

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 39

EXANA390 – EXANA399

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard**

Octobre 2014

EXANA390 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

(1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $a < f(a)$ et $f(b) < b$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = c$

(2) Calculer la primitive suivante :

$$\int \ln(x^2 + 1) dx$$

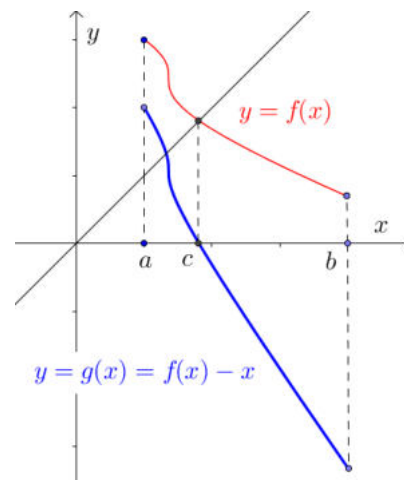
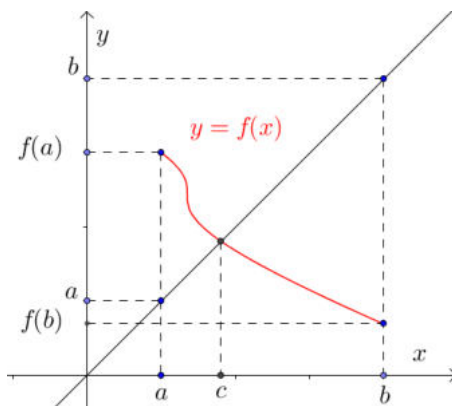
(3) Etudier la limite à l'origine de la fonction

$$f(x) = \frac{\sin^2(x+a) - \sin^2 a}{x^2}$$

pour un paramètre fixe a tel que $\cos a \neq 0$.

(4) La région du premier quadrant délimitée par le graphique de l'équation $x = 2y^3 - y^4$ et l'axe des y , en tournant autour de l'axe des x , engendre un solide de révolution. Etablir l'intégrale du volume de ce solide (Il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

Solution proposée par Nicole Berckmans



(1) Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow g(x) = f(x) - x$

g est continue car f l'est. De plus $\begin{cases} g(a) = f(a) - a > 0 \\ g(b) = f(b) - b < 0 \end{cases}$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue, on peut dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$

(2) $I = \int \ln(x^2 + 1) dx$ On choisit : $\begin{cases} f'(x) = 1 & \Rightarrow f(x) = x \\ g(x) = \ln(x^2 + 1) & \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + k \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x+a) - \sin^2 a}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x+a) \cos(x+a)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2a)}{2x} = \left[\frac{\sin 2a}{0} \right] = L$$

• Si $\sin 2a > 0$ alors L n'existe pas car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x+2a)}{2x} = +\infty \\ \lim_{x > 0} \frac{\sin(2x+2a)}{2x} = +\infty \end{cases}$

• Si $\sin 2a < 0$ alors L n'existe pas, vu un raisonnement analogue.

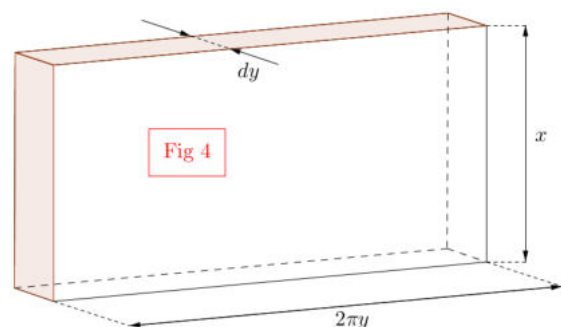
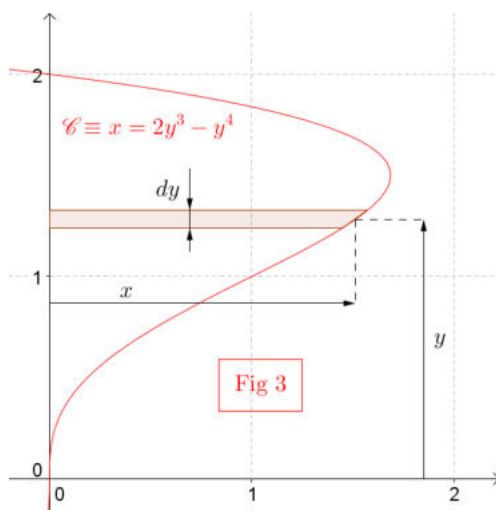
• Si $\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 0$ alors $\sin a = 0$ car dans l'énoncé on précise que $\cos a \neq 0$

Donc $a = k\pi$, $\sin^2(x+k\pi) = \sin^2 x$ et $\sin^2 a = 0$

$$\text{Dès lors : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$$

(4) Cette question est HORS MATIERE et a finalement été annulée.

