

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 4**

**EXANA040 – EXANA049**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

## EXANA040 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Étudier et représenter la fonction suivante (calculer la dérivée seconde).

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

A partir du graphique obtenu, on demande de déduire le nombre de solutions, entre 0 et  $\pi$ , de l'équation

$$\frac{\sin x}{1 + \sin x} = \cos x$$

La fonction est définie sauf si  $\sin x = -1 \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ .

La fonction est périodique de période  $2\pi$ , on ne l'étudiera donc que sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , par exemple  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

La fonction n'a pas d'asymptote horizontale, ni oblique. Elle n'est ni paire ni impaire.

Asymptotes verticales=

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{1 + \sin x} = -\infty$$

$$\text{Quelques valeurs: } f(0) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(\pi) = 0$$

$$\text{Dérivée première: } f'(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2} \quad f'(x) = 0 \text{ si } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

(En  $x = \frac{3\pi}{2}$ ,  $f'(x)$  n'est pas définie).

Le signe de la dérivée première est le signe de  $\cos x$

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$				
$f'(x)$	/	+	+	+	0	-	-	-	/
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$0$	$\searrow$	$-\infty$

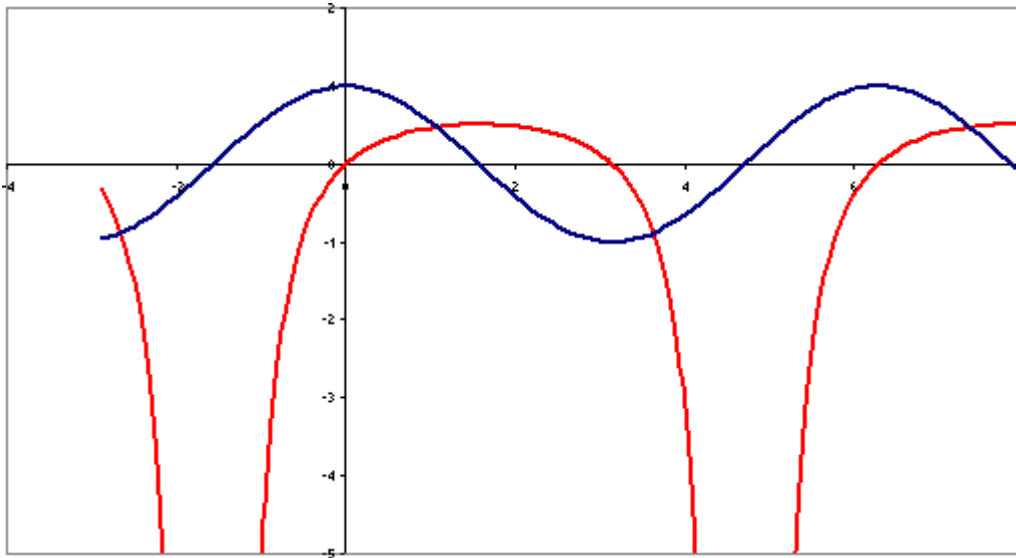
$f(x)$  est donc maximale en  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x)^2 - 2\cos^2 x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^4}$$

$$= \frac{\sin x - 2}{(1 + \sin x)^2}$$

$f''$  est toujours négative et donc la concavité de la courbe est toujours dirigée vers le bas (ce qui confirme le maximum en  $x = \frac{\pi}{2}$ )



Le graphe de la fonction est donné en rouge.

On superpose en bleu la fonction  $\cos x$ .

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation;

il y en a deux dans l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$

Une solution entre  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$  et l'autre entre  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$

## EXANA041 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Étudier et représenter la fonction.

$$f(x) = x + \ln(|1 - e^x|)$$

Faites en une représentation soignée.

La fonction est définie à condition que  $e^x \neq 1$ , donc partout sauf en  $x = 0$ .

$$\text{On a } f(x) = \begin{cases} x + \ln(1 - e^x) & \text{si } x < 0 \\ x + \ln(e^x - 1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

Asymptote verticale en  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } x < 0$$

Pas d'asymptote horizontale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Asymptotes obliques:

1) soit  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln|1 - e^x|}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - e^x)}{x}$$

Appliquons l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = m \quad (\text{où } m \text{ est le coefficient angulaire de la droite})$$

L'ordonnée à l'origine est :

$$p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln(e^x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^{-x} + \ln(e^x - 1))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x}(e^x - 1)) = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) \right] = 0$$

$$\rightarrow \boxed{x \rightarrow +\infty \rightarrow y = 2x}$$

2) soit  $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \ln(1 - e^x)}{x} = 1$$

$$p = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - e^x) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{x \rightarrow -\infty \rightarrow y = x}$$

Calcul de la dérivée première.

