Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 36

EXANA360 – EXANA369

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Septembre 2013

EXANA360 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

2) Calculer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}$$

3) Démontrer que l'équation

$$x^2=2^x$$

admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$

4) Calculer l'aire de la surface comprise e,tre la droite $y=x-1$ et la parabole $y^2=2x+6$

Solution proposée par Louis François

1) $\forall x\neq 0, -1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq |x| \\ \lim\limits_{x\to 0}-|x|=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Théorème de l'étau}} \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ car on se ramène au résultat précédent en posant $X=\frac{1}{x}$ et $x\to\infty \Leftrightarrow x\to 0$

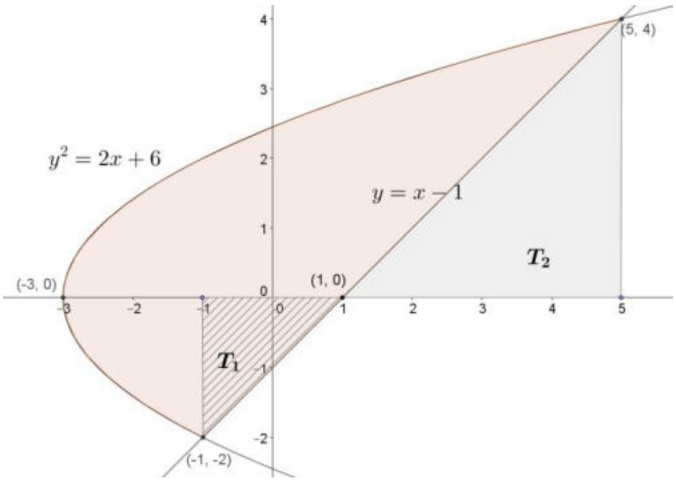
2) $\frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{x^2+1}=\frac{A+Cx+(A+B)x^2}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ C=3 \\ B=-1 \end{cases}$

$$\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}\right)dx$$

$$=2\ln|x|-\ln\sqrt{x^2+1}+3\arctan x+K$$

3) Soit $f(x)=x^2-2^x \quad \begin{cases} f \text{ continue} \\ f(-1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0 \\ f(0)=-1<0 \end{cases}$

f admet donc une racine (au moins) sur $[-1,0]$ par le théorème des valeurs intermèdiaires.



$$4)\begin{cases} y = x-1 \\ y^2 = 2x+6 \end{cases} \Rightarrow (x-1)^2 = 2x+6 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow x = 2\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} (5,4) \\ (-1,-2) \end{cases}$$

<u>En intégrant avec y comme variable</u> :

$$\begin{cases} \text{Droite :} \quad x = y+1 \\ \text{Parabole : } x = \dfrac{y^2-6}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Aire : } A = \int_{-2}^{4}\left(y+1-\frac{y^2-6}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-y^2+2y+8\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^3}{3}+y^2+8y\right]_{-2}^{4} = 18$$

<u>En intégrant avec x comme variable</u> :

$$A = \int_{-3}^{5}\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-3}^{-1}\sqrt{2x+6}\,dx + \text{Aire } \Delta T_1 - \text{Aire } \Delta T_2$$

$$= \frac{64}{3} \qquad + \frac{8}{3} \qquad +2 \qquad -8 \qquad = 18$$

ou

$$A = \int_{-3}^{-1} 2\sqrt{2x+6}\,dx + \int_{-1}^{5}\left(\sqrt{2x+6}-(x-1)\right)dx$$

$$= \left[\frac{2(2x+6)^{3/2}}{3}\right] + \left[\frac{2}{2}\frac{(2x+6)^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{5} = \frac{2}{3}\times 8 + \frac{64}{3} - \frac{25}{2} + 5 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{8}{3} = 18$$

13 septembre 2013

EXANA361 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x(\ln x)^2$$

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Déterminer le signe de f'.
3. Etudier le signe de f'.
4. Déterminer $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}$ puis $\lim_{u\to+\infty} \frac{(\ln u)^2}{u}$
5. En déduire $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$ et conclure sur l'existence d'un prolongement continue de f en 0. $\tilde{f}(0) = ?$
6. Etudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0 à droite et donner les conclusions graphiques.
7. Donner le tableau des variations de f. (f' et f'')
8. Dessiner le graphe de la fonction f.