Compléments par Jacques Collot



La question (4) est hors matière. Pour ceux que cela pourrait intéresser, voici une méthode qui permet de répondre à la question. Cette méthode ne fait PAS partie de la matière à connaître pour l'examen.

Méthode des tubes

Soit la courbe $\mathcal{C} \equiv x = 2y^3 - y^4$. Cette courbe coupe l'axe des y en $y = 0$ et $y = 2$.

\mathcal{C} est représentée à la Fig 3. Considérons la surface sombre d'épaisseur infiniment petite dy , située à une distance y de l'axe des x et de côtés parallèles à l'axe des x .

Comme dy est infiniment petit, on peut assimiler cette surface à un rectangle de hauteur dy et de longueur x . Si on fait tourner ce rectangle autour de l'axe des x , il va engendrer un volume semblable à un tube. Le volume de ce tube peut être approximé par un parallélépipède rectangle de hauteur x , de longueur $2\pi y$ (longueur de la circonférence) et d'épaisseur dy . (Fig 4)

$$\Rightarrow dV = 2\pi y \cdot x \cdot dy$$

Or $x = 2y^3 - y^4 \quad \Rightarrow dV = 2\pi y(2y^3 - y^4) dy$

Le volume engendré par la courbe \mathcal{C} peut être considéré comme une somme infinie de tubes :

$$\Rightarrow V = \int_0^2 2\pi y(2y^3 - y^4) dy = \frac{64\pi}{15}$$

25 octobre 2014

EXANA391 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - x$$

- (1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative \mathcal{C}_f . On précisera le domaine de définition de f , les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extréma éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
- (2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.
- (3) Démontrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour la courbe \mathcal{C}_f .
- (4) Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine délimité par \mathcal{C}_f , la droite d'équation $y = -x + 2$, l'axe y et la droite d'équation $x = 1$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

- (1) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. f est continue sur son domaine, il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left[\frac{\infty}{\infty} - \infty \right] = [2 - \infty] = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 2$$

En $+\infty$, on a une asymptote oblique d'équation $y = 2 - x$ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 2 = 0$$

En $-\infty$, on a une asymptote oblique d'équation $y = -x$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} = 0$$

$$(2) f'(x) = \frac{-(e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \text{ et s'annule pour } x = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c} & 0 \\ f' & - \quad 0 \quad - \\ f & \searrow \quad 1 \quad \searrow \end{array}$$

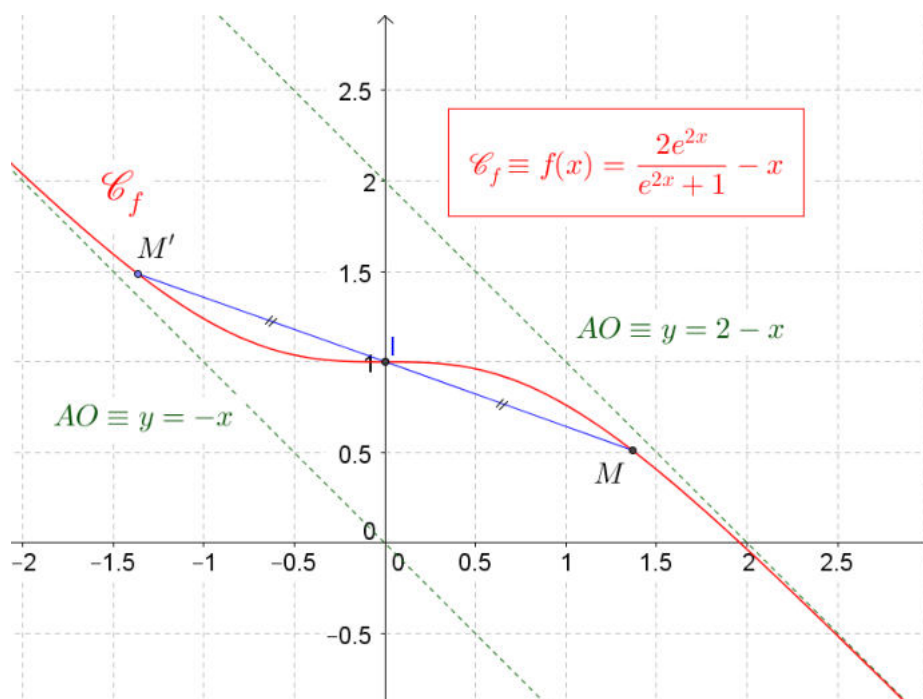
Tangente horizontale en $(0,1)$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2e^3}{e^3 + 1} - \frac{3}{2} = \frac{e^3 - 3}{2(e^3 + 1)} > 0 \text{ car } e^3 > 2^3 = 8 > 3$$

$$f(2) = \frac{-2}{e^4 + 1} < 0.$$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

on peut affirmer qu'il existe $\alpha \in \left]\frac{3}{2}, 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Cette racine est unique car sur cet intervalle f est strictement décroissante ($f' < 0$).