1)  $x > 0$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} \quad \text{Toujours positif}$$

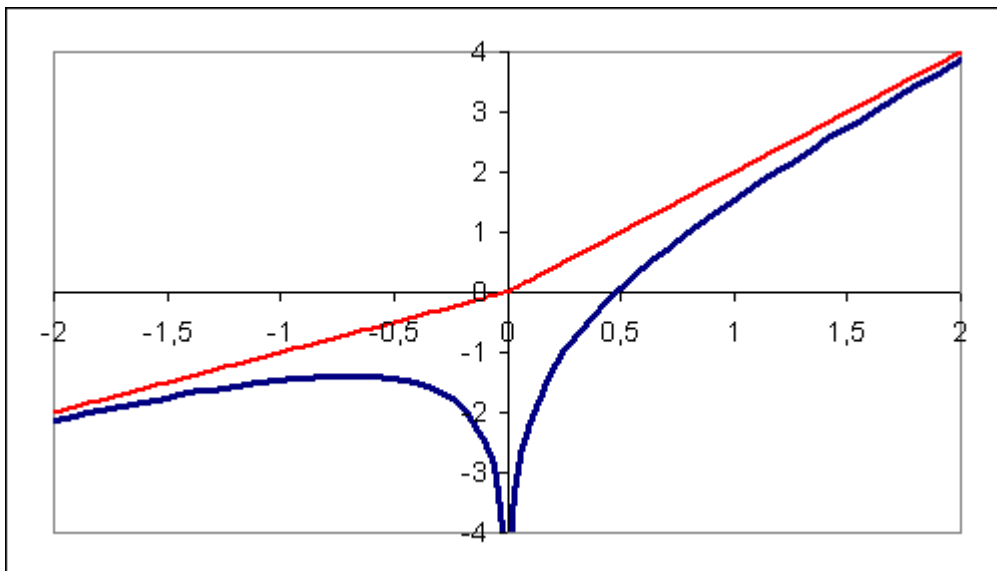
2)  $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1 - 2e^x}{1 - e^x} \quad \text{Le dénominateur est nul si } x = -\ln 2$$

Tableau de signes

	$-\infty$	$-\ln 2$	$0$	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	/	+	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$-2\ln 2 \searrow$	$-\infty$	/	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

$f(x)$  a donc un maximum en  $x = -\ln 2$ , avec  $f(x) = -2\ln 2$



## EXANA042 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit une fonction du type

$$y = ax^2 + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que cette fonction s'annule en  $\pm 4$  et que l'aire située sous son graphe et au-dessus de l'axe des  $x$  vaille  $64/3$ .

On considère ensuite les tangentes au graphe de cette fonction passant par le point  $(0,5)$ .

On demande de calculer le volume obtenu par rotation autour de l'axe des  $x$  de la figure fermée délimitée par la fonction et les deux tangentes.

Les racines de  $y = ax^2 + b$  sont  $+4$  et  $-4$ . Donc  $16a + b = 0$  (1)

L'aire située sous le graphe et l'axe des  $x$  est finie  $\left( = \frac{64}{3} \right)$ . On déduit que la parabole d'équation  $y = ax^2 + b$  a sa concavité tournée vers le bas ( $a < 0$ ) et

$$\frac{64}{3} = \int_{-4}^4 (ax^2 + b) dx = 2 \int_0^4 (ax^2 + b) dx = 2 \left[ \frac{ax^3}{3} + bx \right]_0^4 = 2 \left( \frac{64a}{3} + 4b \right)$$

$$\rightarrow 16a + 3b = 8 \quad (2)$$

de (1) et (2),  $\rightarrow b = 4$  et  $a = -\frac{1}{4}$ . La fonction est donc  $y = -\frac{x^2}{4} + 4$

Les équations des tangentes à la parabole passant par  $(0,5)$  sont de la forme  $y = \alpha x + \beta$   
Elles passent par  $(0,5) \rightarrow \beta = 5$ .

