

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 38

EXANA380 – EXANA389

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard**

Janvier 2014

EXANA380 – Compléments.

Calculer

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \int \sec^3 x dx$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int \sec^4 x dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$\text{On pose } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt$$

On décompose en fractions simples :

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow 1 = A(1+t) + B(1-t) \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right| + C$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \boxed{\tan x + C}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

Par parties :

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad f = \tan x$$

$$g = \frac{1}{\cos x} \quad g' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I_3 = \tan x \frac{1}{\cos x} - \int \frac{\tan x \cdot \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x \cdot \sec x - \underbrace{\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx}_{I_3}$$

$$I_3 = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^3 x} dx}_{=I_3} - \underbrace{\int \frac{1}{\cos x} dx}_{=I_1}$$

$$\Rightarrow I_3 = \tan x \cdot \sec x - I_3 + I_1$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} \left(\tan x \cdot \sec x + \ln \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right| \right) + C$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

Par parties

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad f = \tan x$$

$$g = \frac{1}{\cos^2 x} \quad g' = \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2 \underbrace{\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx}_{=I_4}$$

$$I_4 = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^4 x} dx}_{=I_4} - \underbrace{\int \frac{1}{\cos^2 x} dx}_{=I_2}$$

$$\Rightarrow I_4 = \tan x \cdot \sec^2 x - 2I_4 + 2I_2$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{3} \tan x (\sec^2 x + 2) + C$$

EXANA381 – Compléments.

Calculer

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \int \csc^3 x dx$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \csc^4 x dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin x} dx$$

$$\text{On pose } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \boxed{\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \boxed{-\cot x + C}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sin^3 x} dx$$

Par parties

$$f = \frac{1}{\sin x} \quad f' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$g' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad g = -\cot x$$

$$\Rightarrow I_3 = -\cot x \cdot \frac{1}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = -\cot x \cdot \csc x - \underbrace{\int \frac{1}{\sin^3 x} dx}_{=I_3} + \underbrace{\int \frac{1}{\sin x} dx}_{=I_1}$$

$$\Rightarrow I_3 = -\cot x \cdot \csc x - I_3 + I_1 \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| - \cot x \cdot \csc x \right] + C}$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx$$

Par parties

$$f = \frac{1}{\sin^2 x} \quad f' = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$$

$$g' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad g = -\cot x$$

$$\Rightarrow I_4 = -\cot x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - 2 \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx = -\cot x \cdot \csc^2 x - 2 \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} dx$$

$$= -\cot x \cdot \csc^2 x - 2I_4 - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow 3I_4 = -\cot x \cdot \csc^2 x - 2 \cot x \Rightarrow \boxed{I_4 = -\frac{1}{3} \cot x (\csc^2 x + 2)}$$

17 juin 2014

EXANA382 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999.

Calculer

$$(a) \int u(x) \cdot e^{v(x)} dx \quad \text{où} \quad u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^3} \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(b) \int_0^{10.5} |\sin^3 \pi x| dx$$

$$(a) \text{ Calculons : } v'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\text{Remarquons que } u(x) \text{ peut s'écrire : } u(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{4} \cdot v'(x) \cdot v(x)$$

A partir de là, tout devient simple :

$$I = \int u(x) \cdot e^{v(x)} dx = \frac{1}{4} \int v'(x) \cdot v(x) e^{v(x)} dx$$

$$\text{On pose } t = v(x) \Rightarrow dt = v'(x) dx \text{ et on intègre par partie : } I = \int t \cdot e^t dt$$

$$\begin{aligned} f = t & \quad f' = 1 \\ g' = e^t & \quad g = e^t \end{aligned} \Rightarrow I = t \cdot e^t - \int e^t dt = e^t (t - 1) = e^{v(x)} (v(x) - 1) + C$$

$$(b) \text{ Remarquons que } \int_0^{10.5} |\sin^3 \pi x| dx = 21 \int_0^{0.5} \sin^3 \pi x dx = \frac{21}{\pi} \int_0^{0.5} \sin^3 \pi x d\pi x$$

$$\Rightarrow I = \frac{21}{\pi} \int_0^{0.5} \sin \pi x (1 - \cos^2 \pi x) d\pi x = \frac{21}{\pi} \int_1^{0.5} \sin \pi x - \sin \pi x \cdot \cos^2 \pi x dx$$

$$= \frac{21}{\pi} \left[-\cos \pi x + \frac{1}{3} \cos^3 \pi x \right]_0^{0.5} = \frac{21}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{\pi}$$