Solution proposée par Louis François

1 et 2) $f'(x) = \ln(\ln x + 2)$ s'annule en $x = 1$ et $x = 1/e^2$

3)

x	0		$1/e^2$		1	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

4) $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}} \xrightarrow{H} \lim_{u\to+\infty} \frac{2\sqrt{u}}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln^2 u}{u} = \lim_{u\to+\infty} \left(\frac{\ln u}{\sqrt{u}}\right)^2 = \left(\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\right)^2 = 0$$

5) $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^2 \overset{u=1/x}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{(-\ln u)^2}{u} = 0$

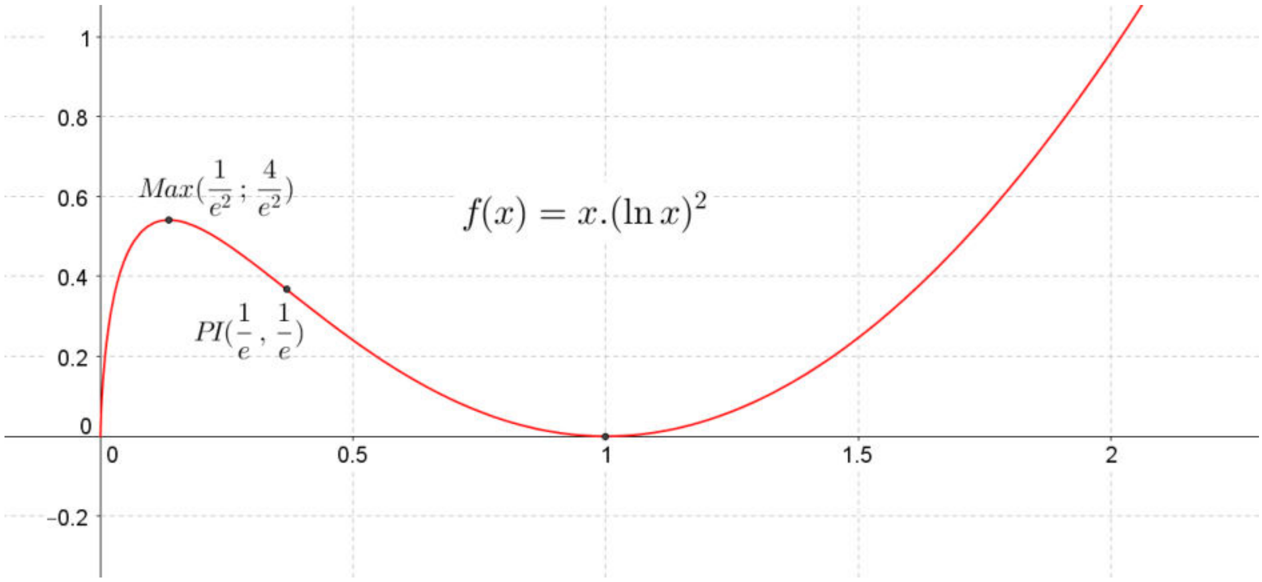
Donc f admet un prolongement continu $\tilde{f}(x)$ en $x = 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\ln x)^2}{x} = +\infty$

La tangente en $(0,0)$ est verticale et donc la prolongée $\tilde{f}(x)$ est non dérivable en $x = 0$

7) $f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$ s'annule en $x = 1/e$

Point d'inflexion en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$; Max local en $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$; Min en $(0,0)$ et $(1,0)$



13 septembre 2013

EXANA362 – EPL, UCL, LLN, septembre 2013.

Un cycliste effectue une épreuve en solitaire sur un parcours tout-à-fait à plat mais soumis à un vent tournoyant. La vitesse du vente dans la direction du cycliste peut être modélisée par une fonction du temps donnée par

$$f(t) = 40\cos(\alpha t) \qquad [\text{km/h}]$$

où α est un paramètre constant. On suppose que le cycliste démarre son parcours au temps $t = 0$.

Pour simplifier l'effet du vent sur le cycliste, on modélise la vitesse de celui-ci par une constante v_0 (correspondant à sa vitesse en l'absence de vent) plus un quart de la vitesse du vent dans sa direction. On s'intéresse au temps que mettra le cycliste pour terminer son parcours d'une longueur $K = 40$ km. On suppose que $v_0 > 20$ km/h

1. Calculer l'expression de la vitesse $v(t)$ du cycliste en fonction du temps, puis la distance $d(t)$ parcourue par le cycliste en fonction du temps.
2. Ecrire l'équation que satisfait la durée totale t_T mise par le cycliste pour terminer son parcours. Démontrer que cette équation admet une et une seule solution.
3. Pour $a = 120\pi$ et $v_0 = 40$ km/h donner la solution t_T.