(3) $I(0,1)$ est centre de symétrie pour la courbe.

Démonstration 1 : La fonction $g(x) = f(x) - 1$ est une fonction impaire ($g(-x) = -g(x)$)

$$\text{En effet : } \begin{cases} g(-x) = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} + x - 1 = \frac{2}{1 + e^{2x}} + x - 1 \\ -g(x) = -f(x) + 1 = \frac{-2e^{2x}}{e^{2x} + 1} + x + 1 \end{cases}$$

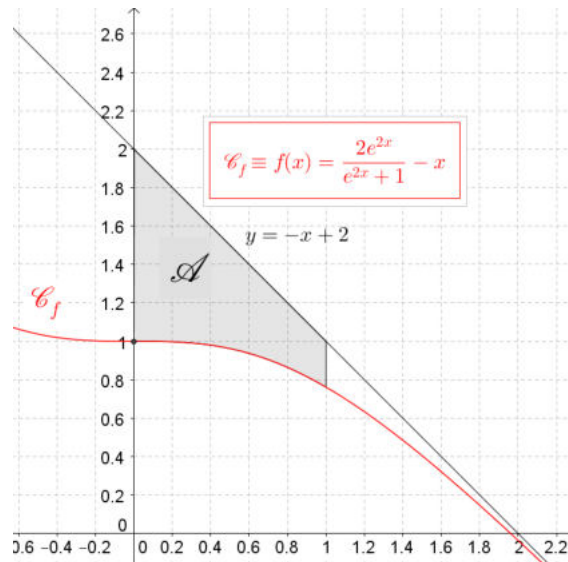
On montre assez facilement que $g(-x) = -g(x)$.

Démonstration 2 : Soient : $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$

Si I est centre de symétrie alors : $\vec{M} + \vec{M}' = 2\vec{I}$

$$\begin{cases} \vec{M} \left(x, \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - x \right) \\ \vec{M}' \left(-x, \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} + x \right) \end{cases} \Rightarrow \vec{M} + \vec{M}' = (0, 2) = 2\vec{I}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - x + \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x} + 1} + x &= 2 \frac{e^{2x}(e^{-2x} + 1) + e^{-2x}(e^{2x} + 1)}{(e^{-2x} + 1)(e^{2x} + 1)} \\ &= 2 \frac{1 + e^{2x} + 1 + e^{-2x}}{1 + e^{2x} + e^{-2x} + 1} = 2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (4) \quad A &= \int_0^1 (-x + 2) - \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - x \right) dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) dx = [2x - \ln(e^{2x} + 1)]_0^1 \\
 &= 2 - \ln(e^2 + 1) - 0 + \ln 2 = \ln e^2 - \ln(e^2 + 1) + \ln 2 = \ln \left(\frac{2e^2}{e^2 + 1} \right)
 \end{aligned}$$

25 octobre 2014

EXANA392 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

Les ingénieurs de Louvain-la-Neuve ont mis au point une nouvelle centrale à la kryptonite. Ils ont établi un modèle décrivant la puissance W (en GWatts) que peut fournir la centrale en fonction de la température T (en °C) et de la pression P (en bars) utilisées :

$$W = \frac{e^{-aT}}{P}$$

où $a = \frac{1}{200}$ est un paramètre constant.

Pour fonctionner correctement, la centrale doit cependant satisfaire à des contraintes de température et pression minimales :

- La température doit être supérieure à 0°C : $T > 0$
- La pression doit atteindre une valeur minimale dépendant de la température

$$\begin{cases} P \geq \frac{1}{4}\sqrt{204-T} & \text{pour } 0 < T \leq 200 \\ P \geq \frac{1}{2} & \text{pour } T > 200 \end{cases}$$

L'objectif de ce problème est de déterminer les valeurs de température et pression fournissant la plus grande puissance, dans les limites fixées par les contraintes de fonctionnement de la centrale.

- (1) Démontrez que, pour une température fixée $T > 0$, la puissance W est une fonction strictement décroissante de la pression. En déduire la valeur de pression à choisir, en fonction de la température, pour maximiser la puissance.
- (2) Réécrire le modèle décrivant la puissance W en fonction seulement de la température T , sous l'hypothèse du choix de pression obtenu au point (1). Aide : Séparer la fonction en 2 parties selon que $0 < T \leq 200$ ou $T > 200$.
- (3) Déterminez les valeurs de T et P qui maximisent la puissance W sous les contraintes de fonctionnement.