Le 2 mai 2014

EXANA383 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 muni du repère orthonormé $Oxyz$ soient

– S la surface plane située dans le plan $z = 0$ et définie par les 2 courbes d'équations respectives

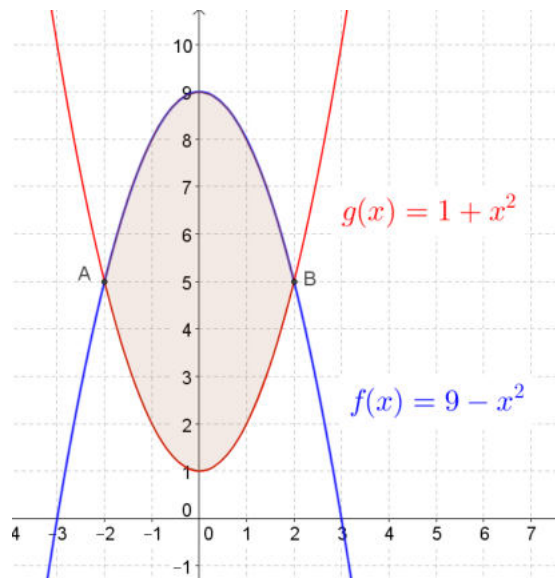
$$y = 1 + x^2 \quad , \quad y = 9 - x^2$$

– D le solide engendré par la rotation de S autour de l'axe Ox .

(a) Faire un croquis de D

(b) Calculer l'aire de S

(c) Calculer le volume de D



(b) Les courbes se coupent en $x = \pm 2$ et le système présente une symétrie d'axe Oy

$$A = 2 \int_0^2 (9 - x^2) - (1 + x^2) dx = 4 \int_0^2 4 - x^2 dx = 4 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{64}{3} \text{ ua}$$

$$(c) V = 2\pi \int_0^2 (9 - x^2)^2 - (1 + x^2)^2 dx = 40\pi \int_0^2 4 - x^2 dx = 40\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{640\pi}{3} \text{ uv}$$

Le 17 juin 2014.

EXANA384 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999.

Soient la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = |x|^3 e^{-x}$$

et \mathcal{C} la courbe d'équation $y = f(x)$ (\mathcal{C} est le graphe de f).

- (a) En utilisant la définition de la dérivée, calculer $f'(0)$ (et justifier son existence).
 - (b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
 - (c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse -1 .
 - (d) Etablir le tableau des variations de f , f' et f'' contenant
 - les racines de f , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
 - les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$
 - les extréma de f , les domaines de croissance et de décroissance de f .
 - les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f .
 - (e) Tracer soigneusement la courbe \mathcal{C} d'après les résultats du 3 d
-

(a) – Soit $x > 0$, alors la fonction s'écrit $f(x) = x^3 e^{-x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 e^{-x} = 0$$

– Soit $x < 0$, alors la fonction s'écrit $f(x) = -x^3 e^{-x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 e^{-x} = 0$$

La dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite, elle existe donc et vaut $f'(x) = 0$

$$(b) f'(x) = \begin{cases} e^{-x} x^2 (x - 3) & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} x^2 (3 - x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Racines : 0 et 3}$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} x (x^2 - 6x + 6) & \text{si } x > 0 \\ -e^{-x} x (x^2 - 6x + 6) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{Racines : 0, } 3 - \sqrt{3} \approx 1.3, 3 + \sqrt{3} \approx 4.7$$