On cherche alors  $\alpha$  tel que la droite d'équation  $y = \alpha x + 5$  coupe la parabole  $y = -\frac{x^2}{4} + 4$  en un seul point. L'abscisse du point d'intersection vérifie :

$$\alpha x + 5 = -\frac{x^2}{4} + 4 \quad \rightarrow \quad x^2 + 4\alpha x + 4 = 0$$

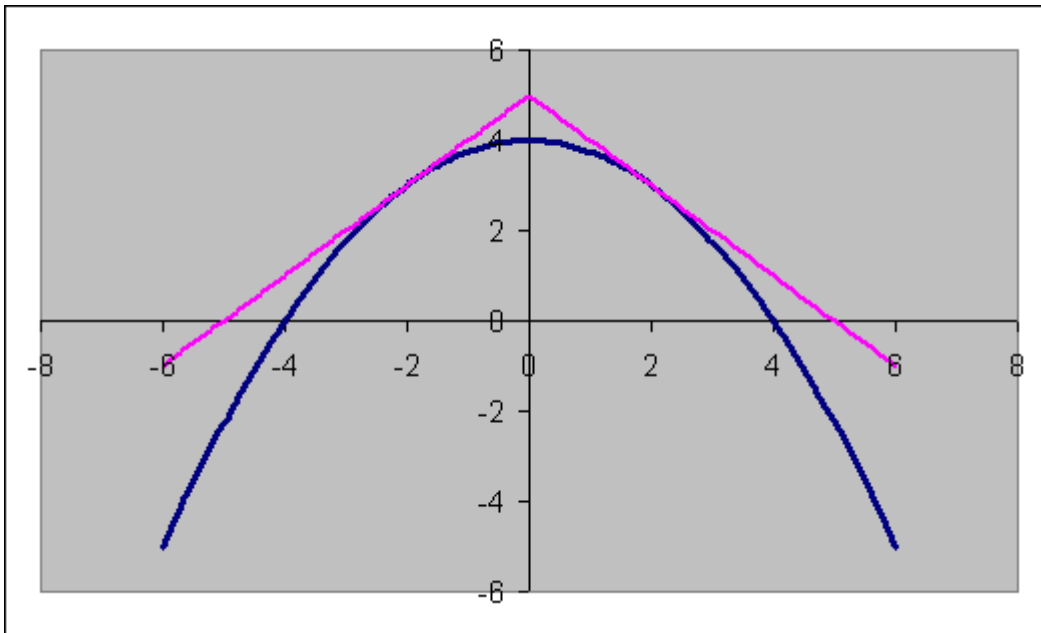
$\alpha$  doit être tel que cette équation ait une seule solution, donc  $\Delta = 16(\alpha^2 - 1) = 0$ .

$\rightarrow \alpha = \pm 1$  et les deux tangentes ont pour équations  $y = \pm x + 5$ .

Les points de tangences sont  $(-2, 3)$  et  $(2, 3)$

A cause de la symétrie par rapport à l'axe des y, le volume recherché vaut :

$$\begin{aligned} V &= 2 \left[ \int_0^2 \pi(-x+5)^2 dx - \int_0^2 \pi \left( -\frac{x^2}{4} + 4 \right)^2 dx \right] \\ &= 2\pi \left[ \int_0^2 \left( x^2 - 10x + 25 - \frac{x^4}{16} + 2x^2 - 16 \right) dx \right] \\ &= 2\pi \left[ -\frac{x^5}{80} + x^3 - 5x^2 + 9x \right]_0^2 = \frac{56\pi}{5} \end{aligned}$$



---

Modifié le 28 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

## EXANA043 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit la fonction

$$f(x) = 4x e^{-\frac{1}{2}x}$$

- Étudier la fonction  $f(x)$  et représentez-la.
- Calculer le volume  $V(\lambda)$  engendré par rotation de l'axe  $x$  de la figure comprise entre la courbe représentative de  $f(x)$ , l'axe des  $x$  et les droites  $x = 0$  et  $x = \lambda$  (avec  $\lambda$ , un paramètre réel)
- Calculer

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} V(\lambda)$$

a) Etude de la fonction  $f(x) = 4x e^{-\frac{1}{2}x}$

Domaine de définition :  $\mathfrak{R}$

Asymptote horizontale :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x e^{-\frac{1}{2}x} = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^{\frac{1}{2}x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}} = 0$$