Solution proposée par Louis François

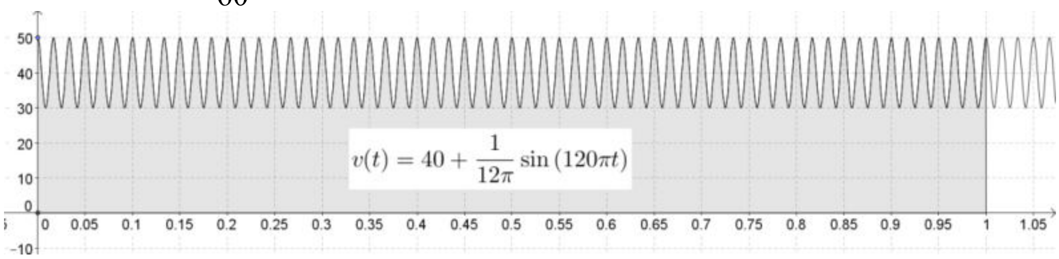
1) $v(t) = v_0 + 10\cos at > 0$ car $v_0 > 20$ et $-10 \le 10\cos at \le 10$

$d(t) = \int v(t)\,dt = v_0 t + \frac{10}{a}\sin at + k$ or $d(0) = 0 \Rightarrow k = 0 \quad \Rightarrow d(t) = v_0 t + \frac{10}{a}\sin at$

2) Equation à résoudre : $v_0 t + \frac{10}{a}\sin at = 40$

$$\left.\begin{array}{l} d(0) = 0 \\ d \text{ strictement croissante car } d' = v > 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} d(t) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cette équation admet une et une seule racine.}$$

3) $40t + \frac{1}{12\pi}\sin 120\pi t = 40.$ Il faut une heure pour faire 40 km. Remarquons que la période de la vitesse est de $\frac{1}{60} =$ 1 minute $\quad \Rightarrow t = 1\ h$. Racine unique



13 septembre 2013

EXANA363 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Etudiez la fonction

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^2}} \qquad (a>0)$$

et faites en une représentation graphique soignée.

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

1. $CE: x^2 \neq a^2 \Rightarrow x \neq \pm a \Rightarrow dom\ f = \mathbb{R}\setminus\{\pm a\}$
2. Remarquons que $\forall x \in dom\ f$:

   a) $y(-x)=y(x)$ La fonction est paire et son graphique admet donc Oy comme axe de symétrie.

   b) $y(x)>0$ La fonction est strictement positive et son graphique est donc au-dessus de l'axe Ox.

   c) $y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-x^2} & \text{si } a^2-x^2>0 \quad \text{donc si } -a<x<a \\ -\dfrac{1}{a^2-x^2} & \text{si } a^2-x^2<0 \quad \text{donc si } x<-a \text{ ou } x>a\end{cases}$

3. $AV: \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^2}}=+\infty \Rightarrow \begin{cases}AV_1 \equiv x=a \\ AV_2 \equiv x=-a\end{cases}$

   $AH: \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^2}}\overset{>}{=}0 \Rightarrow AH \equiv y=0$ en $+\infty$ et $-\infty$ et le graphique est au-dessus de Ox

4. a) <u>Si $-a<x<a$</u> : $y'(x)=\left(\dfrac{1}{a^2-x^2}\right)'=\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}$

   <u>Si $-a<x<a$</u> : $y'(x)=\left(-\dfrac{1}{a^2-x^2}\right)'=-\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}$

x		$-a$		0		a	
y'	$+$	/	$-$	0	$+$	/	$-$

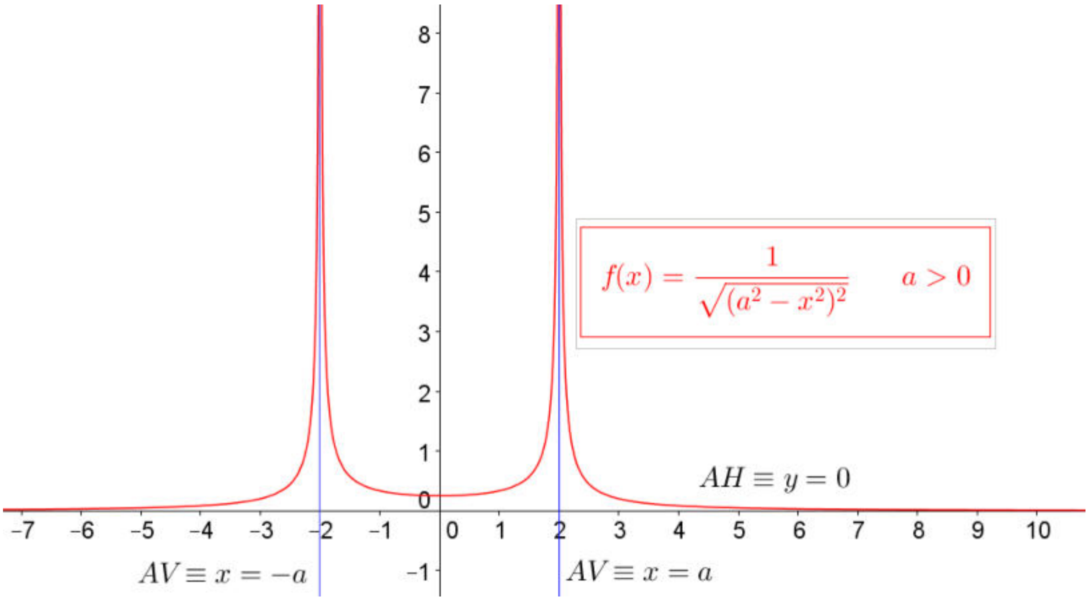
   b) <u>Si $-a<x<a$</u> : $y''(x)=\left(\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}\right)'=2\dfrac{3x^2+a^2}{(a^2-x^2)^3}$