(c) Equation de la tangente en $x = -1$

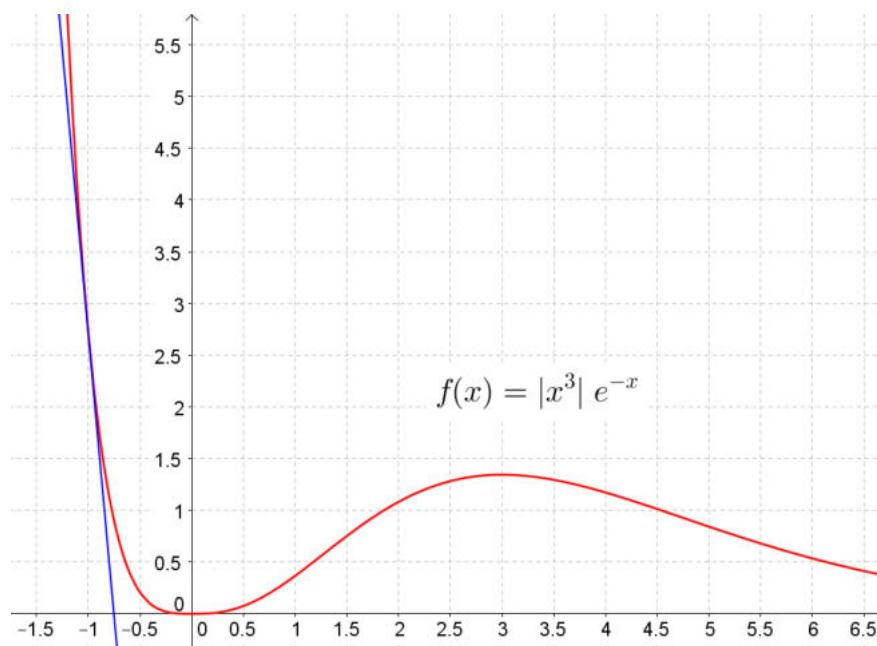
$$f(-1) = e$$

$$f'(-1) = -4e$$

$$t \equiv y - e = -4e(x + 1) \Rightarrow y = -e(4x + 3)$$

(d)

x	0	1.3	3	4.7					
f'	-	0	+	+	+	0	-	-	-
f''	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f	\searrow	$m(0,0)$	\nearrow	\nearrow	\nearrow	$M(3,1.34)$	\searrow	\searrow	\searrow
	\cup	\cup	\cup	$I(1.3,0.57)$	\cap	\cap	\cap	$I(4.7,0.9)$	\cup



17 juin 2014

EXANA385 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 1999.

Calculer

$$(a) \int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx$$

$$(b) \int e^{2x} \arctan(e^{x+1}) dx$$

$$(a) I = \int \frac{\tan x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x(1 + \cos x)} dx$$

On pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{t(1+t)} \text{ que l'on d\u00e9compose en fractions rationnelles}$$

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t|$$

$$\Rightarrow I = \ln \left| \frac{\cos x}{1 + \cos x} \right| + C$$

$$(b) I = \int e^{2x} \arctan(e^{x+1}) dx$$

$$g' = e^{2x} \Rightarrow g = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$f = \arctan e^{x+1} \Rightarrow f' = \frac{1}{1 + e^{2(x+1)}} \cdot e^{x+1}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan(e^{x+1}) - \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} e^{x+1}}{1 + e^{2(x+1)}} dx}_{=I'}$$

$$\text{On pose } t = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = e^{x+1} dx \\ t^2 = e^{2x} \\ e^2 = e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I' &= -\frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} e^{x+1}}{1 + e^{2(x+1)}} dx = -\frac{1}{2e^2} \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2e^2} \left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right] \\ &= -\frac{1}{2e^2} [t - \arctan t] = -\frac{1}{2e^2} [e^{x+1} - \arctan(e^{x+1})] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{2x} \arctan(e^{x+1}) - \frac{1}{2e^2} [e^{x+1} - \arctan(e^{x+1})]$$

$$I = \frac{1}{2e^2} [(e^{2x+2} + 1) \arctan(e^{x+1}) - e^{x+1}] + C$$

EXANA386 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 1999.

Sout la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} impaire, périodique de période 4 définie par