Solution proposée par Nicole Berckmans

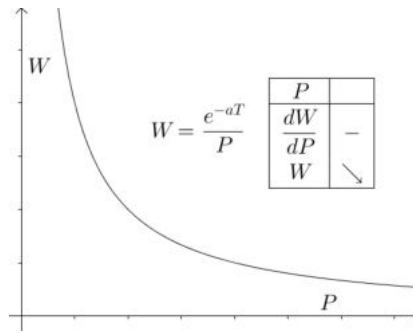
$$(1) \text{ Si } W = \frac{e^{-aT}}{P} \text{ alors } \frac{dW}{dP} = \frac{-e^{-aT}}{P^2} < 0$$

Donc il faut choisir P minimum pour que W soit maximum.

$$\text{Si } 0 < T \leq 200 \text{ alors } P = \frac{1}{4}\sqrt{204-T}$$

$$\text{Si } 200 < T \text{ alors } P = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rem : si } T = 200 \text{ alors } P = \frac{1}{2}$$



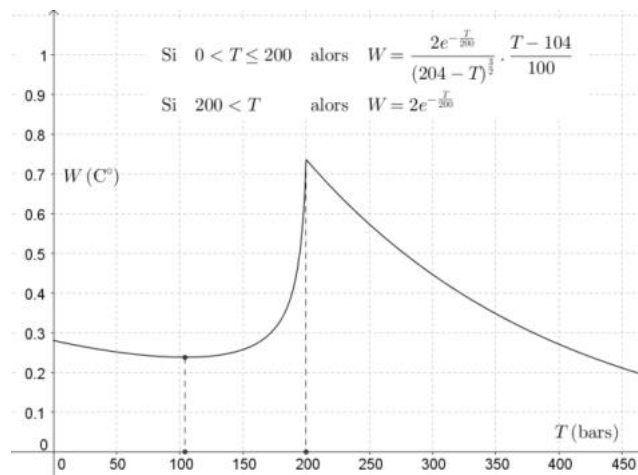
(2) Si $0 < T \leq 200$ alors $P = \frac{1}{4}\sqrt{204-T} \Rightarrow W = \frac{4e^{-aT}}{\sqrt{204-T}}$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dT} = \frac{4e^{-aT}}{204-T} \left(-a\sqrt{204-T} + \frac{1}{2\sqrt{204-T}} \right) = \frac{2e^{-aT}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}} [-2a(204-T) + 1]$$

$$= \frac{2e^{-aT}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}} (2aT - 2a \cdot 204 + 1) = \frac{2e^{-\frac{T}{200}}}{(204-T)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{T-104}{100}$$

T	0	104	200
$\frac{dW}{dT}$	-	0	+
W	\searrow		\nearrow

Si $200 < T \Rightarrow W(T) = 2e^{-\frac{T}{200}}$ et $\frac{dW}{dT} = -2ae^{-aT}$. W est une fonction décroissante.



(3)

T	0	104	200
$W(T)$	\searrow	Min	\nearrow Max \searrow

$$W(0) = \frac{2}{\sqrt{51}} \approx 0.28, \quad W(104) = \frac{0.4}{\sqrt{e}} \approx 0.24, \quad W(200) = \frac{2}{e} \approx 0.74$$

Donc W est maximum pour $T = 200^\circ$ et $P = 1/2$ bars

EXANA393 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

(1) Soit 2 fonctions f et g à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 1$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

(2) Calculer les deux intégrales suivantes :

(a) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$

(b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{e^x + 1} dx$

(3) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f	$+\infty$		3	
		\searrow	\nearrow	\searrow
		0		1

Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

$$f(x) = 0, f(x) = -1, f(x) = 2.$$

Justifier.

Solution proposée par Louis François

(1) Le produit de 2 réels positifs, inférieurs à 1 est plus petit que chacun de ses facteurs.

Donc pour tout x : $f(x).g(x) \leq f(x) \leq 1$ et $f(x).g(x) \leq g(x) \leq 1$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Donc en vertu du théorème du sandwich :
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \end{cases}$$

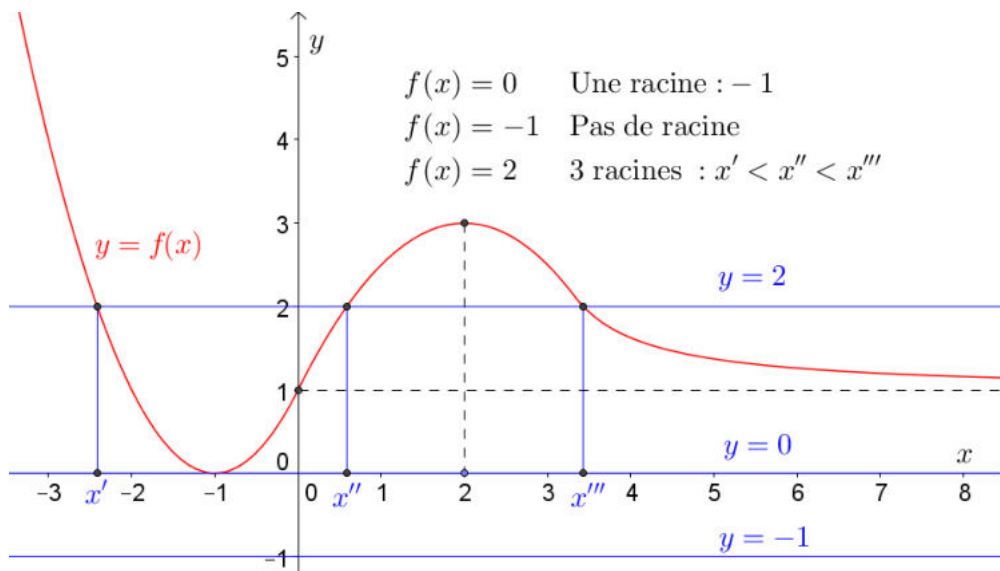
(2) (a) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx = 0$ car $\frac{x^3}{x^4+1}$ est impaire sur $[-1,1]$