Donc, la fonction est asymptotique à l'axe des  $x$  pour  $x \rightarrow +\infty$

On a aussi :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Dérivée première :  $y' = e^{-\frac{1}{2}x} (4 - 2x)$

$y' = 0$  pour  $x = 2$  (C'est un maximum car  $x < 2 \rightarrow y' > 0$ ;  $x > 2 \rightarrow y' < 0$ )

b) Calcul du volume  $V(\lambda) = \int_0^\lambda \pi \left( 4x x^{-\frac{1}{2}x} \right)^2 dx = 16\pi \int_0^\lambda x^2 e^{-x} dx$

Par parties :  $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$$

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$$

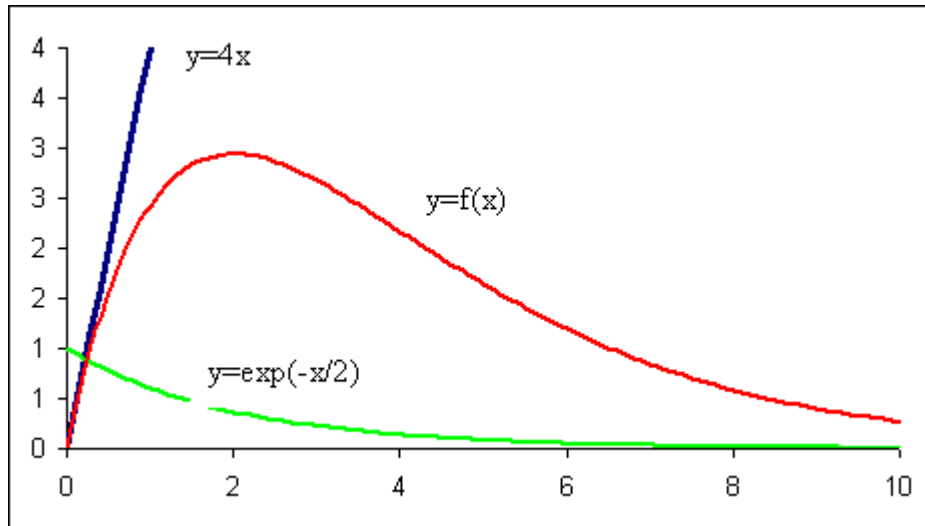
donc  $V(\lambda) = 16\pi \left[ e^{-x} (-x^2 - 2x - 2) \right]_0^\lambda = 16\pi \left[ 2 - e^{-\lambda} (\lambda^2 + 2\lambda + 2) \right]$



c) Lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini :

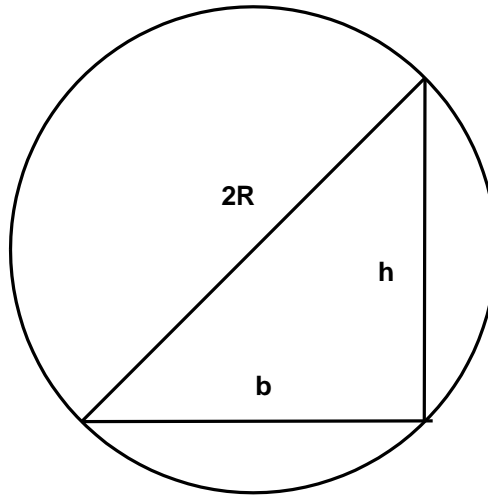
$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} (\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} V(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 16\pi \left[ 2 - e^{-\lambda} (\lambda^2 + 2\lambda + 2) \right] = 32\pi$$



## EXANA044 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Parmi tous les triangles rectangles inscrits dans un demi-cercle de rayon  $R$ , on demande de déterminer celui qui est de périmètre maximum



Soient  $h$  et  $b$ , la hauteur et la base d'un triangle rectangle inscrit dans le demi-cercle.

$$\text{Pythagore} \rightarrow h^2 + b^2 = 4R^2 \rightarrow h = \sqrt{4R^2 - b^2}.$$

$$\text{Périmètre du triangle, } P = h + b + 2R = \sqrt{4R^2 - b^2} + b + 2R$$

$P$  peut être considéré comme une fonction de  $b$

$$\text{si } P \text{ est maximum, sa dérivée est nulle} \rightarrow P' = \frac{-b}{\sqrt{4R^2 - b^2}} + 1 = 0 \rightarrow b = \pm\sqrt{2} R$$