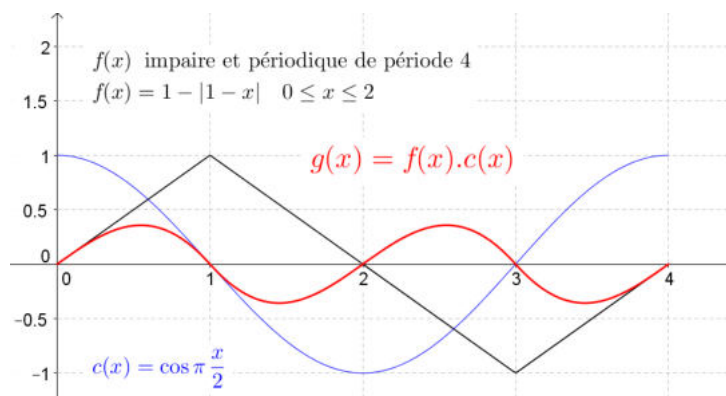
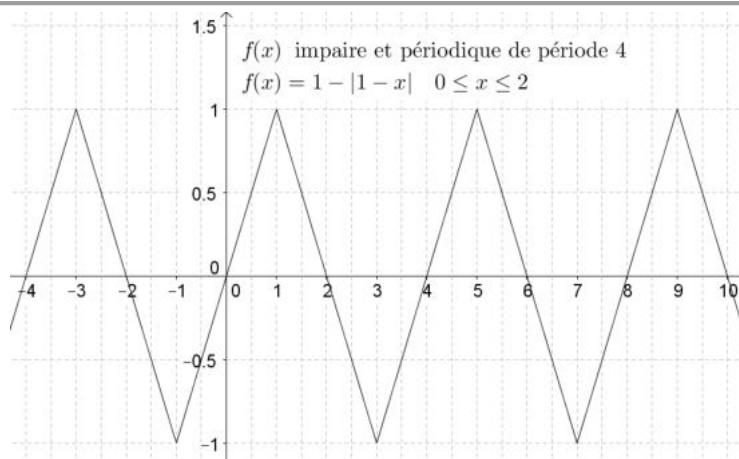
$$f(x) = 1 - |1 - x| \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2$$

(a) Tracer le graphe de f .

(b) Calculer

$$\int_0^4 f(x) \cos \frac{\pi}{2} x dx$$

$$\int_{-26.4}^{39.8} f(x) dx$$



(b)(1) Etudions d'abord $\int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx$, c'est-à-dire que $x \in [0, 2]$

Faisons une translation de l'axe des Y en $x = 1 \Rightarrow x' = x - 1$

Dans ce nouveau repère, $f(x)$ devient $f(x') = 1 - |x'|$. on voit tout de suite que cette fonction est paire.

$$\begin{aligned} \text{La fonction : } c(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \text{ devient } c(x') &= \cos \frac{\pi(x'+1)}{2} \\ &= \cos \left(\frac{\pi x'}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi x'}{2} \text{ qui est une fonction impaire} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction : $f(x') \cdot \left(-\sin \frac{\pi x'}{2} \right)$ est une fonction impaire

$$\text{et on a alors } \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = -\int_{-1}^1 f(x') \sin \frac{\pi x'}{2} dx' = 0$$

Il est facile de démontrer de la même façon que $\int_2^4 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = 0$

$$\text{En conclusion : } \boxed{\int_0^4 f(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = 0}$$

(2) Nous avons successivement

$$\begin{aligned} \int_{-26.4}^{39.8} f(x) dx &= \int_{-26.4}^{-26} f(x) dx + \underbrace{\int_{-26}^{+38} f(x) dx}_{=0} + \int_{+38}^{+39.8} f(x) dx \\ &= \int_{1.6}^2 f(x) dx + \int_2^{3.8} f(x) dx = \int_{1.6}^3 f(x) dx + \int_3^{3.8} f(x) dx \\ &= \int_{1.6}^3 (2-x) dx + \int_3^{3.8} (x-4) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{1.6}^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 4x \right]_3^{3.8} = -\frac{21}{50} - \frac{24}{50} = -\frac{45}{50} = \boxed{-\frac{9}{10}} \end{aligned}$$

19 octobre 2014

EXANA387- EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

(1) Soit f une fonction de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Définissons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = x.f(x)$$

Démontrer que si f est continue au point 0, alors g est dérivable en ce point et donner $g'(0)$.

(2) Soit $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln^2 x$. Calculer la limite de f à l'origine.

(3) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$$

(4) Etablir l'intégrale du volume du solide engendré par la rotation autour de la droite $x = 3$ de la surface délimitée par les graphes de $y = x^2$ et $y = x + 2$ (Il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$(1) g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x.f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

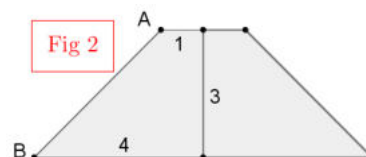
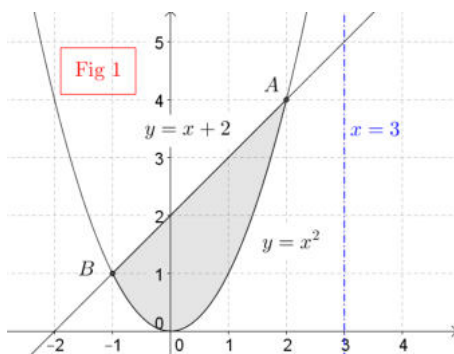
car f est continue en $x = 0$.