   <u>Si $-a<x<a$</u> : $y'(x)=\left(-\dfrac{2x}{(a^2-x^2)^2}\right)'=-2\dfrac{3x^2+a^2}{(a^2-x^2)^3}$

x		$-a$		a	
y''	$+$	/	$+$	/	$+$

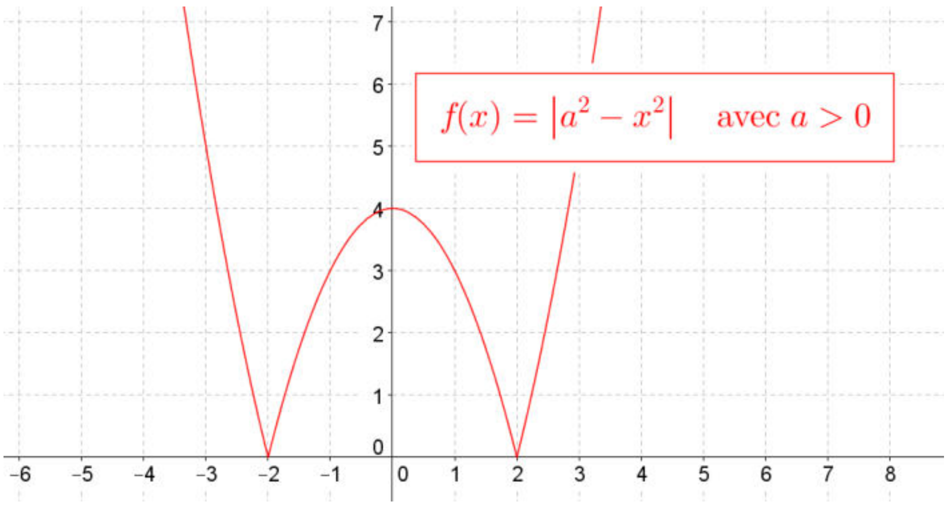
Tableau de variations

x	$-\infty$		$-a$		0		$+a$		$+\infty$
y'	$+$	$+$	$/$	$-$	0	$+$	$/$	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	$/$	$+$	$+$	$+$	$/$	$+$	$+$
y	$AH \equiv y = 0$	$\nearrow$ $\cup$	$AV \equiv x = -a$	$\searrow$ $\cup$	min $\cup$	$\nearrow$ $\cup$	$AV \equiv x = a$	$\searrow$ $\cup$	$AH \equiv y = 0$



Remarque : Le graphique peut aussi être construit en constatant que $y(x)$ est l'inverse de du graphe de $f(x) = |a^2 - x^2| = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{si } a^2 - x^2 > 0 \\ -(a^2 - x^2) & \text{si } a^2 - x^2 > 0 \end{cases}$ avec $x \neq a$.

On utilisera les principes acquis en début de $5^{ème}$ dans le chap "Opérations sur les fonctions".



EXANA364 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2012.

Etudiez la fonction

$$f(x)=\frac{3}{4}x^4+x^3-3x^2$$

et faites-en une représentation graphique soignée.

Utilisez l'analyse précédente pour étudier l'existence et le signe des racines de l'équation:

$$\frac{3}{4}x^4+x^3-3x^2-m=0$$

où m est un paramètre qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

1. $Dom\ f=\mathbb{R}$
2. Aucune particularité (parité, signe,..), ni asymptote (pas d'AV car $dom\ f=\mathbb{R}$, pas d'A-nonV car la fonction est de degré 4)
3. $f'(x)=3x(x-1)(x+2)$