Rem : $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + k$

(b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{e^x+1} dx$. Soit $e^x = t \Rightarrow \begin{cases} x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \\ x = 2 \Rightarrow t = e^2 \\ x = -1 \Rightarrow t = e^{-1} \end{cases}$

L'intégrale devient :

$$\begin{aligned} \int_{e^{-1}}^{e^2} \frac{dt}{t(t+1)} &= \int_{e^{-1}}^{e^2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dx = [\ln t - \ln(t+1)]_{e^{-1}}^{e^2} \\ &= 2 - \ln(e^2+1) - (-1) + \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right) = 2 + \ln\left(\frac{e+1}{e^2+1}\right) \end{aligned}$$



EXANA394 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$$

- (1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative \mathcal{C}_f . On précisera le domaine de définition de f , les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
- (2) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e$ et $x = \lambda$, avec $e < \lambda < e^{\sqrt{2}}$
- (3) En déduire $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow e^{\sqrt{2}} \\ \lambda < e^{\sqrt{2}}}} \mathcal{A}(\lambda)$

Solution proposée par Louis François

$$(1) \text{ Dom } f : \begin{cases} \ln x \Rightarrow x > 0 \\ 2 - \ln^2 x > 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < \ln x < \sqrt{2} \Rightarrow e^{-\sqrt{2}} < x < e^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

f est continue sur $]e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}[$

$$\lim_{x \rightarrow e^{-\sqrt{2}}} f = \left[\frac{1}{0} \right] = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = e^{-\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} f = \left[\frac{1}{0} \right] = +\infty \Rightarrow AV \equiv x = e^{\sqrt{2}}$$

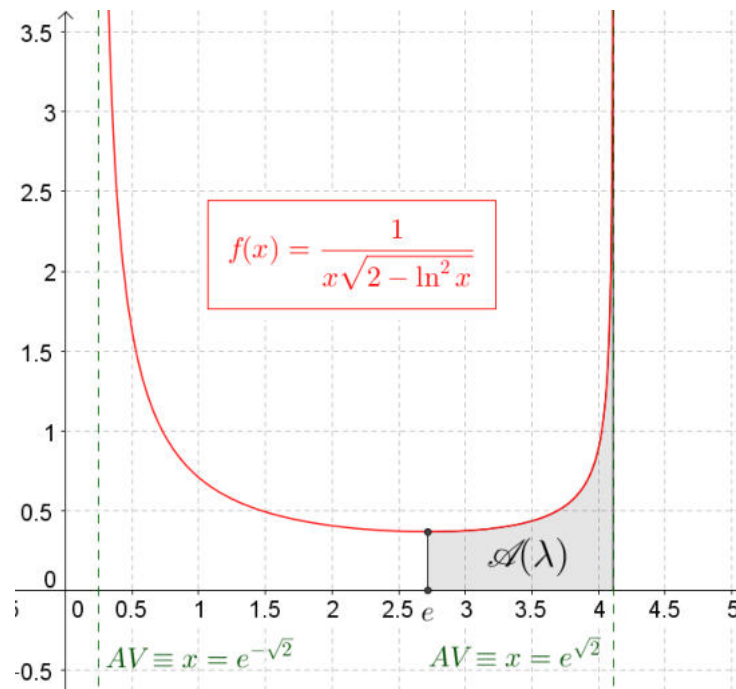
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{(x\sqrt{2-\ln^2 x})^2} \cdot \left(\sqrt{2-\ln^2 x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-\ln^2 x}} \cdot (-2\ln x \cdot \frac{1}{x}) \right) \\ &= \dots = \frac{\ln^2 x + \ln x - 2}{x^2(2-\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\ln^2 x + \ln x - 2 = 0 \text{ a pour racines } \begin{cases} \ln x = 1 \Rightarrow x = e \\ \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \end{cases}$$

Le signe de f' est le signe de $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$ sur le domaine mais e^{-2} est hors domaine car $-2 < -\sqrt{2}$.