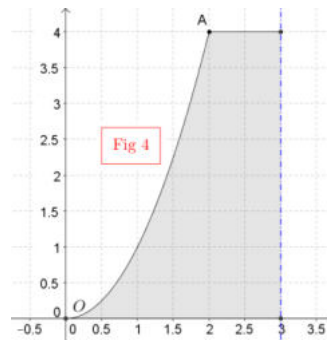
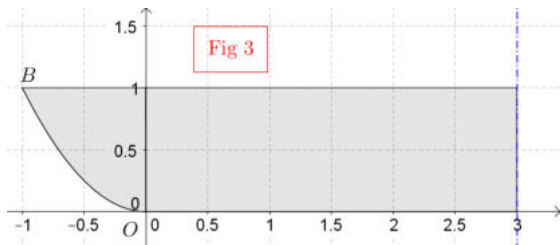
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \ln^2 x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{Hospital}} -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = -8 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$(3) I = \int_1^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx. \quad \text{On pose } u = \sqrt{x} \text{ c'est-à-dire } x = u^2 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u \cdot du \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u \cdot du}{u^2 + u} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{1 + u} = 2 [\ln(1 + u)]_1^{\sqrt{2}} = 2 (\ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 2) = 2 \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$





(4) Rappels :

Rotation autour de l'axe OX : $V = \pi \int y^2 dx$

Rotation autour de l'axe OY : $V = \pi \int x^2 dy$

Rotation autour de l'axe $x - 3 = 0$: $V = \pi \int (x - 3)^2 dx$

La parabole $y = x^2$ se décompose en $\begin{cases} x = \sqrt{y} \text{ sur } OA \\ x = -\sqrt{y} \text{ sur } OB \end{cases}$

Le segment AB engendre par rotation autour de l'axe $x = 3$ un tronc de cône (Fig 2)

$$V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 3}{3} (16 + 1 + 4) = 21\pi$$

On a aussi : $V_1 = \pi \int_1^4 (x - 3)^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 5)^2 dy$

La courbe BO engendre par rotation un volume V_2 (Fig 3)

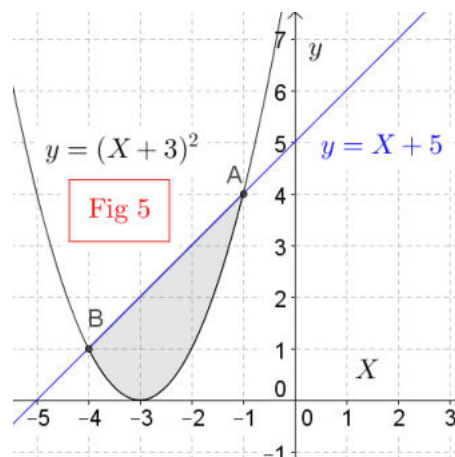
$$V_2 = \pi \int_0^1 (-\sqrt{y} - 3)^2 dy$$

La courbe OA engendre par rotation un volume V_3 (Fig 4)

$$V_3 = \int_0^4 (\sqrt{y} - 3)^2 dy$$

Finalement, on obtient : $V = V_1 + V_2 - V_3$

Pour information, on a $V_1 = 21\pi, V_2 = \frac{27\pi}{2}, V_3 = 12\pi$ et donc $V = \frac{45\pi}{2}$



Remarque

Si on place l'axe $x = 3$ en $X = 0$ alors la parabole $y = x^2$ s'écrit $y = (X + 3)^2$
et la droite $y = x + 2$ devient $y = X + 5$. (Fig 5)