On vérifie que l'on a un maximum :

$$P''(b) = \frac{-4R^2}{(4R^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow P''(\sqrt{2} R) = \frac{-4R^2}{(2R^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 \text{ (Concavité négative)}$$

## EXANA045 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Etudier les variations (domaine, limites, asymptotes, dérivée première, tableau des variations) de la fonction suivante

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 7}{e^x - 3}\right)$$

Domaine de définition L'argument du logarithme doit être  $>0$ . Le numérateur l'étant, il faut et il suffit que  $e^x - 3 > 0 \rightarrow x > \ln 3 \rightarrow \text{dom } f = ]\ln 3, +\infty[$

Asymptote vertical :  $x = \ln 3$ . En effet :  $\lim_{x \rightarrow \ln 3^+} \frac{e^{2x} + 7}{e^x - 3} = \frac{16}{0^+} = +\infty$

Asymptote horizontale : n'existe pas.

Asymptote oblique :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \ln(e^{2x} + 7) - \ln(e^x - 3) \right]' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 7} - \frac{e^x}{e^x - 3} \\ &= \frac{2e^{2x}(e^x - 3) - e^x(e^{2x} + 7)}{(e^{2x} + 7)(e^x - 3)} = \frac{e^x(e^{2x} - 6e^x - 7)}{(e^{2x} + 7)(e^x - 3)} = \frac{e^x(e^x - 7)(e^x + 1)}{(e^{2x} + 7)(e^x - 3)} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}(1 - 7e^{-x})(1 + e^{-x})}{e^{3x}(1 + 7e^{-2x})(1 - 3e^{-x})} = 1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln\left(\frac{e^{2x} + 7}{e^x - 3}\right) - \ln e^x \right] = \ln \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 7}{e^x(e^x - 3)} \right] = \ln 1 = 0$$

Donc,  $y = x$  est une asymptote oblique. De plus,  $f(x) - x > 0$  : la courbe est au-dessus de son asymptote.

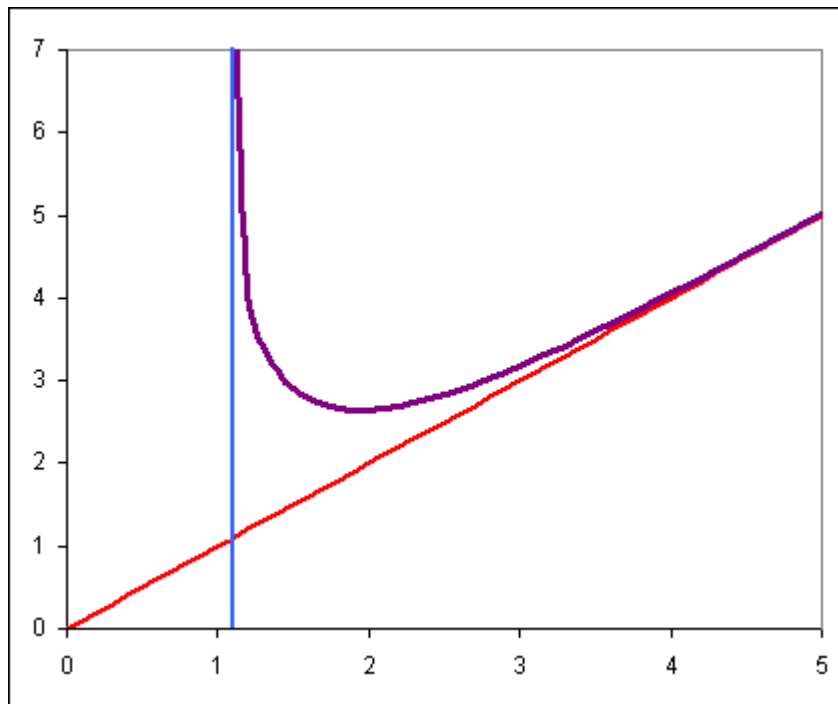
Maxima et minima

$$f'(x) = 0 \text{ si } e^x = 7 \rightarrow x = \ln 7.$$

Pour  $e^x < 7$ ,  $f'(x) < 0$  et  $e^x > 7$ ,  $f'(x) > 0 \rightarrow$  minimum pour  $x = \ln 7$