x	$e^{-\sqrt{2}}$	e	$e^{\sqrt{2}}$	
f'		-	0	+
f	+	↘	min	↗
	+			+

avec $\min : \left(e, \frac{1}{e} \right)$



$$(2) \mathcal{A}(\lambda) = \int_e^{\ln \lambda} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{2 - \ln^2 x}} dx \quad \text{On pose : } \ln x = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = dt \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = \lambda \Rightarrow t = \ln \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\lambda) = \int_1^{\ln \lambda} \frac{dt}{\sqrt{2 - t^2}} = \int_1^{\ln \lambda} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \left[\arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} \right]_1^{\ln \lambda} = \arcsin \frac{\ln \lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \mathcal{A}(\lambda) = \arcsin 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

25 octobre 2014

EXANA395 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Roger va rejoindre sa petite amie Mirka qui habite dans la vallée voisine. Le trajet jusqu'au point de rendez-vous est constitué de 10 km de montée régulière à 10% suivis de 10 km de descente régulière à 10%. Roger démarre à 11h40 et voudrait arriver précisément à midi, l'heure de rendez-vous. La consommation de sa voiture peut être calculée par la formule suivante :

$$C = \sqrt{v} \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3, \quad [l / 100 \text{ km}]$$

pour une vitesse v [km/h] supposée constante sur une pente p (exprimée en pourcents) supposée constante. Roger roule à vitesse constante v_1 sur le premier tronçon du trajet, et une vitesse v_2 sur le second. L'objectif de cette question est de déterminer le choix optimal de ces vitesses pour minimiser la consommation tout en arrivant exactement à l'heure.

- (1) Exprimez la consommation totale en fonction des vitesses v_1 et v_2 .
- (2) Exprimez le lien entre v_1 et v_2 nécessaire pour assurer l'heure d'arrivée exacte.
- (3) Substituez v_2 en fonction de v_1 dans l'expression de la consommation pour obtenir une expression dépendant de v_1 seulement.
- (4) Déterminez les valeurs optimales de v_1 et v_2 minimisant la consommation.

Solution proposée par Louis François

$$(1) C(v_1, v_2) = \sqrt{v_1} (1.1)^3 + \sqrt{v_2} (0.9)^3$$

$$(2) e = v.t; \quad t_1 + t_2 = 20' \quad (\text{Unités : km, heure}) \Rightarrow \boxed{\frac{10}{v_1} + \frac{10}{v_2} = \frac{1}{3}}$$

$$(3) \frac{10}{v_2} = \frac{1}{3} - \frac{10}{v_1} = \frac{v_1 - 30}{3v_1} \Rightarrow v_2 = \frac{30v_1}{v_1 - 30} \Rightarrow \boxed{C(v_1) = \sqrt{v_1} (1.1)^3 + \sqrt{\frac{30v_1}{v_1 - 30}} (0.9)^3}$$

$$(4) \begin{cases} v_1 \geq 0 \\ v_2 = \frac{30v_1}{v_1 - 30} \geq 0 \Rightarrow v_1 > 30 \end{cases}$$

$$(5) \frac{dC}{dv_1} = \frac{1}{2\sqrt{v_1}} (1.1)^3 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v_1 - 30}{30v_1}} \frac{30(v_1 - 30) - 30v_1}{(v_1 - 30)^2} (0.9)^3$$

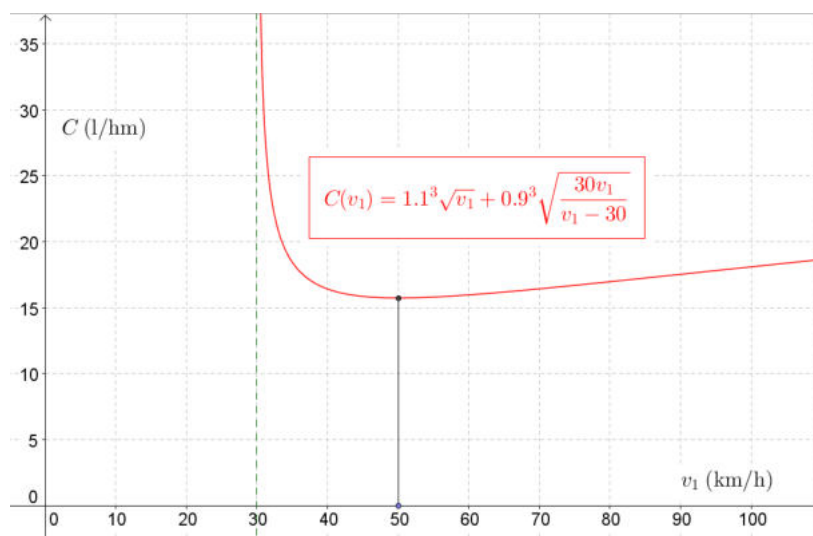
$$= \frac{1}{2\sqrt{v_1}} \left[(1.1)^3 + \sqrt{\frac{v_1 - 30}{30v_1}} \frac{(-900)}{(v_1 - 30)^2} (0.9)^3 \right] = \frac{1}{2\sqrt{v_1}} \left[(1.1)^3 - \sqrt{\frac{(v_1 - 30) \cdot 30^4}{30(v_1 - 30)^4}} (0.9)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{v_1}} \left[(1.1)^3 - \left((0.9) \sqrt{\frac{30}{v_1 - 30}} \right)^3 \right]$$