25 octobre 2014

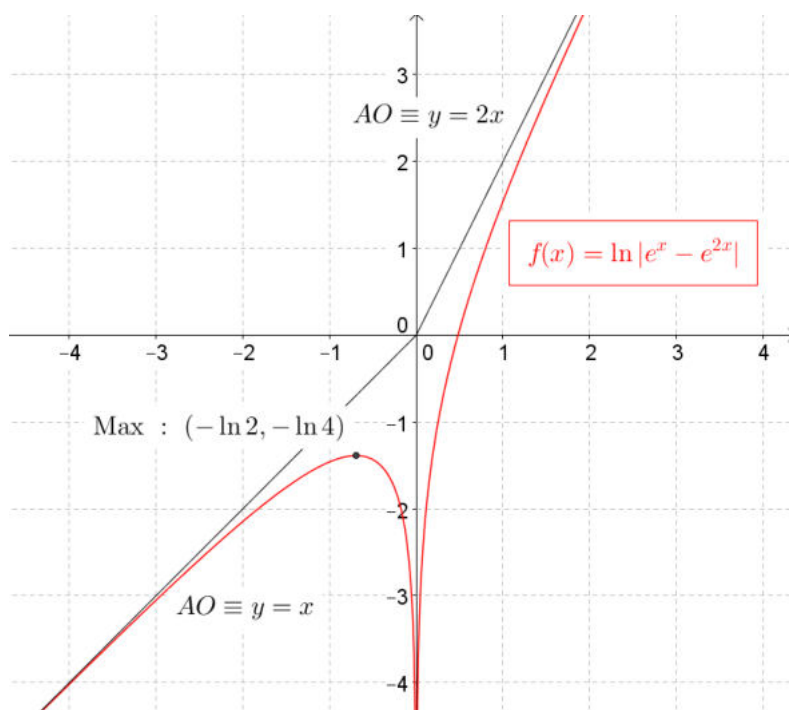
EXANA388 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln |e^x - e^{2x}|$$

- (1) Etudier les variations de f . On précisera le domaine de définition de f , les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et les extrema éventuels (On n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
- (2) On donne $e = 2.718$ et $\sqrt{e} = 1.648$. Démontrer que f s'annule en un point unique $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$. Construire le graphe de f .
- (3) Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle $] 0; +\infty [$ admet une réciproque notée g^{-1} . Donner l'expression de $g^{-1}(x)$

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$f(x) = \ln|e^x - e^{2x}| \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x < 0: f(x) = \ln(e^x(1 - e^x)); e^x < 1 \\ \text{si } x > 0: f(x) = \ln(e^x(e^x - 1)); e^x > 1 \end{cases}$$

(1) Domaine de f est \mathbb{R}_0

$$\text{AV} \equiv x = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} f = [\ln 0] = -\infty$$

$$\text{Pas d'AH car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f = [\ln 0] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x(e^x - 1)) = [\ln(+\infty)] = +\infty \end{cases}$$

AO en $-\infty$ a pour équation $y = x$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(e^x(1 - e^x))}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 2e^{2x}}{e^x - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x(1 - 2e^x)}{e^x(1 - e^x)} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln(e^x(1 - e^x)) - \underbrace{1}_{=\ln e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \frac{e^x - e^{2x}}{e^x} \right] \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^x) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

AO en $+\infty$ a pour équation $y = 2x$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x(e^x - 1))}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - e^x}{e^{2x} - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(e^{2x} - e^x) + e^x}{e^{2x} - e^x} = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} - e^x} \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(e^x(e^x - 1)) - \underbrace{2}_{=\ln e^{2x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x}} \right] \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Dérivée première (Rappel : $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$)

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^x - e^{2x}} = \frac{1 - 2e^x}{1 - e^x} \text{ racine en } x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	- / +
$f(x)$	AO	↗	Max	↘ AV ↗ AO

Maximum local en $(-\ln 2, -\ln 4)$ car $\ln \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| = -\ln 4$

$$(2) \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e - \sqrt{e}) = \ln(2.718 - 1.648) > \ln 1 = 0 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

On utilise le théorème de valeurs intermédiaires pour une fonction **continue** sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

pour affirmer qu'il existe $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On remarque l'unicité de α , car f est une fonction strictement croissante ($f' > 0$) sur cet intervalle.

(3) Puisque $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante, on peut affirmer que f est injective et surjective dans son image \mathbb{R} . Dès lors f admet une fonction réciproque

$$f^{-1} = g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \rightarrow g(x)$$

Déterminons $g(x)$:

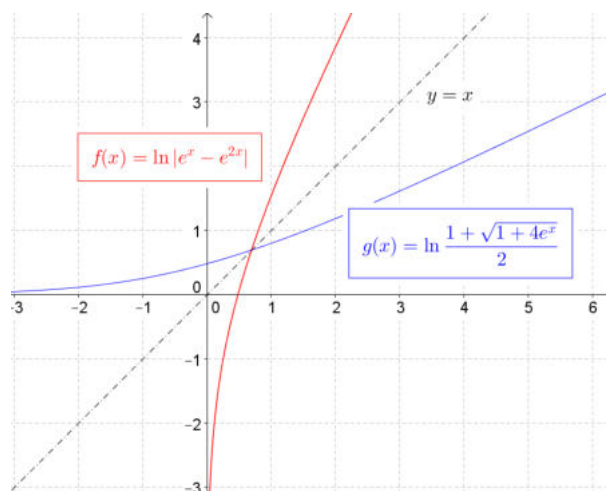
$$x = \ln(e^{2y} - e^y) \Rightarrow e^x = e^{2y} - e^y \Rightarrow e^{2y} - e^y - e^x = 0$$