Tableau des variations

		$\ln 3$	$\ln 7$	$\infty$
$f'$	/		- 0 +	
$f$	/	$+\infty$	$\searrow \ln 14 \nearrow$	$+\infty$



## EXANA046 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

La fonction  $f(x)$  de la variable réelle  $x$  est définie par

$$f(x) = 2x - |x| \ln x^2$$

- a) Étudier la fonction  $f(x)$  et donner l'allure de sa représentation graphique (comportement aux limites, intersection avec les axes, dérivée première).  
 b) Déterminer l'aire de la zone définie par les points  $(x, y)$  tels que

$$0 < y < f(x)$$

$$1 < x < e$$

a) Domaine de définition :  $\mathfrak{R}_0$

a.1)  $x > 0$   $f(x) = 2x - 2x \ln x = 2x(1 - \ln x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x = 0$$

Asymptote horizontale : n'existe pas  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Asymptote oblique : n'existe pas  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2(1 - \ln x) = -\infty$

Dérivée première :  $f'(x) = 2(1 - \ln x) + 2x \left(-\frac{1}{x}\right) = -2 \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$  (La pente de la tangente à la courbe tend vers l'infini à l'origine)

Maxima et minima :  $f'(x) = 0$  ssi  $x = 1$  ( $x < 1 \rightarrow f' > 0$ ;  $x > 1 \rightarrow f' < 0$ )

a.2)  $x < 0$  :  $f(x) = 2x + 2x \ln(-x) = 2x(1 + \ln(-x))$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \ln(-x)}{\frac{1}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{-x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x = 0$$

Asymptote horizontale : n'existe pas  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

Asymptote oblique : n'existe pas  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2(1 + \ln(-x)) = +\infty$

Dérivée première :  $f'(x) = 2(1 + \ln(-x)) + 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 2(2 + \ln(-x))$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$

Maxima et minima :  $f'(x) = 0$  ssi  $\ln(-x) = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{e^2}$

Tableau des variations

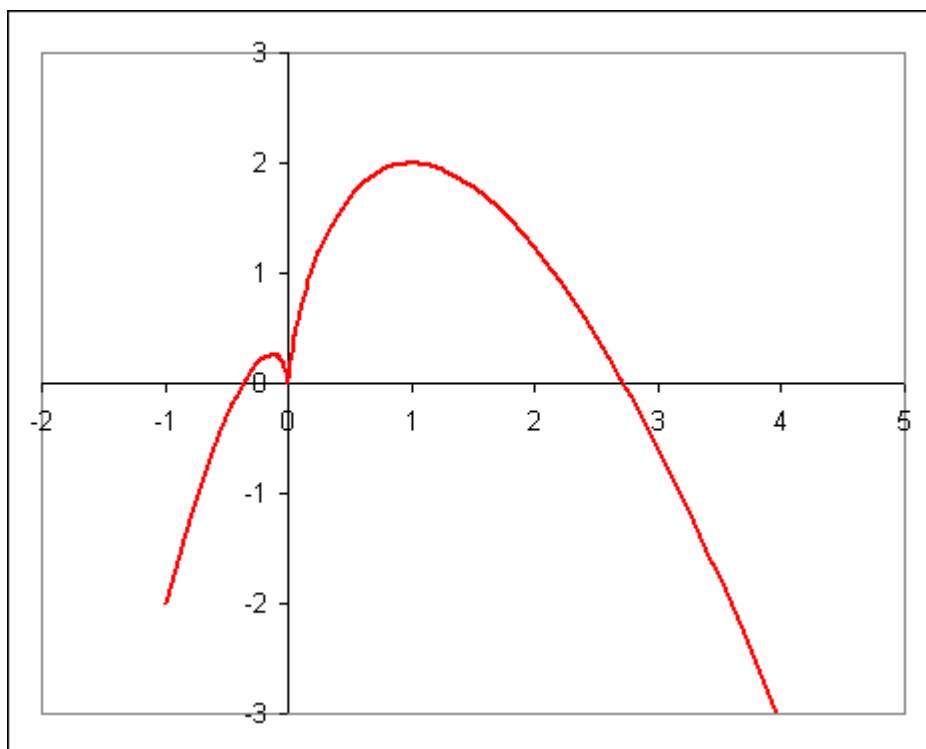
	$-\infty$	$-\frac{1}{e^2}$		0		1		$+\infty$
$f'$	+	0	-	$-\infty$	/	$+\infty$	+	0
$f$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0	/	0	$\nearrow$
								2
								$\searrow$
								$-\infty$