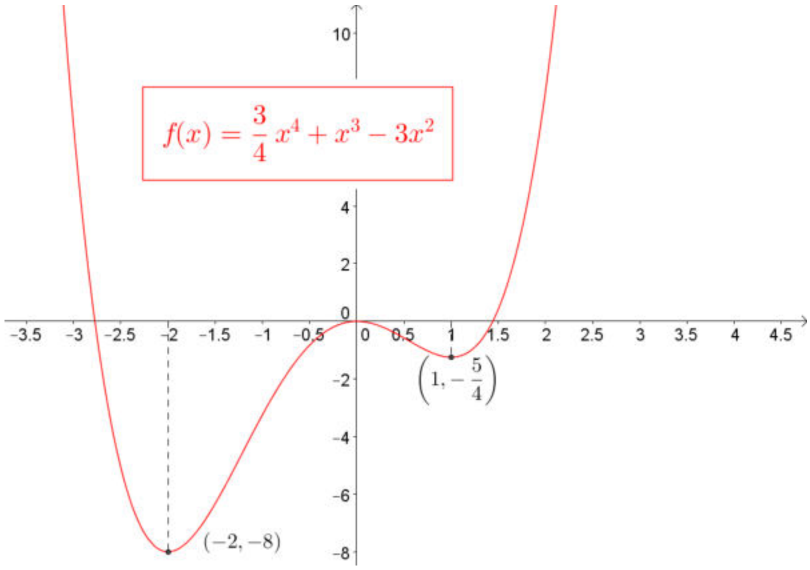
x		-2		0		1	
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. $f''(x)=3(3x^2+2x-2)$ Racines : $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

x		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

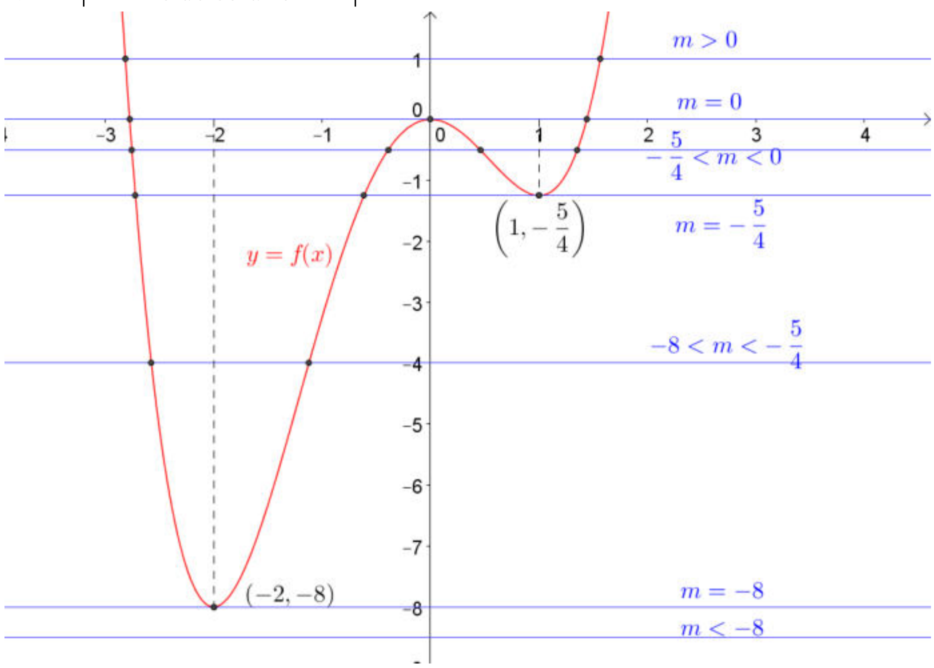
5. <u>Tableau des variations</u>

		-2		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		0		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$
	$\cup$	$(-2,-8)$	$\cup$	I_1	$\cap$	$(0,0)$	$\cap$	I_2	$\cup$	$(1,-5/4)$	$\cup$



Les solutions de l'équation $\frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 - m = 0$ sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f et de la droite d'équation $y = m$ $(m \in \mathbb{R})$

m	Nombre de solutions	Signe des solutions
$m > 0$	2	$1:+,1:-$
$m = 0$	3	$1:+,1:0,1:-$
$-\frac{5}{4} < m < 0$	4	$2:+,2:-$
$m = -\frac{5}{4}$	3	$1:+,2:-$
$-8 < m < -\frac{5}{4}$	2	$2:-$
$m = -8$	1	$1:-$
$m < 8$	Pas de solution	



27 octobre 2013

EXANA365 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Calculer la primitive de

$$\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$$

en posant $y=\dfrac{x}{2}$

Solution proposée par Fabienne Zoetard.

$$P=\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \overset{y=\frac{x}{2}}{=} 2\int \frac{y}{\cos^2 y}\,dy$$