On obtient une équation du second degré en e^y

Comme $\Delta = 1 + 4e^x > 0$, et que le terme indépendant $-e^x < 0$, il y a 2 racines de signes opposés. On rejette la racine négative car $e^y > 0$

$$\Rightarrow e^y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4e^x}}{2}$$

$$\text{Et finalement : } g(x) = y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4e^x}}{2}$$



25 octobre 2014

EXANA389 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Le débit R d'une ligne de transmission (telle qu'une ligne VDSL) peut s'écrire sous la forme

$$R = \log_2(1 + PQ)$$

où P est la puissance du signal transmis sur la ligne, et Q est un nombre désignant la qualité de la ligne.

Vous disposez de 2 lignes de qualité différentes pour votre connexion internet. Votre première ligne possède une qualité $Q_1 = 0.1$ et la seconde une qualité $Q_2 = 5$. Votre fournisseur peut combiner les deux lignes de façon à obtenir un débit correspondant à la somme des débits de chaque ligne, mais doit répartir la puissance totale $P_F = 6$ W entre les deux lignes.

On note P_1 la puissance utilisée dans la première ligne et P_2 la puissance utilisée dans la seconde ligne ($P_1 + P_2 = P_F$).

- (1) Ecrivez l'expression du débit total R_T disponible pour votre connexion internet en fonction des variables P_1 et P_2 .
- (2) Ecrivez P_2 en fonction de P_1 et substituez dans l'expression du point (1), de façon à obtenir le débit total R_T en fonction de la seule variable P_1 .
- (3) Sachant qu'on ne peut pas transmettre de puissance négative, déterminez le domaine de valeurs possibles de P_1 .
- (4) Etudiez les variations (croissance et décroissance) de la fonction $R_T(P_1)$ sur ce domaine.
- (5) Quelle est la répartition de puissance P_1, P_2 qui maximise le débit de votre connexion?

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$(1) R_T = \log_2(1 + 0.1P_1) + \log_2(1 + 5P_2)$$

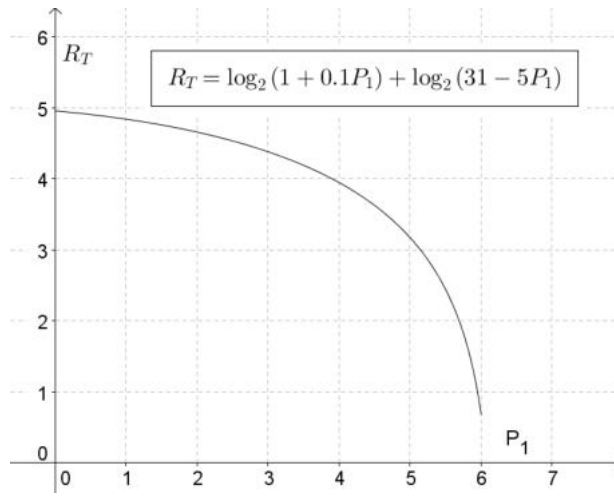
$$(2) P_2 = P_F - P_1 = 6 - P_1 \Rightarrow R_T = \log_2(1 + 0.1P_1) + \log_2(31 - 5P_1)$$

$$(3) R_1 \text{ et } R_2 \text{ sont positifs; donc } \begin{cases} 1 + 0.1P_1 \geq 1 \Rightarrow P_1 \geq 0 \\ 31 - 5P_1 \geq 1 \Rightarrow P_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq P_1 \leq 6$$

$$(4) \frac{\partial R_T}{\partial P_1} = \dots = \frac{-1.9 - P_1}{(1 + 0.1P_1)(31 - 5P_1)} < 0$$

Dès lors, R_T est décroissante sur $[0, 6]$

$$(5) \text{ La répartition est } P_1 = 0 \text{ et } P_2 = 6$$



25 octobre 2014