1 C_0} \right) \end{aligned}$$

De là, on tire:

$$C = C_0 \left(\frac{k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} e^{-(k_1+k_2)T} \right).$$

---

12 décembre 2012

EXANA347 – POLYTECH, UMONS, Mons, 2007.

Déterminer un polyôme du troisième degré en la variable t ayant, en $t=1$, la même valeur et les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre 3 que la fonction

$$f(t)=\frac{t(t-2)}{t+2}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://portail.umons.ac.be/FR/universite/admin/aff_academiques/serv_gest_etudes/admissionfpms/Pages/Prepareretr%C3%A9ussir.aspx

Solution Soit le polynôme du troisième degré $p(t)=a(t-1)^3+b(t-1)^2+c(t-1)+d$. On adopte cette représentation, car elle va simplifier les calculs au droit du point $t=1$. On a alors :

$$\begin{array}{ll}
f(t)=\dfrac{t.(t-2)}{t+2} & p(t)=a(t-1)^3+b(t-1)^2+c(t-1)+d \\
f'(t)=\dfrac{t^2+4t-4}{(t+2)^2} & p'(t)=3a(t-1)^2+2b(t-1)+c \\
f''(t)=\dfrac{16}{(t+2)^3} & p''(t)=6a(t-1)+2b \\
f'''(t)=\dfrac{-48}{(t+2)^4} & p'''(t)=6a
\end{array}$$

En particulier, en $t=1$,

$$\begin{array}{ll}
f(1)=\dfrac{-1}{3} & p(1)=d \\
f'(1)=\dfrac{1}{9} & p'(1)=c \\
f''(1)=\dfrac{16}{27} & p''(1)=2b \\
f'''(1)=\dfrac{-48}{81} & p'''(1)=6a
\end{array}$$

Ainsi donc, $d=\frac{-1}{3}$, $c=\frac{1}{9}$, $b=\frac{8}{27}$ et $a=\frac{-8}{81}$.

Autre solution: si on part de la forme $p(t)=At^3+Bt^2+Ct+D$ pour le polynôme, on aboutit à

$$\begin{aligned}
p(1) &= A+B+C+D=-\frac{1}{3} \\
p'(1) &= 3A+2B+C=\frac{1}{9} \\
p''(1) &= 6A+2B=\frac{16}{27} \\
p'''(1) &= 6A=-\frac{48}{81},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire:

$$A=-\frac{8}{81} \quad B=\frac{16}{27} \quad C=-\frac{7}{9} \quad D=-\frac{4}{81}.$$

12 décembre 2012

EXANA348 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases} x\left(\ln|x|\right)^2 & \text{si } x\in\mathbb{R}_0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

a) f est-elle paire? impaire? Justifier.

b) Déterminer les zéros de f.

c) Que vaut la limite de f

- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 0 par valeurs >0? Justifier.

d) f est-elle continue en $x=0$? Justifier.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Trouver les éventuels points d'inflecion du graphe de f et calculer leurs coordonnées. Justifier.

h) Esquisser le graphe de la fonction f en indiquant les différents points eapparaissant dans vos réponses aux questions précédentes.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) La fonction est **impaire** puisque $f(-x) = -x(\ln|-x|)^2 = -x(\ln|x|)^2 = -f(x)$ et $f(0) = 0$.

Dans la suite (points b-g) on peut donc se limiter à étudier la fonction pour des arguments $x \in \mathbb{R}^+$; le graphe de la fonction pour des arguments négatifs s'obtient de celui pour des arguments positifs par symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+: \; f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \{0\,;1\}$

c) Limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = [0.\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{Hospital}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{Hospital}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^5} = 0$$

d) La fonction est continue en $x = 0$ puisque, étant donné qu'elle est impaire :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

e) Dérivée première et dérivée seconde pour $x \in \mathbb{R}_0^+$:

$$f'(x) = (x(\ln x)^2)' = (\ln x)^2 + \frac{2x\ln x}{x} = \ln x\,(\ln x + 2)$$

$$f''(x) = \big(\ln x\,(\ln x + 2)\big)' = \frac{1}{x}(\ln x + 2) + \ln x\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$$

f) Croissance, décroissance, maxima, minima dans $\mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{lll}\ln x = 0 & \Leftrightarrow & x = 1\\ \ln x = -2 & \Leftrightarrow & x = e^{-2} \cong 0{,}1353\end{array}\right.$$

x	0		e^{-2}		1	
$f'(x)$	|	+	0	−	0	+
$f(x)$	0	↗	max	↘	min	↗

$f(e^{-2}) = 4e^{-2} \cong 0{,}5413$

$f(1) = 0$

Le graphe de la fonction possède dans $\mathbb{R}^+$ un **maximum** de coordonnées $(e^{-2}\,; 4e^{-2})$ et un **minimum** de coordonnées $(1\,;0)$.