$$\frac{dC}{dv_1} = 0 \Rightarrow \frac{11}{9} = \sqrt{\frac{30}{v_1 - 30}} \Rightarrow \frac{30}{v_1 - 30} = \frac{121}{81} = \frac{3}{2} \Rightarrow v_1 - 30 = \frac{60}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = 50 \text{ km/h}} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{30 \times 50}{20} = 7.5 \text{ km/h}}$$

v_1	30	50	
dC/dv_1	$-\infty$	0	+
C		min	



25 octobre 2014

EXANA396 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Rechercher l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour tout réel x strictement positif,

$$x.f'(x) - f(x) = x^2 e^{2x},$$

2. pour tout nombre réel strictement positif,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

si $g(x)$ est une fonction définie sur le même intervalle.

On a donc à partir de la deuxième condition :

$$x.g(x) = f(x) \Rightarrow g(x) + x.g'(x) = f'(x)$$

On remplace dans la première condition :

$$x[g(x) + x.g'(x)] - x.g(x) = x^2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow x^2.g'(x) = x^2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = e^{2x}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = C.x + \frac{1}{2}xe^{2x} \quad x \in]0; +\infty[}$$

On vérifie facilement que :

$$x.\left(C.x + \frac{1}{2}xe^{2x}\right)' - \left(C.x + \frac{1}{2}xe^{2x}\right) = x^2 e^{2x}$$

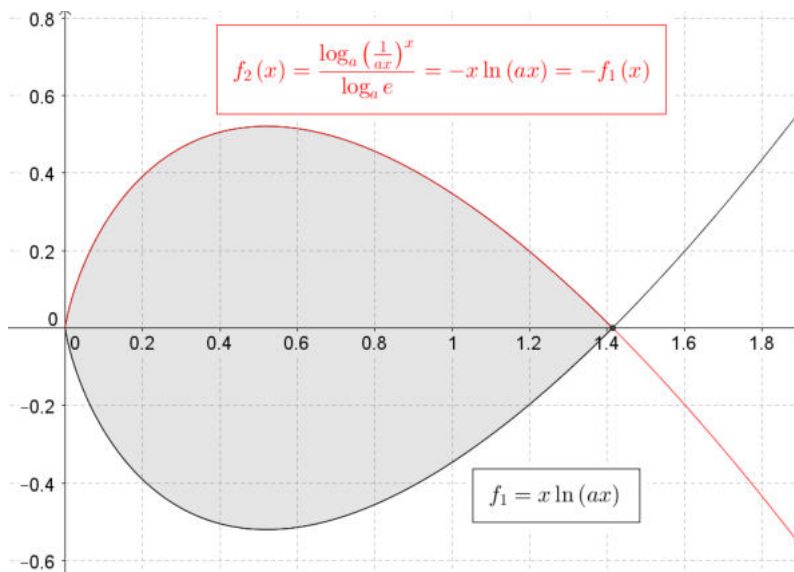
12 novembre 2014

EXANA397- EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Soient $f_1 = x \ln(ax)$ et $f_2 = \frac{\log_a \left(\frac{1}{ax} \right)^x}{\log_a e}$ avec $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$

1. Représenter graphiquement ces deux fonctions.
2. Que doit valoir le paramètre a afin que la surface déterminée par le contour résultant de l'intersection des courbes $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soit égale à 1?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Transformons d'abord f_2

$$f_2(x) = \frac{\log_a \left(\frac{1}{ax} \right)^x}{\log_a e} = \frac{-x \log_a(ax)}{\log_a e} = -x \cdot \frac{\frac{\ln(ax)}{\ln a}}{\frac{\ln e}{\ln a}} = -x \ln(ax) = -f_1(x)$$

f_1 et f_2 sont donc symétriques par rapport à l'axe des x . Elles se coupent sur l'axe des x .

$$\text{Calculons les racines de } f_1 : x \ln(ax) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{A rejeter car hors domaine.} \\ \ln(ax) = 0 \Rightarrow ax = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} \end{cases}$$

La surface S cherchée sera donc égale à $S = -2 \int_0^{1/a} x \ln(ax) \cdot dx$

Calculons d'abord $I = \int x \ln(ax) dx$.

$$\begin{aligned} u = \ln(ax) &\Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = x &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned} \Rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln(ax) - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln(ax) - \frac{x^2}{4} + C$$

Pour calculer S , notons d'abord que $\ln(ax)$ n'est pas défini en $x = 0$.