Par parties:

$$\begin{cases} f=y & f'=1 \\ g'=\dfrac{1}{\cos^2 y} & g=\tan y \end{cases}$$

$$\Rightarrow P=2\left(y\tan y-\int \tan y\,dy\right)=2\left(y\tan y-\ln\left|\cos y\right|\right)$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=x\tan\frac{x}{2}+\ln\cos^2\frac{x}{2}+C$$

Vérification :

$$\left(x\tan\frac{x}{2}+\ln\cos^2\frac{x}{2}\right)'=\tan\frac{x}{2}+x.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.\frac{1}{2}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}.2\cos\frac{x}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right).\frac{1}{2}$$

$$=\tan\frac{x}{2}+\frac{x-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+x-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

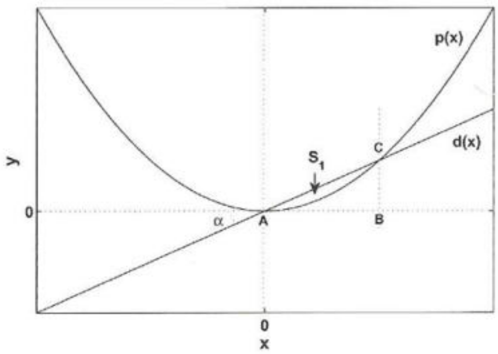
$$=\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

---

27 octobre 2013

EXANA366 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

Considérons une fontion parabolique dont le coefficient multipliant x^2 est une fonction linéaire du temps t. La parabole est donnée par la fonction $p(x) = tx^2$. Considérons également une droite $d(x)$ passant par le centre du repère et dont l'angle α (voir figure ci-dessous) est aussi une fonction linéaire du temps : $\alpha = t$. Soit S_1, la surface délimitée par $p(x)$ et $d(x)$.
On demande de déterminer l'évolution au cours du temps du rapport entre S_1 et la surface du triangle ABC (voir figure)



Si on travaille dans un repère orthonormé, alors $\tan(t)$ est la pente de la droite $d(x)$. $(-90° < t < +90°)$. La droite $d(x)$ a pour équation :$d(x) = \tan(t).x$.
Cherchons les intersections de la parabole et de la droite.

$$\begin{cases} p(x) = t.x^2 \\ d(x) = \tan(t).x \end{cases} \Rightarrow tx^2 - \tan(t).x = 0 \Rightarrow \begin{cases} A:(0,0) \\ B:\left(\dfrac{\tan(t)}{t}, \dfrac{\tan^2(t)}{t}\right) \end{cases}$$

La surface S_1 est donnée par :

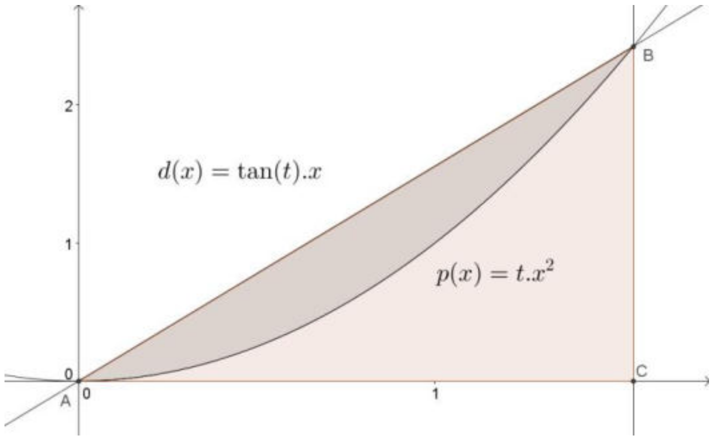
$$S_1 = \int_0^{\frac{\tan(t)}{t}} \left(d(x) - p(x)\right).dx = \int_0^{\frac{\tan(t)}{t}} \left(\tan(t).x - t.x^2\right).dx$$

$$= \left[\tan(t)\frac{x^2}{2} - t\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\tan(t)}{t}} = \frac{1}{6}\frac{\tan^3(t)}{t^2}$$

La surface S_2 du triangle ABC est $S_2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\tan(t)}{t}.\dfrac{\tan^2(t)}{t} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\tan^3(t)}{t^2}$

Et donc $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\dfrac{1}{6}\dfrac{\tan^3(t)}{t^2}}{\dfrac{1}{2}.\dfrac{\tan^3(t)}{t^2}} = \dfrac{1}{3}$.