b) Sur l'intervalle  $]1, e[$ ,  $f(x) = 2x(1 - \ln x)$

$S = 2 \int_1^e (x - x \ln x) = 2 \left[ \frac{x^2}{2} - \int x \ln x dx \right]_1^e$

$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k$  (Intégration par parties)

$\rightarrow S = 2 \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2 \left[ \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$



## EXANA047 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{a}{1 + be^{-cx}}$$

dépendant des trois paramètres réels positifs ( $\neq 0$ )  $a, b, c$ .

- a) Vérifier que cette fonction est croissante sur tout son domaine de définition.
- b) Quel est exactement l'ensemble des valeurs prises par  $f(x)$  ?
- c) Déterminer les valeurs de certains paramètres pour que l'ensemble des valeurs prises par  $f(x)$  soit un intervalle de longueur 3 et que la valeur de  $f$  à l'origine soit  $3/2$ .
- d) Avec les valeurs trouvées des paramètres, rechercher le point où la pente de la tangente à la courbe est la plus grande. Quelle est la valeur maximale de cette pente ?

a) Quand  $x$  croît,  $e^{-x}$  décroît car  $c > 0$ . Le dénominateur décroît car  $b > 0$   
 → la fraction croît car  $a > 0$

En utilisant la dérivée, on arrive également à montrer que  $f$  est croissante.

$$f'(x) = \frac{-ab(-c)e^{-cx}}{(1+be^{-cx})^2} = \frac{abc}{(1+be^{-cx})^2} \quad [e^{-cx} > 0]$$

b) La fonction est continue et croissante, donc elle prend toutes les valeurs comprises entre A et B avec

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a}{\infty} = 0$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a}{1} = a$$

L'ensemble des valeurs prises par  $f(x)$  est donc  $]0, a[$

c) Pour que l'ensemble des valeurs prises par  $f(x)$  soit un intervalle de longueur 3, il faut que  $a = 3$ .

Pour que  $f(0) = \frac{3}{2}$ , il faut que  $f(0) = \frac{a}{1+b} = \frac{3}{2} \rightarrow b = 1$

d) La pente de la tangente est donnée par :

$$f'(x) = \left( \frac{3}{1+e^{-cx}} \right)' = \frac{3ce^{-cx}}{(1+e^{-cx})^2}$$

Au point où  $f'(x)$  est maximum, la dérivée de  $f'(x)$  est nulle.

On calcule donc  $f''$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3c \left[ -ce^{-cx}(1+e^{-cx})^2 + e^{-cx}(-2)(1+e^{-cx})^{-3}e^{-cx}(-c) \right] \\ &= \frac{-3c^2e^{-cx}}{(1+e^{-cx})^2} (1-e^{-cx}) \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \text{ si } e^{-cx} = 1 \rightarrow x = 0$$

La dérivée de  $f'$  est positive avant  $x = 0$  et négative après;  $f'$  a donc un maximum en  $x = 0$ .

La valeur maximale de  $f'$  est  $f'(0) = \frac{3c}{4}$



# EXANA048 – Polytech, UMon

## - Questions posées entre 1995 et 1998

Calculer l'intégrale définie suivante :

$$I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^n \ln x \, dx \quad n \in \mathbb{N}_0$$

---

a) Calculons d'abord d'une primitive de  $x^n \ln x$  :  $\int x^n \ln x \, dx = ?$

$$u' = x^n \quad u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Par parties :

$$v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \int x^n \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

$$b) \int_a^1 x^n \ln x \, dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right) \right]_a^1 = \frac{-1}{(n+1)^2} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \ln a + \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$c) \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} a^{n+1} \ln a = 0 \cdot (-\infty) \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\ln a}{a^{-(n+1)}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