$$\text{Calculons donc } S = -2 \left(\lim_{b \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{2} \ln(ax) \right]_b^{1/a} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{1/a} \right) = -2 \left(\underbrace{\frac{1}{2a^2} \ln 1}_{=0} - \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{b^2}{2} \ln(ab) \right) - \frac{1}{4a^2} \right)$$

$$\text{La limite vaut } \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{b^2}{2} \ln(ab) \right) = \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(ab)}{\frac{2}{b^2}} \right) \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{ab} \cdot a}{\frac{-4}{b^3}} \right) = \lim_{b \rightarrow 0} (-b^2) = 0$$

$$\text{Par conséquent : } S = \frac{1}{2a^2}. \text{ Nous devons avoir } S = 1 \Rightarrow \frac{1}{2a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

EXANA398 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

La fonction th , appelée tangente hyperbolique, est définie par

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Déterminer le domaine de définition de la fonction th , ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema et points d'inflexion de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquisser le graphe de $th(x)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL. http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/attachment/pdf/2014-08/admissionanalyse_ju14.pdf

Soit la fonction à étudier

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- i. La fonction exponentielle étant définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}_0^+ , le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur de $x \in \mathbb{R}$ et le domaine de définition de th est également \mathbb{R} .
- ii. • Il n'y a pas d'asymptote verticale car la fonction est définie et continue sur \mathbb{R} .
- D'une part, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1^-$$

La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ pour $x \rightarrow +\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs inférieures.

D'autre part, on calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = -1^+$$

La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ pour $x \rightarrow -\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures.

- Il n'y a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà des asymptotes horizontales pour $x \rightarrow \pm\infty$.

iii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned} \text{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0 \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur \mathbb{R} et ne présente pas d'extremum.

iv. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\text{th}''(x) = -8 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$$

dont le seul zéro vérifie $e^x = e^{-x}$ et est donc $x = 0$.

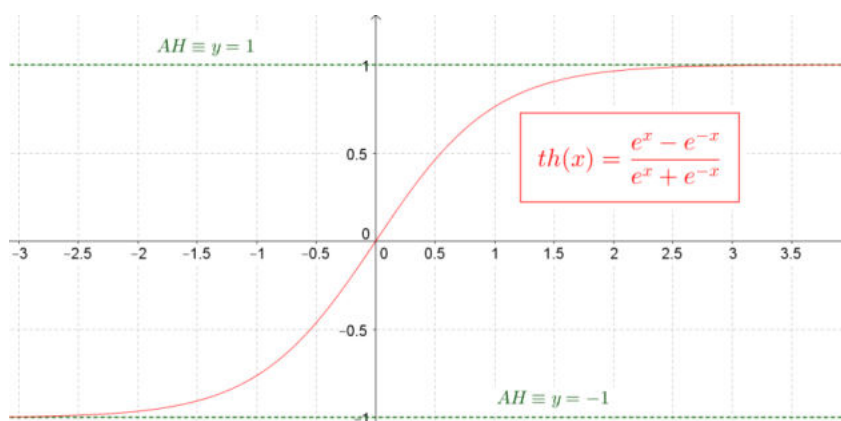
x		0
$\text{th}''(x)$	+	0
$\text{th}(x)$	⤵	P.I. ⤵

La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $\text{th}(0) = 0$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x = 0$ et vers le bas à droite de $x = 0$.

v. Rassemblant les informations obtenues ci-dessus, on peut représenter le graphe de la fonction th .
Pour ce faire, on notera que

$$\text{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\text{th}(x)$$

de sorte que la fonction est impaire et que son graphe présente donc une symétrie centrale par rapport à l'origine.



EXANA399 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

(a) Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3 .

(b) Montrer que

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

où $f(n)$ est une fonction de n à déterminer.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL. http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/attachment/pdf/2014-08/admissionanalyse_ju14.pdf

i. On calcule successivement

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = [x - \arctg x]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Afin de calculer I_4 , on remarque d'abord que l'intégrand peut être transformé par division polynomiale selon

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^2(1+x^2) - x^2}{1+x^2} = x^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - I_2 = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. Soit

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$$

Pour tout $n \geq 2$, l'intégrand peut être transformé selon

$$\frac{x^n}{1+x^2} = \frac{x^{n-2}(1+x^2) - x^{n-2}}{1+x^2} = x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \left(x^{n-2} - \frac{x^{n-2}}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^{n-1}}{n-1} \right]_0^1 - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \end{aligned}$$

Ceci correspond bien à la formule annoncée

$$I_n = f(n) - I_{n-2}, \quad n \geq 2$$

avec

$$f(n) = \frac{1}{n-1}$$

Remarquons que les réponses obtenues plus haut sont bien compatibles avec la formule générale établie. On a en effet

$$I_2 = 1 - I_0 \quad \text{et} \quad I_4 = \frac{1}{3} - I_2$$

20 novembre 2014