Autrement dit ce rapport est constant et indépendant du temps



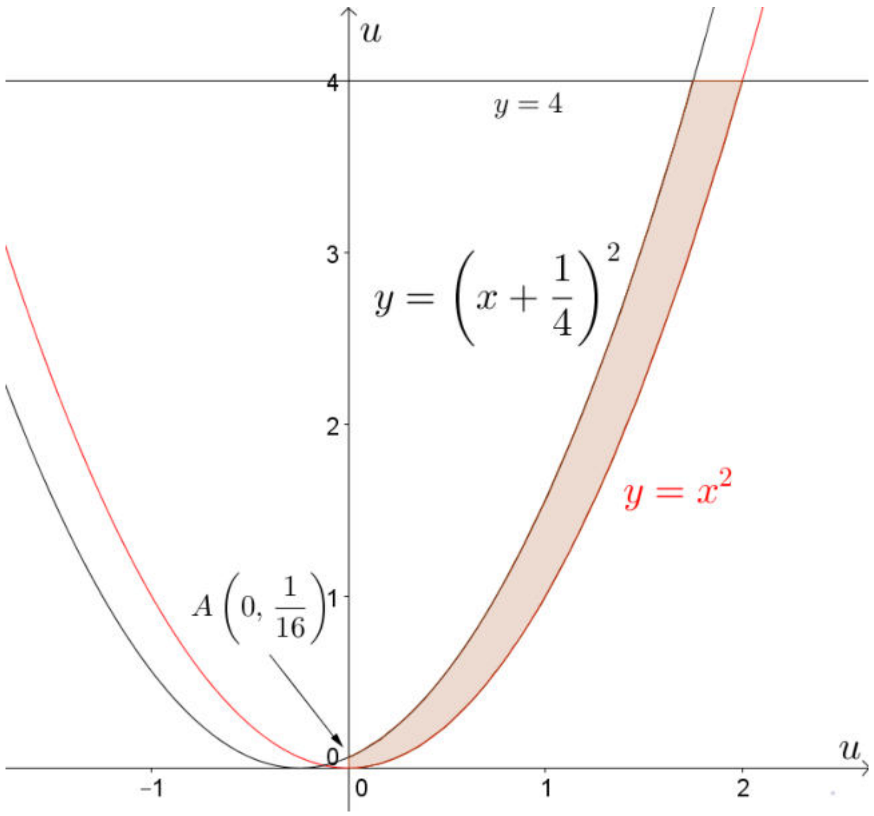
27 octobre 2013

EXANA367 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2013.

La pièce métallique à fabriquer est le volume engendré par la rotation autour de l'axe Oy de l'aire comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = (x + 1/4)^2$ pour $x \geq 0$ et $y \leq 4$.

1. Représentez graphiquement l'aire en question.
2. Calculez le volume de métal nécessaire pour fabriquer la pièce.

Solution proposée par Fabienne Zoetard.



Transformons les fonctions , les ordonnées étant considérées comme positives:

$$\begin{cases} y = x^2 & \Rightarrow x = \sqrt{y} & \Rightarrow f(x) = \sqrt{y} \\ y = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 & \Rightarrow x = \sqrt{y} - \frac{1}{4} & \Rightarrow g(x) = \sqrt{y} - \frac{1}{4} \end{cases}$$

Calcul du volume :

$$V = \pi\left[\int_0^4 f^2(y)dy - \int_{1/16}^4 g^2(y)dy\right] = \pi\left[\int_0^4 y\,dy - \int_{1/16}^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{4}\right)^2 dy\right]$$

$$= \pi\left[\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 - \left[\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\sqrt{y^3} + \frac{1}{16}y\right]_{1/16}^4\right] = \ldots = \boxed{\frac{3713\pi}{1536} \simeq 24.774 \text{ u}^3}$$

---

27 octobre 2013

EXANA368 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln|x|+\frac{1}{2}}{x^2}$ pour tout x réel non nul.

a) f est-elle paire au impaire? Justifier.

b) Déterminer les éventuels zéros de f.

c) Que vaut la limite de f

- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 0 par valeurs >0? Justifier.

d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? Justifier.

f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs abscisse.

w) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans vos réponses aux questions précédentes.

---

a) Fonction paires : $f(-x)=\dfrac{\ln|-x|+1/2}{(-x)^2}=f(x)$

b) $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}_0$

Racines : $\ln x+1/2=0 \Rightarrow x=e^{-1/2}$ et donc aussi $x=-e^{-1/2}$ en vertu de a)

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1/2}{x^2}=0$ Car toute puissance de x l'emporte sur $\ln$.