Etant donné que la fonction est impaire et que son graphe possède une tangente verticale en $x = 0$, le point de coordonnées $(0\,;0)$ est un **point d'inflexion à tangente verticale** au graphe de *f*.

g) Concavité et points d'inflexion dans $\mathbb{R}^+$:

$$f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = e^{-1} \cong 0{,}3679$$

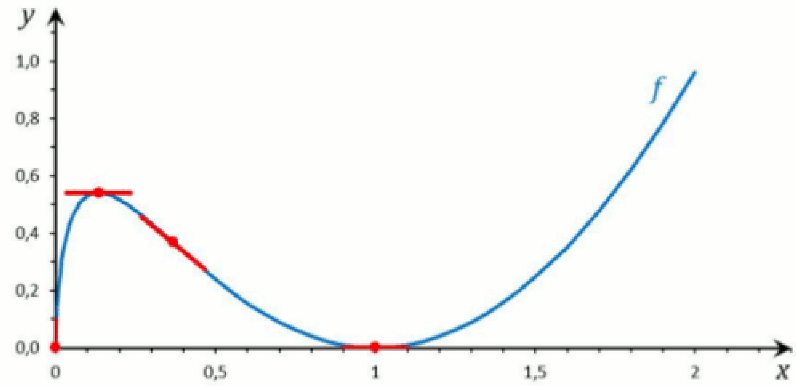
x	0		e^{-1}	
$f''(x)$	|	−	0	+
$f(x)$	PIV	⇊	PI	⇈

$f(e^{-1}) = e^{-1}$

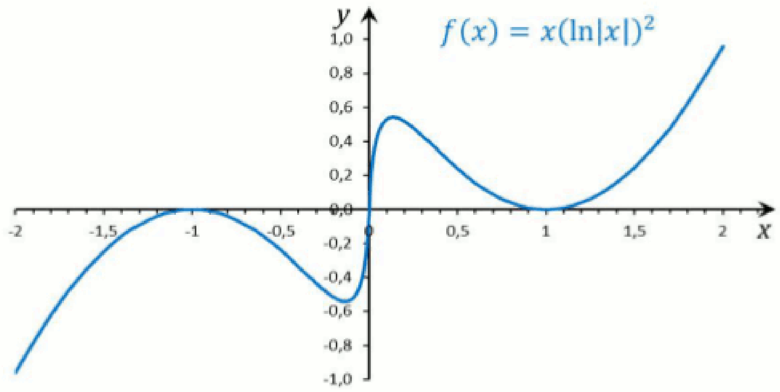
$f'(e^{-1}) = -1$

Le graphe de la fonction possède dans $\mathbb{R}^+$ un **point d'inflexion** de coordonnées $(e^{-1}\,;\, e^{-1})$ où le coefficient angulaire de la tangente est égal à -1 (ainsi qu'un PIV au point de coordonnées $(0\,;0)$).

h) Le graphe de la fonction sur $\mathbb{R}^+$, basé sur ce qui précède, est montré dans la figure ci-dessous, qui contient tous les points particuliers :



Etant donné le caractère impair de la fonction, le graphe de la fonction sur $\mathbb{R}$ est alors :



27 novembre 2012

EXANA349 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int_{-3}^{3} | x^3 - x | \, dx$

b) $\int \sin\left(\ln \frac{x}{5} \right) dx$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) L'intégrant est une fonction *paire* et les bornes sont *symétriques* ; en plus, pour des arguments positifs :

$$|x^3 - x| = |x(x-1)(x+1)| = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \geq 1 \\ x - x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{+3} |x^3 - x| \, dx &= 2\left(\int_0^{+3} |x^3 - x| \, dx \right) \\
&= 2\left(\int_0^1 (x - x^3) \, dx + \int_1^3 (x^3 - x) \, dx \right) \\
&= 2\left(\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_1^3 \right) \\
&= 2\left(\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - 0 \right) + \left(\left(\frac{81}{4} - \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \\
&= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{63}{4} + \frac{1}{4} \right) \;=\; \frac{65}{2}
\end{aligned}$$

b) Faisons le changement suivant de variable d'intégration :

$$\ln \frac{x}{5} = t \quad \Leftrightarrow \quad x = 5e^t \quad \text{et} \quad dx = 5e^t dt$$

Alors :

$$\int \sin\left(\ln \frac{x}{5} \right) dx = 5 \int \sin t \, . \, e^t \, . \, dt$$

La primitive en t est un « classique » qui est vu dans tous les cours de mathématiques en 6GT, et qu'on calcule comme suit en effectuant deux étapes d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} &= \int \sin t \, . \, e^t \, . \, dt \\
&= \sin t \, . \, e^t - \int \cos t \, . \, e^t \, . \, dt && \begin{cases} f'(t) = e^t & \Leftrightarrow \quad f(t) = e^t \\ g(t) = \sin t & \Leftrightarrow \quad g'(t) = \cos t \end{cases} \\
&= \sin t \, . \, e^t - \left(\cos t \, . \, e^t + \int \sin t \, . \, e^t \, . \, dt \right) && \begin{cases} f'(t) = e^t & \Leftrightarrow \quad f(t) = e^t \\ g(t) = \cos t & \Leftrightarrow \quad g'(t) = -\sin t \end{cases} \\
&= (\sin t - \cos t) e^t \; - \; \mathrm{J} \\
2\mathrm{J} &= (\sin t - \cos t) e^t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{J} = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t) e^t
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\ln\frac{x}{5}\right)\, dx &= 5\int \sin t \,.\, e^{t} \,.\, dt \\ &= \frac{5}{2}\,(\sin t - \cos t)e^{t} \; + C \\ &= \frac{x}{2}\left(\sin\left(\ln\frac{x}{5}\right) - \cos\left(\ln\frac{x}{5}\right)\right) + C\end{aligned}$$

27 novembre 2012