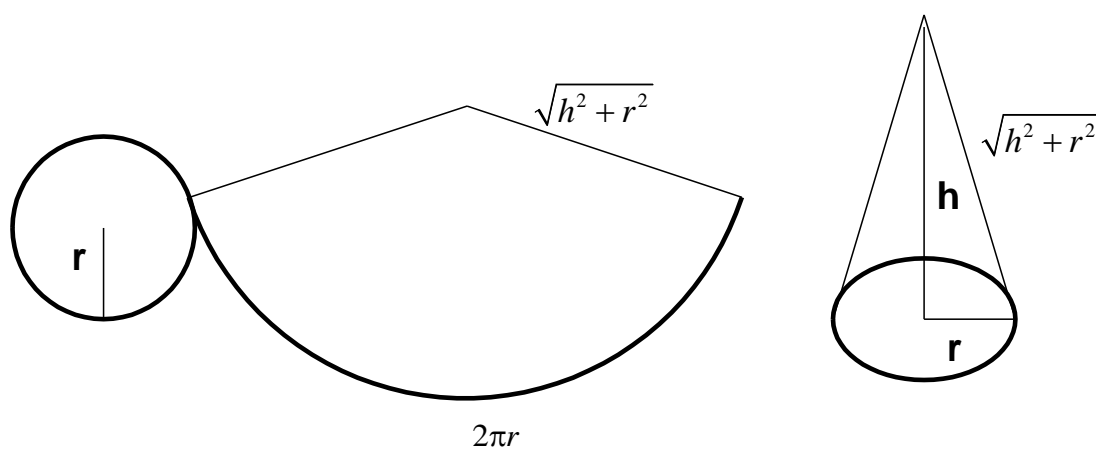
$$\text{Appliquons l'Hospital} \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0^+} = \frac{\frac{1}{a}}{-(n+1)a^{-(n+2)}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-1}{n+1} a^{n+1} = 0$$

$$\text{Finalement : } \boxed{I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^n \ln x \, dx = \frac{-1}{(n+1)^2}}$$

## EXANA049 – Polytech, UMon

- questions posées de 1995 à 1998.

Calculer le cône de volume maximal pour une surface totale donnée  $S$ .  
(Surface totale = surface latérale + surface de base).



Soit  $h$  la hauteur du cône et  $r$  le rayon de la base.

$$\text{Surface latérale} = \frac{2\pi r}{2\pi\sqrt{h^2+r^2}} \pi (h^2+r^2) = \pi r \sqrt{h^2+r^2}$$

$$\text{Surface totale} = \text{Surface latérale} + \text{surface de base} \rightarrow S = \pi r \sqrt{h^2+r^2} + \pi r^2$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

On en déduit une expression de la hauteur  $h$  en fonction de  $S$  et de  $r$  :

$$S - \pi r^2 = \pi r \sqrt{h^2+r^2} \rightarrow \sqrt{h^2+r^2} = \frac{S - \pi r^2}{\pi r} = \frac{S}{\pi r} - r$$

$$\rightarrow h^2+r^2 = \left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 \rightarrow h^2 = \left(\frac{S}{\pi r} - r\right)^2 - r^2 = \frac{S}{\pi r} \left(\frac{S}{\pi r} - r\right) = \frac{1}{(\pi r)^2} (S(S - 2\pi r^2))$$

$$\rightarrow h = \frac{1}{\pi r} \sqrt{S(S - 2\pi r^2)}$$

$$\text{Donc : } V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \frac{1}{\pi r} \sqrt{S(S - 2\pi r^2)} = \frac{1}{3} r \sqrt{S(S - 2\pi r^2)}$$

Et on peut maintenant dériver  $V(r)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} 3V'(r) &= \sqrt{S^2 - 2\pi S r^2} + \frac{r}{2\sqrt{S^2 - 2\pi S r^2}} (-4\pi S r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{S(S - 2\pi r^2)}} (S^2 - 2\pi S r^2 - 2\pi S r^2) = \frac{S}{\sqrt{S(S - 2\pi r^2)}} (S - 4\pi r^2) \end{aligned}$$

Pour trouver le volume maximum, on annule l'expression de la dérivée.

$$V'(r) = 0 \text{ si } S = 4\pi r^2 \rightarrow r = +\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } r < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \rightarrow V'(r) > 0 \\ \text{Si } r > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \rightarrow V'(r) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Il s'agit bien d'un maximum.}$$

$$\text{La hauteur correspondante est : } h = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$$