On peut aussi appliquer l'Hospital. $\Rightarrow AH \equiv y=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1/2}{x^2}=-\dfrac{\infty}{0}=-\infty \Rightarrow AV\equiv x=0$

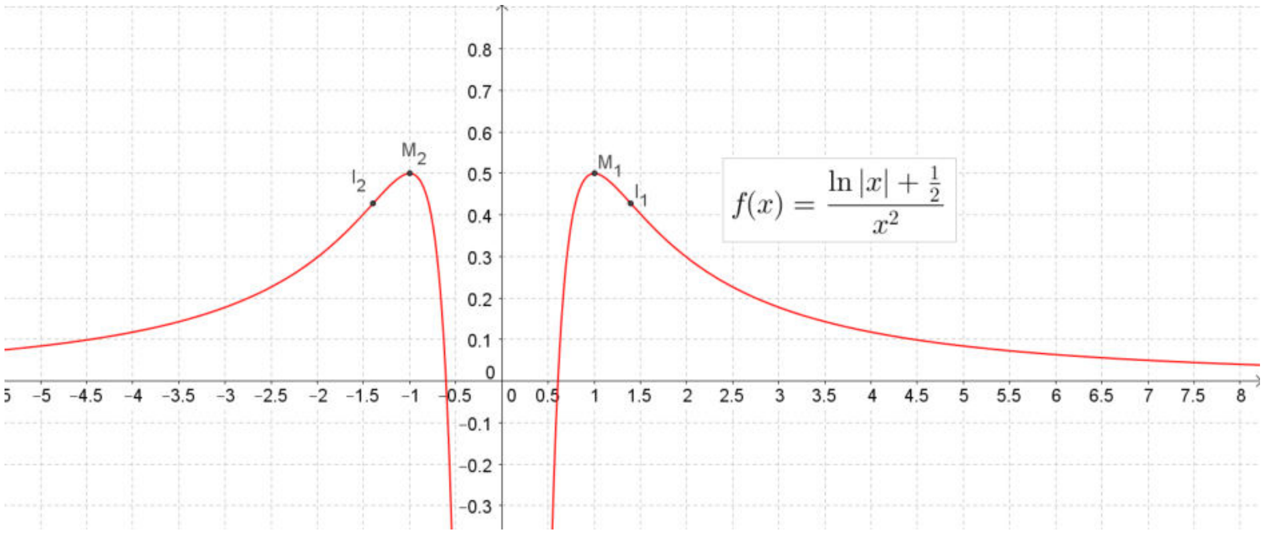
d) $f'(x)=-2\dfrac{\ln|x|}{x^3}\Rightarrow$

		-1		0		$+1$	
f'	$+$	0	$-$	/	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$M_2\left(-1,\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	/	$\nearrow$	$M_1\left(1,\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$

e) La fonction possède deux maximum. Voir tableau de f'

f) $f''(\ )=\dfrac{6\ln|x|-2}{x^4}\Rightarrow$

		$-e^{-1/3}$		0		$+e^{-1/3}$	
f'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$I_2\left(-e^{-1/3},\frac{5e^{-2/3}}{6}\right)$	$\cap$	/	$\cap$	$I_1\left(e^{-1/3},\frac{5e^{-2/3}}{6}\right)$	$\cup$



9 septembre 2013

EXANA369 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013

Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{5+\sin(7x)}{1+9x^2}dx$

b) $\int \frac{x^2-5x+7}{e^{3x}}dx$

$$1)\ I=\int_{-1/3}^{1/3}\frac{5+\sin(7x)}{1+9x^2}dx=\int_{-1/3}^{1/3}\frac{5}{1+9x^2}dx+\underbrace{\int_{-1/3}^{1/3}\frac{\sin(7x)}{1+9x^2}dx}_{=0\text{ car fonction impaire}}=\frac{5}{3}\int_{-1/3}^{1/3}\frac{1}{1+(3x)^2}d(3x)$$

$$=\frac{5}{3}[\arctan(3x)]_{-1/3}^{1/3}=\frac{5}{3}\pi(\arctan(1)-\arctan(-1))=\frac{5}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{6}$$

$$2)\ I=\int e^{-3x}(x^2-5x+7)dx \qquad \begin{array}{ll} f=x^2-5x+7 & f'=2x-5 \\ g'=e^{-3x} & g=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2-5x+7)+\frac{1}{3}\underbrace{\int e^{-3x}(2x-5)dx}_{=I'}$$

$$I'=\int e^{-3x}(2x-5)dx \qquad \begin{array}{ll} f=2x-5 & f'=2 \\ g'=e^{-3x} & g=-\frac{1}{3}e^{-3x}\end{array}$$

$$\Rightarrow I'=-\frac{1}{3}e^{-3x}(2x-5)+\frac{2}{3}\underbrace{\int e^{-3x}dx}_{=-\frac{1}{3}e^{-3x}}$$

$$\Rightarrow I=-\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2-5x+7)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}(2x-5)-\frac{2}{9}e^{-3x}\right)=-\frac{e^{-3x}}{27}(9x^2-39x+50)+C$$

---

20 février 2014